DE LA REPRESENTACIÓN PICTÓRICA AL ALGORITMO EN PROBLEMAS CON FRACCIONES: EL PROCESO DE SOLUCIÓN DE ALUMNOS DE SECUNDARIA CON BAJO APROVECHAMIENTO

MIGUEL ÁNGEL PARRA ÁLVAREZ, ROSA DEL CARMEN FLORES MACÍAS

Introducción

Se ha propuesto el aprendizaje a través de solución de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, así como ampliar y consolidar sus conocimientos, habilidades y capacidades para aplicarlos en la solución de problemas cotidianos (Schoenfeld, 1992). Aprender a solucionar problemas es un proceso a largo plazo y no siempre exitoso por lo que es importante diseñar situaciones instruccionales que favorezcan que los alumnos gradualmente muestren una evolución en su conocimiento, especialmente aquellos con problemas en el aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo nos enfocaremos en este tipo de alumnos de secundaria y en la evolución de su aprendizaje en un tópico particularmente difícil para ellos que es la solución de problemas con fracciones.

Las investigaciones han documentado deficiencias específicas en alumnos con problemas de aprendizaje en matemáticas relacionadas con su pensamiento estratégico tales como: razonamientos inconsistentes, errores frecuentes en la realización de la operación, dificultad en la comprensión del texto del problema, falta de estrategias metacognoscitivas para dirigir el proceso de solución, ausencia de estrategias de apoyo como dibujos o diagramas, dificultad para identificar la fuente de errores, poca generalización de experiencias en problemas similares, sustento de soluciones en información, creencias o experiencias irrelevantes, desinterés y pobre percepción de autoeficacia (Schoenfeld, 1992; Flores, 1999). Estas dificultades pueden analizarse considerando deficiencias en el pensamiento estratégico, pero también es importante analizarlas ubicando el desarrollo del conocimiento matemático de los alumnos.

Flores (2005), basándose en la teoría de los campos conceptuales, propone un modelo para analizar y comprender la evolución en las representaciones que los alumnos elaboran ante un problema. Se parte del análisis del conocimiento matemático que sustenta los razonamientos de los alumnos al entender y solucionar el problema, el empleo de símbolos o representaciones gráficas y simbólicas y el empleo del algoritmo. El modelo identifica cuatro etapas:

- Representación no canónica: Se interpreta el problema considerándolo una clase de problemas de un tipo diferente al que se plantea, lo que conduce a un entendimiento y solución errónea. Es decir, no se comprenden cabalmente las relaciones matemáticas implicadas en el problema.
- Representación canónica no algorítmica: la interpretación del problema es correcta pero la solución es mediante representaciones pictóricas. El alumno puede explicar la solución del problema con una representación pictórica pero no con un algoritmo.
- Representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico: la interpretación del problema es correcta y conduce al alumno a utilizar conjuntamente algoritmos y representaciones pictóricas adecuadas al problema. El alumno valida la solución algorítmica con su solución no algorítmica pues los resultados de ambas coinciden, pero puede ocurrir que los alumnos no logren explicar porqué los resultados son semejantes.
- Representación canónica algorítmica: El alumno comprende el problema y la relación que existe con el algoritmo a utilizar para llegar a la solución.

Este modelo de evolución se adapta a un campo que es particularmente difícil para los estudiantes: la solución de problemas de fracciones. Mancera (1992) reconoce que el aprendizaje de las fracciones es complicado. Por un lado, el símbolo “a/b” tiene asociados diversos significados. Puede representar una fracción como parte - todo, una razón o un número decimal, a esta propiedad se le denomina homonimia. Por otro lado, el concepto de fracción puede representarse como cociente de enteros o como decimal (¼ puede representarse también como .25), a esta propiedad se le denomina sinonimia. Por otro lado se encuentra el uso de diferentes modelos (rectángulos, rectas numéricas, doblado de papel, etc.) en la enseñanza, donde se provee a los alumnos de diversos problemas, en los que se hace uso indiferenciado de las cantidades en las que se puede presentar la fracción (cantidades discretas, continuas, definidas e indefinidas).

Se ha encontrado que alumnos de primaria y algunos de secundaria poseen un conocimiento rudimentario de las fracciones, aparentan comprenderlas ampliamente porque utilizan bien los términos fraccionarios y dominan ciertas partes de los procedimientos, pero no los conceptos en si (Nunes y Bryant, 1998). Es necesario considerar que las operaciones con fracciones presentan características propias, ajenas a las operaciones con números enteros (Mancera, 1992).

Se ha encontrado que un apoyo útil para los alumnos en el proceso de aprendizaje es el uso de representaciones pictóricas que se adaptan a su conocimiento. Valdemoros (1997) se refiere a éstas como algoritmos gráficos pues son una sustitución del algoritmo formal por dibujos que representan y son útiles en el complejo proceso de entender los algoritmos con fracciones. En el modelo de Flores (2005) el empleo de algoritmos gráficos queda ubicado como una representación no algorítmica.

Método

El objetivo del estudio es analizar el proceso de solución de un problema matemático en términos de representación del problema, conocimientos y estrategias utilizadas por alumnos de secundaria. Considerando los antecedentes anteriores se diseñó un programa de 13 sesiones con duración de dos horas dirigidos a seis alumnos que asistían a un programa de apoyo extra escolar. Los alumnos cursaban segundo año de secundaria y pertenecían a diferentes planteles. El objetivo del programa, fue que los alumnos, a través de problemas matemáticos, consolidaran sus conocimientos matemáticos en fracciones apoyados por una estrategia de solución. El programa se diseñó y desarrolló de acuerdo a las características propuestas de comunidades de aprendizaje(Schoenfeld, 1992; Santos, 1997; Torres, 1999; y Macías, 2003): No es sólo un grupo, es un equipo donde la responsabilidad es compartida, se valora el aprendizaje colaborativo, el aprendizaje se entiende como un proceso donde el alumno se aproxima paulatinamente al comportamiento, vocabulario y conocimiento de una determinada comunidad de práctica, y se reconoce y respeta la diferencia entre los miembros.

Considerando las dificultades de los alumnos para estructurar su actividad cognoscitiva durante el proceso de solución , los alumnos contaron con una tarjeta auto instruccional que contiene una estrategia de solución con doce pasos (Flores, 1999; Parra, 2004): leo el problema, lo platico, digo la pregunta, busco los datos, hago un dibujo, escribo los datos en mi dibujo, busco una operación, escribo la operación, la resuelvo, la compruebo, verifico si ocupé todos los datos, escribo la respuesta.

En cada sesión los alumnos desarrollaban un problema en equipos o entre pares, cuando se daban por vencidos el tutor intervenía proporcionando apoyos graduados. Al término de la actividad, cada equipo exponía su proceso de solución.

Se presentó a los alumnos un problema parte-todo (Waldegg et al. 1998) cuya solución no es obvia ni directa. Se presenta la cantidad ¼ como único dato numérico, los demás se encuentran implícitos y son los alumnos quienes deben encontrarlos. El valor del entero a encontrar se refiere a una cantidad discreta formada por elementos independientes.

Problema “Se acabó la leche”:

- ¡Cómo! ¿Ya no hay leche? - preguntó la madre asombrada-. Si ayer compré suficiente para la cena.

-La mitad la usó la abuela para el arroz con leche – dijo Rosita.

-Bueno, yo usé la mitad de la que quedó, para los licuados esta mañana- dijo Martha.

-Acuérdate que al medio día ocupaste la mitad de la que había para el flan- aclaró Javier.

-Y yo me tomé la mitad de la que quedaba esta tarde, mientras veía la televisión- agregó Juanito.

-¿Y solo queda ¼ de litro?- preguntó el padre-, pues ¿cuánto compraste ayer?

Resultados

El tipo de interacción que se propicia en una comunidad de aprendizaje favorece que los alumnos muestren una evolución en su conocimiento. Esto es patente en el siguiente episodio que se suscitó durante el desarrollo del programa.

El problema fue solucionado en equipos de tres alumnos, en la figura 1 se muestra la primera solución de un equipo y posteriormente el diálogo que entablan los alumnos y el tutor. Inicialmente, los alumnos realizaron una solución no canónica: realizaron una adición de fracciones. Al interactuar con el tutor, los alumnos no pueden sostener su solución. Cabe destacar también que existen problemas en el procedimiento formal en la suma de fracciones, que en el presente análisis no se tomaran en cuenta.

El tutor comienza por preguntarles la forma en que llegaron a esa solución y un alumno responde:

Raymundo: El problema dice que quedaba un cuarto, pero se tomó la mitad, entonces la mitad de ¼ es 1/8 y el problema dice que se volvió a tomar la mitad, y sacamos la mitad de 1/8 que es 1/16 después sumamos las fracciones y nos dio 1 3/8.
Tutor: Veo que colocaron al principio de su suma el número uno ¿Por qué lo pusieron?
Nicolás: Porque es un litro.
Tutor: Bien. ¿El problema menciona en algún lado un litro? (leen el problema nuevamente en silencio).
Elías: No. Pero se supone que está hablando de un litro, porque de ahí fueron tomando leche.
Tutor: Ustedes dan por hecho que había un litro ¿verdad?
Todos: Si.

Los alumnos muestran que conocen cómo transformar fracciones y a partir de este conocimiento argumentan que deben establecer el valor del entero transformando sucesivamente la fracción de ¼, además argumentan que inicialmente hay un litro lo que puede vincularse con la concepción de que en un problema de fracciones siempre debe haber un entero como dato y a partir de ello fraccionarlo. Con esta visión los alumnos dividieron ¼ en otras fracciones y añadieron la unidad, posteriormente las sumaron en el algoritmo.

El tutor pide a los alumnos que justifiquen su algoritmo pero no lo logran porque parten de argumentos (los ya mencionados) que son inconsistentes. Al no encontrar respuesta el tutor intenta que los alumnos vinculen sus conocimientos cotidianos con el problema y con ello valoren la posibilidad de otra solución:

Tutor: Sin embargo, su resultado final dice que compraron 1 3/8. ¿Cuál es la respuesta correcta un litro y tres octavos? (los alumnos piensan y no responden). *¿Es posible que en la tienda nos vendan 1 3/8 de leche?*
Nicolás: No. Entonces la respuesta correcta es un litro.
Tutor: Dime Nicolás, ¿Cuántos litros de leche llegan a comprar normalmente en tu casa para toda la familia?
Nicolás: Como tres.
T: ¡Eso es! Entonces no necesariamente debe haber solamente un litro en el problema. ¿Qué les parece si comprobamos su respuesta?

En una segunda solución, los alumnos vuelven a su algoritmo y se dan cuenta del error que cometieron en el procedimiento y aunque esta vez lo resuelven bien, no les convence la respuesta. En una tercera solución los alumnos buscan otros datos numéricos en el problema y vuelven a su planteamiento de transformar ¼, pero se dan cuenta que volverán al algoritmo inicial que no es una opción correcta de solución. En una cuarta solución, el tutor interactúa con los alumnos y los guía en el uso de la tarjeta auto instruccional. En el paso 5 "hago un dibujo", los alumnos comienzan a intercambiar ideas, y el tutor se aleja para supervisar el avance de los otros equipos. Momentos después obtienen la respuesta haciendo uso solamente de un algoritmo gráfico (figura 2). Esto es, los alumnos llegaron a una representación canónica algorítmica basada en un esquema de solución no algorítmico.

El tutor pregunta al equipo sobre la forma cómo llegaron al resultado

Tutor: ¿Cómo llegaron a este resultado?
Raymundo: Como no sabemos el total de litros, dibujamos un entero y lo fuimos dividiendo como lo decía el problema, y le pusimos el nombre de las personas que tomaron leche y al final nos quedó el cuarto que sobró.

Nicolás: Al final vimos que el cuarto se parecía a lo que Juanito se había tomado, entre los dos daba como resultado ½, y sumándolo con lo que se tomó Javier nos da un litro, que es lo mismo que usó la mamá, eso quiere decir que llevamos dos litros y con lo de la abuela nos salieron cuatro litros.

En esta ocasión, los alumnos comenzaron con un todo desconocido que fueron dividiendo según lo dictaba el problema, hasta llegar a ¼ como la porción más pequeña. A partir de ella y con apoyo de su dibujo y su conocimiento de la transformación de fracciones hicieron cálculos para obtener el resultado final, utilizando ¼ como fracción y ya no como entero al que hay que dividir.

Con la intención de que los alumnos llegaran a una solución algorítmica el tutor les propone continuar con el paso "busco una operación" de la tarjeta auto instruccional donde se encuentran con obstáculos para hacerlo, finalmente lo consiguen con apoyo del tutor.

Conclusiones

El episodio muestra cómo los alumnos pueden evolucionar en la representación de los problemas si sus actividades se realizan en un contexto como el de las comunidades de aprendizaje, que favorece la reflexión y la discusión y además si existe la oportunidad de emplear y analizar diferentes formas de representación en sucesivas soluciones. Igualmente se ejemplificó cómo mediante la enseñanza de una estrategia de solución de problemas se pueden resolver las dificultades de los alumnos para estructurar su actividad durante la solución (Schoenfeld, 1992; Flores, 1999). En necesario considerar que el paso de una representación a otra es un proceso que no culmina cuando se llega al resultado correcto del problema, sino que es necesario continuar proveyendo a los alumnos de problemas que les permita hacerse representaciones correctas del problema con el fin de que utilicen algoritmos acordes a él.

Bibliografía

Flores, M., R. (1999) La enseñanza de una estrategia de solución de problemas a niños con problemas de aprendizaje. *Integración, Educación y Desarrollo Psicológico*; 11, 11, pp 1-17.

Flores, M., R. (2005) El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática*. 17, 2, pp 7- 34.

Macías, H. (2003) Comunidad de aprendizaje. Documento en línea disponible en http://kino.tij.uia.mx/~humberto/comun3.html

Mancera, M., E. (1992) Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación matemática*. 4, 2, pp 30-54.

Nunes, T., y Bryant, P. (1998) *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. México, Siglo XXI. Segunda edición.

Parra, A., M. (2004) La instrucción por medio de problemas dentro de una comunidad de aprendizaje matemático. Tesis de maestría. UNAM.

Santos, T. L. (1997) *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México. Grupo Editorial Iberoamérica. 2ª Edición.

Schoenfeld, A. (1992) Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics." En: Douglas Grows (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the NCTM.* USA. Macmillan Publishing Company.

Torres, R., M. (1999) *Comunidad de aprendizaje: una comunidad organizada para aprender*. Documento en línea disponible en http://www.psi.uba.ar/carrerasdegrado/psicologia/educaci1/bibliografia/COMUNIDAD%20DE%20APRENDIZAJE.rtf

Valdemoros, M. (1997) Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones; estudio de caso. *Educación Matemática*. 9, 3, 5-17.

Waldegg, G., Villaseñor, R., y García, V. (1998) *Matemáticas en contexto. Aprendiendo matemáticas a través de la resolución de problemas*. Segundo curso. México. Grupo editorial Iberoamérica.

Figura 1: Primera solución

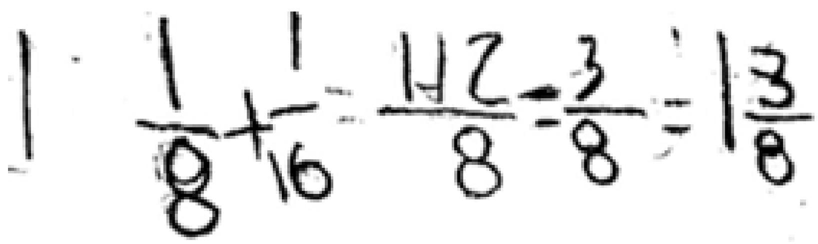

Figura 2: Segunda solución