

# OBSTÁCULOS Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EUCLIDEANA, RELACIONADOS CON LA TRADUCCIÓN ENTRE CÓDIGOS DEL LENGUAJE MATEMÁTICO, EN EL NIVEL LICENCIATURA

MARISOL RADILLO ENRÍQUEZ, RICARDO ULLOA AZPEITIA  
Y JOSÉ FRANCISCO VILLALPANDO BECERRA

## Introducción

Se reportan los resultados parciales de una investigación exploratoria cualitativa, para identificar los obstáculos de aprendizaje en los procesos de traducción entre los diferentes códigos del lenguaje matemático en la resolución de problemas de Geometría Euclidea que enfrentan los estudiantes de licenciatura del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara.

Se diseñaron problemas en los que se pide al estudiante traducir el planteamiento verbal de una proposición a sus correspondientes representaciones simbólica y gráfica, en los primeros temas del programa de estudios. Posteriormente se hizo un análisis lingüístico para clasificar aquellos obstáculos y errores encontrados.

El término *obstáculo* se utiliza como sinónimo de dificultad, mientras que un *problema* es una cuestión por resolver, los *errores* son trasgresiones a las normas establecidas por convenciones previas para el uso del lenguaje matemático.

## Contexto

El Departamento de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) oferta la materia de Geometría Euclidea a estudiantes de cuatro licenciaturas: ingeniero en comunicaciones y electrónica, ingeniero topógrafo, licenciado en matemáticas y licenciado en física. Cada estudiante se inscribe en el grupo de su elección; cada uno de los 12 grupos disponibles está formado por

aproximadamente 30 estudiantes. La carga horaria del curso es 64 y su duración es de 16 semanas.

El aprendizaje de las reglas de representación simbólica suele comenzar con una lista de símbolos y su correspondiente significado; se continúa con una serie de ejercicios de aplicación de las reglas de simbología, y actividades de traducción entre las representaciones verbales, simbólicas y gráficas.

### **Planteamiento del problema de investigación**

El problema involucra las dificultades que se presentan en la solución de problemas de la Geometría Euclidea, relacionadas con el uso de los códigos del lenguaje matemático.

Los obstáculos a investigar se relacionan con el uso inadecuado del lenguaje, lo cual repercute en errores de representación de las proposiciones matemáticas involucradas en la solución de problemas.

### **Preguntas de investigación**

1. ¿Cuáles son los obstáculos que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de la Geometría Euclidea en relación con el lenguaje matemático?
2. ¿Qué tipo de errores de representación verbal, gráfica y/o simbólica cometen los estudiantes al resolver problemas de Geometría Euclidea?

### **Objetivos**

- Identificar obstáculos en el aprendizaje de la Geometría Euclidea, relacionados con el lenguaje matemático.
- Identificar y clasificar los errores de traducción entre los diferentes códigos utilizados en la Geometría Euclidea, así como determinar cuál es la influencia de dichos errores en la representación de los problemas y/o teoremas respectivos.

## **Marco teórico**

La representación de un concepto matemático es considerada como una señal externa (signo o marca) que lo muestra y hace presente; incluye esquemas e imágenes mentales con las que el individuo trabaja sobre las ideas matemáticas (Rico, 2000). Mediante las representaciones matemáticas es posible asignar significados y comprender estructuras matemáticas (Radford, en Rico, 2000).

Los enunciados matemáticos pueden ser representados en forma verbal mediante un lenguaje especializado que se desarrolla sobre la estructura del lenguaje cotidiano y posee una gramática propia.

La representación gráfica es la imagen de uno o más conceptos, y las relaciones que se plantean entre ellos en una proposición matemática; puede incluir letras que asignen nombres específicos a la figura.

El uso de los símbolos matemáticos para representar uno o más conceptos y las relaciones que guardan entre sí, constituye otra forma de representación que se relaciona con las anteriores y obedece a un código específico.

La traducción entre las diferentes formas de representación constituye el principal interés, ya que implica el dominio del lenguaje matemático.

Se construyeron reglas de sintaxis para la representación simbólica de la geometría euclídea, que constituyen la referencia para el análisis de los errores detectados. Estas reglas incluyen una lista de constantes, variables simples y derivadas, predicados y construcción de enunciados.

Actualmente se trabaja en construcción de la gramática del español especializado de la Geometría Euclídea y posteriormente, se pretende abordar la sintaxis de la representación gráfica de esta disciplina.

## **Errores en la solución de problemas matemáticos.**

El análisis lingüístico de las respuestas parte de la consideración de que los errores que se presentan en la solución de problemas de la Geometría Euclidea son de tres tipos:

- *De representación* de objetos y enunciados matemáticos.
- *Deductivos*
- *Axiomáticos o de aplicación de la teoría* (definiciones, propiedades, axiomas, teoremas, lemas, corolarios, construcciones) en el procedimiento de solución.

Estos no son excluyentes entre sí, ya que un error de un tipo puede tener consecuencias en los otros dos.

## **Metodología**

A un mes de comenzado el curso de Geometría Euclidea, se acordó con un profesor de la materia aplicar los cuestionarios a sus dos grupos.

El cuestionario comienza con las instrucciones para responder a las preguntas:

*Para cada inciso, dibuje un esquema, designe los puntos necesarios y escriba simbólicamente la situación dada.*

- 1) La recta que pasa por los puntos S y T se intersecta en el punto R con el rayo que inicia en R y se prolonga hacia U
- 2) La recta  $a$  es perpendicular a la recta  $b$ , en el punto P
- 3) La distancia entre un punto y una recta es igual a la longitud del segmento perpendicular que los une.
- 4) El punto P equidista de los lados del triángulo ABC.
- 5) Un punto cualquiera sobre la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.
- 6) Un punto cualquiera sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.

Participaron 50 estudiantes quienes respondieron las preguntas individualmente sin consultar apuntes o libro. No hubo restricción de tiempo para responder el cuestionario.

Los temas incluidos en el cuestionario son: conceptos fundamentales de la geometría euclídeana, ángulos y triángulos. Se buscó averiguar las posibles dificultades que se presentan al simbolizar los términos recta, rayo, segmento, bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento.

Posteriormente se llevó a cabo un análisis lingüístico de las respuestas para identificar los obstáculos y errores relacionados con el lenguaje matemático.

En una etapa más avanzada del mismo curso, se aplicó a los estudiantes un segundo cuestionario con problemas de demostración y de solución numérica acerca de los temas de círculos y semejanza de triángulos, aunque los resultados no se incluyen en este trabajo.

## **Resultados**

Todos los estudiantes hicieron la representación gráfica del problema 1 (una recta y un rayo se intersectan en el inicio del rayo), aunque diez de ellos presentaron el caso particular de perpendicularidad lo cual constituye una insuficiencia de generalización. Cuatro personas hicieron una figura que no corresponde a la situación dada.

Los errores más frecuentes en la representación simbólica de este problema fueron la representación de recta y rayo y la construcción del enunciado de intersección.

La simbolización de longitud (ST) en vez de recta ( $\overleftrightarrow{ST}$ ), rayo ( $\overrightarrow{RU}$ ) o segmento ( $\overline{AB}$ ) es considerada como un error de traducción entre los códigos verbal y simbólico, ya que todos ellos representan variables distintas en la notación simbólica.

Simbolizar el rayo con un solo punto ( $\vec{R}$ ) o asignar letras minúsculas a los puntos son errores de sintaxis, aunque otros lenguajes especializados, como el de la física, las utilicen de esa manera.

El enunciado de intersección entre dos líneas es triádico, puesto que establece la relación entre tres variables: dos líneas cualesquiera (recta, rayo, segmento o cualquier curva) y el o los puntos que tienen en común. Entonces  $\overleftrightarrow{ST} \cap \vec{RU}$  presenta un error de sintaxis puesto que omite el punto de intersección. En cambio la expresión  $\overleftrightarrow{ST} \cap \overline{RU} = R$  se clasificó como error de traducción ya que el enunciado cumple las reglas de sintaxis, pero se simbolizaron segmentos en vez de recta y rayo.

Otra manera correcta de simbolizar el problema 1 incluye dos enunciados diádicos que expresan la pertenencia de un punto a cada línea:  $R \in \overleftrightarrow{ST}$ ,  $R \in \vec{RU}$ . Sin embargo, se encontraron errores de sintaxis en respuestas como  $\overleftrightarrow{ST} \in \vec{RU}$ , que también es de aplicación de teoría ya que una recta no puede pertenecer a un rayo.

Prácticamente todas las representaciones gráficas del problema 2 (dos rectas son perpendiculares) son correctas, aunque solamente trece estudiantes marcaron los ángulos rectos. Se encontraron 19 respuestas correctas a la representación simbólica; 16 estudiantes construyeron adecuadamente el enunciado de perpendicularidad, pero representan mal las rectas (sin el diacrítico ‘ $\leftrightarrow$ ’, o con pares de letras minúsculas).

El problema 3 enuncia la definición de la distancia entre un punto y una recta, que es necesaria para responder los problemas 4 y 5. Se incluyó en el cuestionario para descartar la falta de conocimientos previos para las respuestas a estos dos problemas. Sin embargo, la redacción de este problema causó mucha confusión al traducirla al

código simbólico; quizá esta dificultad repercutió en los errores cometidos en los siguientes problemas.

A pesar de que la mayoría de los estudiantes dibujaron y simbolizaron correctamente las rectas perpendiculares en el problema 2, en éste hubo mayor cantidad de errores y sólo hubo tres respuestas correctas a la representación simbólica; cinco personas no contestaron este problema (ni gráfica ni símbolos); 30 alumnos no hicieron la representación simbólica, aunque sí trazaron alguna figura, mientras que ocho de dibujaron una figura que no corresponde al enunciado.

Los problemas 4, 5 y 6 representaron mayor dificultad para los estudiantes, en ambas representaciones pues se registró una mayor cantidad de estudiantes que no respondieron al problema. Estos problemas involucran conceptos tales como la distancia entre un punto y una recta (4, 5), la bisectriz de un ángulo, la mediatriz de un segmento que son conceptos básicos de la Geometría, pero también pueden ser considerados como términos complejos del español especializado, ya que requieren varias condiciones para su representación gráfica y/o simbólica.

### **Respuesta a preguntas de investigación**

Los *obstáculos* en el aprendizaje de la Geometría Euclidea, relacionados con el lenguaje matemático, se clasifican en:

1. Términos del español especializado, a los cuales corresponden dos o más condiciones que deberán representarse con dos o más expresiones simbólicas, y/o características en la representación gráfica. Por ejemplo, la mediatriz de un segmento.
2. Términos o sintagmas del español especializado que tienen significados muy precisos, con mayor exigencia de exactitud que en el lenguaje cotidiano. Aquí se incluyen expresiones tales como “un punto cualquiera”, “si y solo si”, “uno y solo uno”.

3. Influencia de otros lenguajes especializados (como el de la física) en la representación simbólica de términos tales como *recta* y *rayo*.

Estos obstáculos pueden ser la causa de *errores* en la solución de problemas de la materia.

Desde el punto de vista lingüístico, los errores detectados en esta etapa de la investigación corresponden a dos categorías:

1. Errores de sintaxis en la notación simbólica y/o representación gráfica. Uno de los ejemplos más frecuentes es la construcción incompleta del enunciado de intersección entre una recta y un rayo, o simbolizar el rayo con una sola letra.
2. Errores de traducción de entre códigos. Por ejemplo, AB en vez de  $\overleftrightarrow{AB}$ , ya que el término “*recta*” se representa como la longitud del segmento AB.

## **Conclusiones**

Se encontró mayor cantidad y variedad de errores en la representación simbólica de cada problema que en su correspondiente representación gráfica. Una posible razón de ello es que el código de la representación gráfica es más flexible que los códigos simbólico y verbal.

Es conveniente que las reglas para la notación simbólica de la Geometría Euclídea se presenten asociadas a definiciones, propiedades, axiomas y postulados que les den sentido.

Los conceptos básicos deben mostrarse tanto en forma verbal como en sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica para propiciar un mejor aprendizaje de los mismos y del lenguaje matemático.

En el caso de las reglas para simbolizar recta, rayo, segmento y longitud, conviene presentar una secuencia que agrupe todas las variables cuya representación

simbólica incluye un par de puntos y poner el énfasis en la variación del significado según el diacrítico utilizado ( $\leftrightarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ) o la ausencia del mismo.

La clasificación inicial de obstáculos y errores relacionados con el lenguaje matemático, se usará para perfeccionar las reglas de sintaxis de la notación simbólica y avanzar en la construcción de la gramática del español especializado de la Geometría Euclideana.

En la siguiente fase de la investigación se trabajará con problemas de los seis posibles procesos de traducción entre pares de códigos:

1. simbólico  $\rightarrow$  verbal
2. gráfico  $\rightarrow$  verbal
3. simbólico  $\rightarrow$  gráfico
4. gráfico  $\rightarrow$  simbólico
5. verbal  $\rightarrow$  gráfico
6. verbal  $\rightarrow$  simbólico

## **Bibliografía**

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao
- Ardila, A. (2002). El lenguaje matemático y el usual, como mediador de la comunicación. *Acta Latinoamericana de Matemática*, Vol. 15, pp. 1169-1173
- Brousseau, G. (2003). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie*. Consultado en diciembre de 2005 en <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/homebrousseau.htm>
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A., Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas
- De Guzmán, M. (s/f). *Del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático*. Consultado el 27 de octubre de 2004 en <http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Lenguaje/>
- Franchi, L., Hernández, A. I. (2004). Topología de errores en el área de geometría plana. *Educere, Investigación Arbitrada*. Año 8, Núm. 24, pp. 63-71

- Grisales G., A., Mora, N. (s/f). *Lenguaje matemático y desarrollo del pensamiento*. Consultado el 14 de noviembre de 2004 en [http://www.educadormarista.com/ARTICULOS/Lenguaje\\_matematico.htm](http://www.educadormarista.com/ARTICULOS/Lenguaje_matematico.htm)
- Ortega, J. F., Ortega, J.A. (2002). *Experiencia sobre el conocimiento del lenguaje matemático*. Consultado el 10 de septiembre de 2004 en: <http://uv.es/asepuma/jornadas/madrid/I17C.pdf>
- Palencia, A., Talavera, R. (2004, enero-junio). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista Ciencias de la Educación*, Año 4, Vol. 1, Num. 23, pp. 47-60
- Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ed. Morata.
- Planas, N. (2002). Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n. 30, abril 2002, pp. 114-124. Barcelona: Grao
- Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Radillo, M., Huerta, S. (2007). "Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclídeana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático", en Abrate, R., Pochulu, M. *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática*. Argentina: Universidad Nacional de Villa María.
- Radillo, M., Nesterova, E., Ulloa, R., Pantoja, R., Yakhno, A. (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa. *Congreso Internacional Virtual de Educación (CIVE 2005)*. Disponible en: [www.cibereduca.com/cive/cive2005.asp](http://www.cibereduca.com/cive/cive2005.asp)
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en Kilpatrick, J., Gómez, Rico (ed). *Educación matemática* pp. 69-108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación y comprensión sobre la educación matemática*. IV Simposio SEIEM. Huelva. Consultado el 8 de noviembre de 2006 en <http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm>

Socas, M., Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 14, 7-24.