UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES ALGEBRAICAS DE 1ER. GRADO EN ALUMNOS CON PROBLEMAS DE APRENDIZAJE

RAÚL CASTELLANOS CRUZ

Es común que los alumnos al aprender álgebra elemental empleen sus conocimientos aritméticos, esto es útil en los problemas más sencillos. Sin embargo, para resolver los problemas de álgebra el sólo empleo del conocimiento aritmético no es suficiente pues se enfrentan a ecuaciones en las que hay letras y números que se suman, restan, multiplican o dividen pero que son muy diferentes a los algoritmos que ellos conocen, en los que se les plantea que tienen que encontrar el valor de las letras y hacer operaciones para ellos extrañas, escuchan frases como “si está sumando pasa restado” o “ si está dividiendo pasa multiplicando”, en suma situaciones que para los alumnos no tienen sentido.

Kieran (1997) indica que en los problemas de álgebra elemental, en los que se presenta una variable con un valor desconocido que se debe averiguar, las demandas conceptuales para los alumnos son: (a) entender cómo las letras son usadas para representar incógnitas, números y relaciones numéricas (b) traducir los problemas a ecuaciones en los que se represente la cantidad desconocida y los otros datos del problema y (c) resolver las ecuaciones. Estas demandas no son fácilmente cubiertas por los alumnos con problemas de aprendizaje.

Pizón y Gallardo (2000) señalan las siguientes dificultades al comprender:

Concatenación de términos algebraicos. La concatenación en aritmética denota adición, por ejemplo 45 significa 40 + 5; sin embargo en álgebra se refiere a la multiplicación, por ejemplo 5b es 5 x b, lo que los alumnos no ubican

Transformaciones entre números positivos y negativos en expresiones algebraicas. Operar con números negativos representa serias dificultades para los que se inician en el álgebra y es esencial para resolver ecuaciones. Los alumnos ignoran el signo y consideran los valores como enteros positivos

Conjunción de términos no semejantes. En álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias por ejemplo: $3 + 5x= 8x$.

Inversión incorrecta de operaciones. Los alumnos desconocen el procedimiento que lleva a la transposición de términos en una ecuación, además la realizan con una regla incorrecta.

Diferenciación de la incógnita respecto a su coeficiente. Decodifican a x como 1x, ante la expresión $x + x =$, el estudiante comete el error $x + x = x^2$.

Considerando la complejidad del álgebra y los errores que se suscitan durante su aprendizaje, se plantea el presente estudio con el objetivo de que alumnos con problema de aprendizaje aprendan a solucionar problemas algebraicos de una incógnita a partir del empleo de una estrategia de solución de problemas y de representaciones gráficas.

Método

Participaron 12 alumnos de un programa extra escolar de apoyo (Alcanzando el Éxito en Secundaria , PAES), seleccionados por las dificultades que presentaban en el aprendizaje del álgebra.

Se utilizó un diseño cuasi-experimental pretest- postest con grupo control. El grupo experimental (seis alumnos) participó en un taller de álgebra y el control (seis alumnos) continuó con sus actividades regulares en el PAES.

Procedimiento

En la pre-evaluación se evaluó el tipo de solución que los alumnos de los grupos emplearon para resolver 11 problemas de tipo algebraico con distinto grado de dificultad (ver en el anexo 1 los problemas). La evaluación se realizó de forma individual, sin límite de tiempo.

Se desarrollaron 10 sesiones de 50 minutos de duración. Los alumnos practicaron problemas correspondientes a diversas situaciones. Emplearon lápiz, papel y el tablero de fichas. En términos generales la intervención se conformo de tres fases.

En el taller los alumnos aprendieron una estrategia de solución de problemas y de la simbolización y solución con una ecuación. Para lo cual se empleó un tablero con fichas: es un rectángulo de 65 cm. por 41 cm. dividido en dos partes iguales, lado izquierdo, lado derecho, con un signo igual en medio. Las fichas utilizadas fueron de dos figuras: Triángulos y círculos. Los colores de las fichas son blancos y negros.

Los símbolos se representan de la siguiente manera:

△ Representa una incógnita con signo positivo

▲ Representa una incógnita con signo negativo

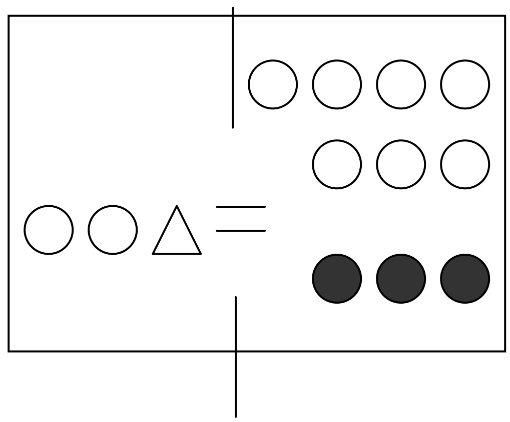
○ Representa la unidad con valor positivo

●

Representa la unidad con valor negativo.

Un ejemplo de cómo representar una ecuación por medio del tablero es el siguiente:

$2x = 7 - 3$



Las reglas del uso del tablero son:

1. Al pasar una ficha de un lado a otro de la ecuación cambia de color, lo que simula el cambio al signo que implica operación inversa.

2. En el caso de la multiplicación o división, el cambio a la operación inversa se representó señalando que cuando la literal y la incógnita están juntas, se indica una multiplicación y que se transforma en la operación inversa que es la división que se representó separando el dividendo y el divisor con una barra del mismo material que las fichas. Se hizo hincapié en la propiedad simétrica de los números explicando que a todo número pertenece un simétrico que al conjugar su operación da como resultado 0.

3. Dos fichas de la misma figura y diferente color, colocadas en el mismo lado, se anulan por lo que se convierten en cero.

Al inicio de las sesiones de intervención se entregaba a los participantes tres tarjetas (anexo 3) se nombraba un responsable de cada tarjeta, es decir uno de los participantes tenía la responsabilidad de supervisar el proceso antes (análisis y planificación), otro participante durante (ejecución y monitoreo) y el tercer participante era responsable de la tarjeta de después de solucionar el problema (evaluación de la solución), los roles eran intercambiados en cada sesión. Esta adaptación de la estrategia de enseñanza recíproca (Pallincsar y Brown, 1985) ayudaba a que los alumnos aprendieran la estrategia de forma graduada hasta llegar a ser autónomo. Con la intención de favorecer el proceso de autorregulación, desde la primera sesión se animó a los alumnos emplear las estrategias y a discutir cómo la empleaban y para qué les servía.

En las primeras sesiones había una mayor participación del tutor en quien recaía la responsabilidad y el control del manejo de la estrategia y del proceso de gestión general.

Con el avance de las sesiones y luego de cerciorarse del progreso de los participantes, se promovía intencionalmente que cada participante tomara el control y la responsabilidad del manejo de la estrategia.

En la post-evaluación los alumnos de ambos grupos resolvieron bajo las mismas circunstancias los mismos problemas presentados en la pre-evaluación.

Resultados

Un análisis con la prueba estadística U de Mann Whitney señala que en la pre-evaluación no existían diferencias entre el grupo experimental y control (p= 0.69) y que en la post-evaluación las diferencias fueron significativas (p= 0.002). Además, la prueba de Wilconxon indica que no existen diferencias significativas (p =1) entre la pre y post evaluación del grupo control, en contraste estas diferencias son significativas (p= .027) para el grupo experimental.

En la tabla 1 se presentan los resultado de la pre y post evaluación, se observa que los avances en el grupo control fueron mínimos, principalmente estos se notaron en la realización de los ejercicios de resolución de ecuaciones. En contraste, los alumnos del grupo experimental mostraron incrementos notables, logrando en la post evaluación un promedio de 7 problemas resueltos.

-- Insertar tabla 1 -------------------------

Para realizar el análisis cualitativo, se consideró que cada uno de los problemas evaluados demanda que el alumno ponga en juego el conocimiento necesario para identificar las relaciones entre conceptos y principios matemáticos y las representaciones simbólicas que son necesarias. Por lo que se adaptó la propuesta de Flores (2005) para identificar los niveles de conocimiento y de representación del problema. Estas categorías fueron:

1. *No canónico.* En esta solución, el alumno aplica su conocimiento de una clase de problema que no corresponde al que se le plantea.
2. *Representación no algorítmica.* En la solución generalmente se imita, mediante objetos o marcas gráficas, los elementos y las relaciones matemáticas contenidas en el problema.
3. *Representación aritmética.* Esta representación indica que el alumno puede emplear las herramientas de la matemática formal para solucionar el problema
4. *Representación aritmética error de cómputo.* El alumno entiende las relaciones planteadas en el problema y selecciona un algoritmo adecuado pero comete errores durante el proceso de solución.

5. *Representación algebraica correcta.* El alumno emplea una representación de las relaciones involucradas en el problema mediante una ecuación y calcula el valor de la incógnita de forma correcta.
6. *Representación algebraica error de cómputo.* El alumno emplea una representación de las relaciones involucradas en el problema mediante una ecuación pero comete errores durante el proceso de solución de la misma.
7. *No Solucionó.* El alumno no intenta una solución y deja sin resolver el problema.

En la tabla 2 se observan las diferencias en la solución que los alumnos del grupo experimental en la post evaluación. Es importante señalar que no todos los alumnos llegan a hacer una representación mediante una ecuación algebraica y que recurren a la solución aritmética

--Insertar Tabla 2---

Conclusiones

Vergnaud (1990) señala que las diferencias entre una solución algebraica y una aritmética son complejas pues la primera requiere una representación simbólica con letras de las relaciones expresadas en el problema para generar una ecuación y resolver la incógnita. Por esta razón consideramos que es muy importante que los alumnos cuenten con una forma de representación del problema (el tablero) que les permita tomar conciencia de las similitudes y diferencias entre ambas formas de solución.

Las **diferencias** en las soluciones del grupo experimental, evidencian que la comprensión de las demandas involucradas en una representación algebraica es un proceso evolutivo a largo plazo. En las soluciones de los diversos problemas, se lograron identificar las transiciones entre las representaciones, se observó entre la pre evaluación a la post evaluación, el paso de representaciones aritméticas a representaciones algebraicas, o de representaciones no canónicas a representaciones aritméticas.

Referencias.

Flores, M. R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática 17, 2, 7 -34*

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of algebra and function. En T. Nunes y P. Bryant (Eds..) *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (133 – 157). East Sussex UK: Psychology Press.

Pizón, M. y Gallardo, A. (2000). Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales. *Educación matemática*, 12(2), 81 – 96.

Pallincsar, A. S. y Brown, A. L. (1985). Reciprocal teaching of comprehension fostering and monitoring activities. *Cognition and Instruction*, 1, 117 – 175.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En J. Kilpatrick y P. Nesher (eds.) *Matheamtics and cognition* (pp 14 – 30). Cambridge: University Press.

Tabla 1: Resultados obtenidos por le grupo control y el grupo experimental (pre y post evaluación)

GRUPO	CONDICIÓN	n	CALIFICACIÓN MINIMA	CALIFICIÓN MÁXIMA	MEDIA	DESVIACIÓN ESTANDAR
CONTROL	PRE	6	0	2	.33	.81
	POST	6	0	2	1	1.09
EXPERIMENTAL	PRE	6	0	0	0	00
	POST	6	3	11	7.5	3.20

Tabla 2. Resultados obtenido por el grupo experimental (pre-post) (%)

Categoría / Problemas		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No Canónico	Pre										
	Post										
Canónico no Algorítmico	Pre										
	Post										
Canónico Aritmético Correcto	*Pre*	*16.66*		*66.66*	*66.66*		*66.66*	*50*	*50*		*33.33*
	Post			**16.66**			**16.66**		**16.66**		**16.66**
Canónico Aritmético error en el Computo	*Pre*	*83.33*	*100*	*33.33*	*33.33*	*33.33*	*33.33*	*50*	*50*		*66.66*
	Post		**16.66**								**16.66**
Canónico Algebraico Correcto	*Pre*										
	Post	**100**	**66.66**	**66.66**	**83.33**	**50**	**66.66**	**83.33**	**66.66**	**91.6**	**33.33**
Canónico Algebraico Error En el computo	*Pre*										
	Post		**16.66**		**16.66**	**16.66**		**16.66**	**16.66**	**8.4**	**33.33**
No solucionó	*Pre*					*66.66*				*100*	
	Post					**33.33**					

Anexo 1

Problemas.

1. MONEDAS.

Andrés tenía en su mochila 8 monedas del mismo valor, además, su hermano con motivo de su cumpleaños, le da $19. En total Andrés tiene ahora en su mochila $59. Ahora necesita saber el valor de las monedas que tenía al principio.

2. CONVIVIO.

Josué tiene $15 más que César y juntos tienen $48 para hacer un convivio. Necesitan saber cuánto aporta cada uno para dicho convivio.

3. EXCURSIÓN.

Jennifer y sus compañeros de la escuela realizaron una excursión al Ajusco que se encuentra a 37 Km. De la ciudad de México. Cuando habían recorrido 13 Km. el autobús se descompuso y planearon seguir a pie, pero necesitan calcular lo que tendrán que caminar.

4. BOLIGRAFOS

Sabiendo que todos los bolígrafos valen igual, calcula el precio de cada uno si por la compra de 3 azules, 10 rojos, y 7 negros pagas $60. Y calcula cuánto se gasta en los bolígrafos de cada color.

5. NÚMERO

Cinco veces un número menos su doble es igual a 42, ¿cuál es el número?

6. SUELDO

El sueldo fijo de Raúl es \$20 por semana además, él gana \$2 por cada hora de tiempo extra que trabaja. Esta semana trabajó 8 horas extra y quiere saber cuánto ganará para que no lo hagan "guaje".

7. CANARIOS

El papá de Carlos, que es aficionado a los pájaros, tenía en su casa 8 jaulas con canarios, en cada jaula había siete canarios. Pero a Carlos le daban pena y un día les abrió la puerta de la jaula para que vivieran libres, los canarios se escaparon y se fueron volando a un árbol cercano. El papá quiere seguir alimentándolos y necesita conocer los canarios que se fueron al árbol.

8. FLORES.

Por ser el cumpleaños de Mónica, sus tres amigas le regalaron un ramo con el mismo número de flores. Cristina le regalo un ramo de rosas, Rosy otro de claveles y Elizabeth uno de alcatraces. Con ellas Mónica formó un gran ramo de 36 flores, pero necesita saber la cantidad de flores da cada tipo que tenía su ramo.

9. AMIGOS

Para ir a Six Flags, siete amigos necesitan \$525 y acuerdan poner la misma cantidad de dinero, tú quieres ir con 6 amigos. ¿Cuánto pondrá cada quien para juntar la misma cantidad

10. $\mathbf{3x - 2x + 7 = 11}$

11. $\mathbf{2x - x = 3 + 4}$

Anexo 2. Componentes de la estrategia de solución de problemas.

PASOS DE LA ESTRATEGIA	ACCIONES	AUTOINSTRUCCIONES
ANÁLISIS Y PLANIFICACIÓN	1. LEER	LEO EL PROBLEMA
	2. EXPRESAR LO QUE SE COMPRENDIÓ DEL PROBLEMA	LO PLATICO
	3. IDENTIFICAR LA INTERROGANTE	DIGO LA PREGUNTA
	4. IDENTIFICAR LOS DATOS NUMÉRICOS QUE SE EMPLEARÁN EN LA SOLUCIÓN	BUSCO LOS DATOS
EJECUCIÓN Y MONITOREO DE LA SOLUCIÓN	5. MODELAR EL PROBLEMA EN EL TABLERO.	REPRESENTO LA ECUACION CON LAS FICHAS.
	6. SOLUCIONARLO	POR MEDIO DEL TABLERO BUSCO MI SOLUCIÓN.
	7. VINCULAR LA REPRESENTACIÓN DEL TABLERO CON LA ECUACIÓN ESCRITA	CON APOYO DEL TABLERO ESCRIBO MI ECUACIÓN.
	8. REALIZAR LA ECUACIÓN	ESCRIBO
		RESUELVO
EVALUACIÓN DE LA SOLUCIÓN	9. COMPROBAR LA ECUACIÓN.	COMPRUEBO MI OPERACIÓN
	10. COMPROBAR LA CORRESPONDENCIA ENTRE RESULTADO Y PREGUNTA	COMPRUEBO MI RESULTADO
	11. REDACTAR EL RESULTADO RELACIONÁNDOLO CON LA INTERROGANTE	ESCRIBO COMPLETA LA RESPUESTA