

## EL ENFOQUE HACIA LA MODELACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA DERIVADA.

MAXIMILIANO CERVANTES SALAZAR, RENÉ PINET PLASENCIA

### **Resumen:**

A partir de las evaluaciones PISA se ha detectado un fuerte problema de aislamiento del conocimiento matemático en los niveles básicos. La situación no es diferente en las escuelas de ingeniería, donde el aprendizaje de la derivada es un problema crítico. Desarrollamos una propuesta con la *matemática en el contexto de las ciencias y el enfoque hacia la modelación* evitando la noción de límite. ¿Pero cuales son sus efectos en la comprensión como una actividad de modelación?, y ¿qué habilidades de modelación promueve? Para ello se realizó un estudio de casos en el Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora. En el caso de la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación se trabaja con un grupo de 19 alumnos de ingeniería inscritos cálculo diferencial en el periodo 2006-1. El caso tradicional comprendió otro grupo de ingeniería con 8 alumnos inscritos en el mismo curso en otro horario. A ambos grupos se les aplicaron cuestionarios sobre comprensión relacional y se les pidió la modelación del mismo problema de ingeniería. La comparación de los resultados preliminares, nos sugieren que la comprensión relacional sobre la derivada en ambos casos no es profunda, y que mientras la didáctica tradicional promueve significados como la pendiente de la tangente, la matemática en contexto lo hace como razón de cambio instantánea y acerca la noción a la realidad. Por otra parte, los alumnos del caso tradicional mostraron mas habilidades de modelación que las del caso de la matemática en contexto.

### **Problema de estudio:**

La bibliografía reporta que enseñanza de las matemáticas y en particular el aprendizaje del cálculo en las escuelas de ingeniería es un problema educativo de significativa importancia, donde se espera que el nuevo ingeniero disponga de una visión apropiada del papel que

juegan el conocimiento matemático, científico y técnico en el ejercicio de la profesión (Vargas, 1998). Sin embargo es común encontrar manifestaciones acerca de la utilidad del conocimiento matemático que se está construyendo, expresiones como ¿para qué me sirve esto? ¿cuándo lo voy a usar? o ¿qué significa todo esto? no son del todo escasas.

Entre las causas más probables de esta problemática se encuentran la dificultad del aprendizaje de los contenidos por un lado y la falta de contextualización por otro (Camarena, 1999, 2004), lo que favorece el aprendizaje algorítmico, en detrimento del aspecto conceptual (Artigue, 1995). Esta problemática se ha tratado de abordar desde posiciones que consideran el entorno para facilitar el aprendizaje de las nociones de límite y derivada, el efecto de las instituciones en tales nociones, y cuestiones conceptuales (Tall, 1985) entre otras.

Pensamos que parte de la solución está en el uso de la modelación matemática en el ámbito didáctico que en los últimos años ha adquirido relevancia a nivel internacional (Blum, 2002; Houston, 2003). En México una respuesta importante a la necesidad de contextualizar el conocimiento a través de didácticas de modelación es la teoría de la matemática en el contexto de la ciencias, creada en el Instituto Politécnico Nacional por la Doctora Patricia Camarena (Camarena, 2004), sin embargo, desde nuestra posición, la didáctica de modelación introduce el significado de las nociones desde la perspectiva formal de la matemática misma, en lugar de una perspectiva de modelación. En la experiencia personal, interesados en estos últimos significados estamos desarrollando la propuesta el *enfoque hacia la modelación* (Cervantes, 1996, 2003; Cervantes y Arcos, 2005). Creemos que las actividades de modelación sobre el entorno en un sentido amplio, constituyen el origen de muchos de los conceptos, y por lo mismo, el significado de estos debería interpretarse en términos de tales actividades. Alentados por los resultados de una

investigación exploratoria (Cervantes, 2003), nos interesa investigar el efecto que podría tener el enfoque hacia la modelación en el aprendizaje de la derivada y el desarrollo de habilidades de modelación bajo de la matemática en el contexto de las ciencias.

**Pregunta de investigación:**

*¿Qué efectos puede tener en la comprensión y en las habilidades de modelación la didáctica de la matemática en contexto con un enfoque hacia la modelación del concepto de derivada?*

**Objetivos:**

El objetivo principal del estudio es lograr un primer acercamiento a un proceso de enseñanza aprendizaje para el concepto de derivada, con la didáctica mencionada.

*Objetivos específicos:*

1. Elaborar una propuesta conceptual con el enfoque hacia la modelación para el aprendizaje de la derivada.
2. Implementar dicha propuesta con la matemática en contexto, caracterizar los principales significados durante la enseñanza aprendizaje del concepto así como las habilidades de modelación puestos en juego durante la solución de un problema de ingeniería.
3. Analizar los efectos en la comprensión en términos de los significados caracterizados, y los efectos en el desarrollo de habilidades de modelación.

### **Marco teórico:**

A partir de las evaluaciones PISA los resultados cuestionan el aislamiento de las matemáticas con la realidad y el mundo laboral (Gil, S.F.; INEE, 2003). En respuesta sobre el papel de la educación matemática, organismos matemáticos internacionales han sugerido el uso didáctico la modelación matemática (Blum, 2002). Aunque se ha promovido su utilización por más de 20 años (Houston, 2003), en la revisión encontramos posturas que ubicamos en dos posiciones extremas: aquellas que hacen un uso instrumental de los conceptos matemáticos en los procesos de modelación y las que utilizan la modelación como un medio para desarrollar el concepto matemático. Ejemplos de estas posturas son la modelación tradicional, la *realistic mathematics education*, la *models and modeling perspectives* y la matemática en el contexto de las ciencias.

La modelación tradicional lleva la intención del desarrollo de habilidades de modelación en primer término; su didáctica presenta un problema real y pide al alumno que utilice la matemática para su solución. Ello exige un conocimiento previo de los conceptos y procedimientos matemáticos que serán utilizados como instrumentos de modelación. El texto *Mathematical Modelling* de Berry y Houston (1995) es un buen ejemplo de esta postura. Investigaciones recientes sugieren que los estudiantes bajo esta didáctica muestran falta de habilidad para saber que es lo que persigue un modelo, aprenden sobre el papel sociocultural de las matemáticas, se motivan y sorprenden por la ayuda de las matemáticas en la solución de problemas reales.

En contraste la *realistic mathematics education* se distingue por su interés en que la matemática construida tenga un sentido de realidad en cualquier nivel de actividad, donde la modelación juega el papel de puente entre las situaciones reales y los objetos

matemáticos contruidos. Para Hans Freudenthal, las matemáticas constituyen mas bien actividades de *matematizacion* de donde surgen los productos matemáticos: símbolos, notaciones y conceptos entre otros (Gravemeijer & Terwel, 2000). Consideramos que esta corriente presenta aportes importantes para la construcción de los significados y para acercar la matemática a la realidad como *modelo para*. Aunque se ha desarrollado para niveles básicos es posible utilizarla en temas complejos como el cálculo.

Entre las dos posiciones anteriores observamos corrientes intermedias que utilizan la generación de modelos matemáticos y la modelación como una forma de aprendizaje, como la *models and modelling perspectives* iniciada por Richard Lesh (Lesh, 2000; Lesh & Harel, 2003). Dentro de este enfoque, se afirma que es necesario ir mas allá de la solución de los problemas y cambiar la practica en el ámbito escolar, y que la modelación ofrece al niño una oportunidad para desarrollarse socialmente, que sus actividades lo involucran en procesos matemáticos importantes como la descripción, la explicación, construcción y razonamiento crítico. En resumen, se esta presentando un importante movimiento tendiente a utilizar los modelos y la modelación desde los niveles elementales.

Dentro de estas posiciones intermedias la matemática en el contexto de las ciencias (Camarena, 2002, 2004) surge en las escuelas de ingeniería con el propósito de ayudar a los alumnos a comprender la utilidad de la matemática dentro de su actividad profesional. Para ello propone que el punto de partida para el proceso de enseñanza aprendizaje sean problemas contextualizados, a través de la didáctica denominada *matemática en contexto* que se centra en el empleo de la modelación matemática.. Para el caso del aprendizaje de la derivada, el significado se construye a través de la noción de límite.

Con el enfoque hacia la modelación, se pretende la reducción intuitiva que implica la noción de límite, pues consideramos que no cumple con la condición requerida para

lograr aprendizajes significativos. Para ello nos alejamos del proceso histórico de la noción (Dunham, 2005; Grabiner, 2005) y pretendimos construir un significado a partir de los procesos de medición de la continuidad y de la introducción de otras nociones como el punto de cálculo, correspondiente al valor  $x$  con que se pretende obtener la derivada y su respectiva diferencia con del valor medio que proporciona la razón de cambio promedio. A partir de esta posición es posible identificar la derivada para el punto de cálculo a través de los *términos independientes del tamaño del intervalo (tiic)*, es decir,  $f'(x) = tiic \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$  sin recurrir a la noción de límite. Bajo este enfoque se pensó que sería posible lograr un significado más cercano a la realidad como modelo para mediciones instantáneas.

### **Metodología:**

Estrategia de investigación. El principal objetivo de nuestra investigación fue lograr una aproximación del proceso instruccional con la didáctica de la matemática en contexto y los significados del enfoque hacia la modelación para evaluar sus efectos en la comprensión de la derivada como modelo para y en el desarrollo de habilidades de modelación. Apoyados en Yin (2003) nos pareció más apropiado utilizar un estudio de casos como estrategia de investigación. No sólo porque se trata de un evento contemporáneo sobre el que no tenemos mucho control, sino por la complejidad del mismo.

Diseño de investigación. De manera general el diseño refiere a la secuencia lógica de las actividades que proveen evidencia para responder la pregunta de investigación, siguiendo a Yin (2003, p. 21): “1. preguntas del estudio; 2. sus proposiciones, si las hay; 3. su(s) unidad(es) de análisis; 4. la lógica de enlace entre datos y proposiciones; 5. el criterio

para interpretar los hallazgos.” Por razones de espacio, presentamos las proposiciones que guiaron el estudio:

1. La didáctica de la matemática en contexto con el enfoque hacia la modelación para el aprendizaje de la derivada favorece la comprensión relacional y la construcción de significados como modelo para.
2. Acerca la noción de derivada a la realidad cotidiana.
3. Favorece el desarrollo de las habilidades de modelación.

y las unidades de análisis:

1. Caso de la matemática en contexto: Grupo de cálculo diferencial del segundo semestre de ingeniería con clases de 8:00 a 8:50, utilizando la didáctica de la matemática en contexto con el enfoque hacia la modelación
2. Caso tradicional: Grupo de cálculo diferencial del segundo semestre de ingeniería con clases de 17:00 a 17:50, utilizando una didáctica tradicional expositiva.

### **Discusión de resultados:**

Actualmente la investigación se encuentra en la etapa del análisis e interpretación de los resultados. Con la información disponible es posible sugerir las siguientes conclusiones para cada proposición:

1. En cuanto a la comprensión relacional siguiendo el modelo teórico de Godino (2003) no apreciamos diferencias entre ambos casos, aunque hay una ligera tendencia en el caso de la matemática en contexto a otorgarle un significado como modelo para una razón instantánea, mientras que en el caso tradicional

hay una mayor tendencia hacia un significado geométrico, como la pendiente de la tangente a la curva.

2. En el caso de la matemática en contexto encontramos expresiones de ver la derivada en la realidad, cosa que no observamos en el caso tradicional.
3. Contrario a lo supuesto, en el caso tradicional observamos mayor desarrollo de habilidades de modelación, al estilo de una modelación tradicional, mientras que en el caso de la matemática en contexto la didáctica parece ser mas percibida como un procedimiento de solución.

Creemos que dos factores importantes influyeron en este resultado, en el caso de la matemática en contexto el evitar el uso de graficas para centrarse en el significado de razón de cambio instantánea, a la vez que sentimos que el grupo lo experimento como un material adicional a las concepciones de la derivada como límite.

### **Referencias básicas:**

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Pedro Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para l investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Iberoamérica.
- Berry, J. y Houston, K. (1995). *Mathematical Modelling*. Gran Bretaña: Edward Arnold.
- Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discusión Document. *Educational Studies in Mahtematics* 51, 149-171.
- Camarena, P. (1999). Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas en Ingeniería. Memoria del *Segundo Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, 950-954. IPN. México, D. F.
- Camarena, P. (2002). La matemática en el contexto de las ciencias y los modelos matemáticos. *Memoria del Tercer Congreso de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, 296-302. IPN. México, D. F.

- Camarena, P. (2004). La matemática en el contexto de las ciencias. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 17. Tomo I, 57-61.
- Cervantes, M. (1996). Un enfoque de modelos para matemáticas. Modelos Básicos. Manuscrito no publicado.
- Cervantes, M. (2003). El enfoque de modelos simbólicos como alternativa didáctica para la enseñanza de las matemáticas. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Baja California.
- Cervantes, M: y Arcos, J. (2005). *La comprensión de las operaciones matemáticas básicas con la didáctica de modelación simbólica*. Ponencia presentada en el VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Hermosillo, Son.
- Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton, New Jersey: Princeton University.
- Gil, G. (S.F). *El proyecto Internacional para la producción de indicadores de resultados educativos de los alumnos (proyecto PISA) de la OCDE*. Obtenido el 28 de septiembre 2004 en <http://ince.mec.es/pub/pisa.htm>.
- Grabiner, J. (2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. New York: Dover Publications.
- Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*. Vol 32, No. 6, 777-796.
- Houston, K. (2003). ICTMA: The first 20 years. En Lamon, S. J., Parker, W. y Houston, K. (Eds.). *Mathematical Modelling: A Way of Life. ICTMA 11*. pp. 255-267.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación Superior. (2003). *Los resultados de las pruebas PISA, elementos para su interpretación*. México: Autor.
- Lesh, R. (2003). How Mathematizing Reality is Different from Realizing Mathematics. En Lamon, S. J., Parker, W. y Houston, K. (Eds.). *Mathematical Modelling: A Way of Life. ICTMA 11*. pp. 37-52.
- Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, Modeling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*,5 (2&3), 157-189.
- Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 110. pp. 49-53.
- Vargas, R. (1998). *Reestructuración industrial, educación tecnológica y formación de ingenieros*. México: ANUIES

Yin, R. K. (2003). *Applied Social Research Methods Series Vol 34. Applications of Case Study Research (a. ed.)*. Thousand Oaks: Sage.