

LA VARIACIÓN Y SU RAZÓN DE CAMBIO: UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE SECUNDARIA

SIMÓN MOCHÓN COHEN, BONIFACIO PINZÓN TURIJ

La introducción y el marco teórico

Un tema en el que se ha prestado especial atención en educación matemática es la investigación en las representaciones. Como sugiere Duval (1993), la coordinación de registros en las diferentes representaciones es crucial para la comprensión del concepto relacionado y ésta por ningún medio es natural. Empotrado en esta conversión se encuentra el problema de congruencia. El problema general que nosotros estamos interesados en estudiar es el de “la congruencia” entre las representaciones gráfica y tabular. Desde que una tabla es inherentemente discreta y contiene, en la mayoría de los casos, sólo información parcial de una relación, y puede ser no equivalente con una representación gráfica, así de este modo podemos suponer que esto puede ser una fuente de dificultades de algunos de los estudiantes. Por ejemplo, si yo tengo una tabla de valores de una función, ¿Cual es la representación gráfica apropiada de esta relación? Un juego de puntos aislados, un gráfico escalonado, un poligonal, un liso encorvado (una línea curva) o ¿algo más? Realmente, a menos que un contexto real proporcione la información faltante a través de su significado (o se de una representación algebraica), no es posible contestar las preguntas anteriores.

Hay evidencias considerables de los estudiantes sobre las conceptualizaciones de las relaciones funcionales y sus dificultades en la interpretación de gráficos (por ejemplo: Dugdale, 1993; Kieran, 1993; Kaput, 1993; Chazan, 1994; Yerushalmy, 1994; Schwartz y Yerushalmy, 1995). Algunos de estos autores han estudiado la representación gráfica

dentro de la matematización de actividades y sugieren a ésta como un buen punto de partida para la instrucción. Enfocando en los aspectos cualitativos de gráficos, los estudiantes pueden describir situaciones bastante complicadas sin el uso de símbolos que después puede construirse a través del análisis de gráficos.

Otro aspecto importante de las matemáticas es el análisis de situaciones del mundo real a través de la construcción y exploración de modelos matemáticos (Mellar, et al; 1994). Dentro de esta actividad, la relación entre la variación de una cantidad contra el tiempo y su razón de cambio es de fundamental importancia. Los tratados de cálculo con las cantidades continuas, en los cuales la razón de cambio es instantánea y por consiguiente su comprensión requiere del concepto de límite. Sin embargo, estas ideas tienen un análogo “discreto” cual es más conveniente para los estudiantes jóvenes: la variación (la acumulación) de una cantidad discreta y de su cambio por la unidad de tiempo. Uno de los objetivos de esta investigación es indagar sobre las concepciones de los estudiantes de secundaria en las transformaciones de estas cantidades discretas.

El proyecto SimCalc, dirigido por el Dr. James Kaput en la Universidad de Massachusetts en Dartmouth, reúne ambos temas; la variación y su razón de cambio y un acercamiento gráfico, a través de un software educativo, el paquete llamado MathWorlds. Los elementos básicos de este software son los piecewise los gráficos lineales constantes y pedazo-sabios. Hay actualmente subsecuentemente, un proyecto nacional en México para incorporar esta tecnología en el aula, hay un especial interés en este estudio de inspeccionar a los estudiantes sobre las ideas de este tipo de funciones.

Metodología

Para los propósitos arriba expresados, como un primer paso, elaboramos un cuestionario con diez problemas. Algunas preguntas pidieron mostrar la variación de la razón de una

cantidad dando la cantidad en forma gráfica o numérica. Otras preguntas pidieron la misma cantidad dando sus datos de la razón (había también algunas preguntas complementarias sobre leer e interpretar los gráficos). Este cuestionario fue aplicado como un estudio piloto a dieciocho estudiantes de los diferentes grados de una escuela preparatoria. Entonces seleccionamos 5 problemas para un nuevo cuestionario (descrito en detalle en el apéndice) que se aplicó a treinta estudiantes (de quince y dieciséis años de edad) del último grado de secundaria en México, D. F. Después del análisis de las respuestas del cuestionario, se seleccionaron seis sujetos (en base a sus respuestas y el trabajo interesante) para una entrevista y sondeo con mayor profundidad sus respuestas.

El análisis del cuestionario se enfocó en explorar eso que los estudiantes mexicanos pueden hacer con el tipo de tareas descrito arriba, citado en Duval (1993) en el marco teórico sobre las ideas de representaciones. En particular nosotros mirábamos las dificultades que podrían tener ellos debido a la estructura interna de una representación dada y también a traducir de uno al otro. En las entrevistas nosotros estábamos interesados en observar cuánto más allá, podían contestar los estudiantes con la ayuda del entrevistador, desde una perspectiva vygotskiana.

Los resultados y conclusiones

El primer problema de la encuesta tenía el propósito de averiguar la actuación de los estudiantes ' (chechar los antecedentes) sobre algunas ideas básicas de cambio y graficación de datos, dados en forma tabular. En general, los estudiantes respondieron bien en las tres preguntas sobre el cambio en la temperatura (positivo, negativo y ceros). En el trazo de la gráfica, 16 estudiantes conectaron los puntos con una poligonal y ocho dejaron los puntos sin conectar (el resto, conectó sólo partes de los puntos). Esta diversidad es probablemente

debida al hecho de que en la representación de la tabla no contiene suficiente información para completar el gráfico correspondiente (representaciones no equivalentes).

El objetivo de problema dos, fue observar las respuestas de los estudiantes al transformar razones de datos en “totales” de una cantidad. Sus respuestas cayeron dentro de cuatro categorías:

- 1) ignora el valor inicial y toma sólo el cambio actual (10 estudiantes);
- 2) ignora el valor inicial pero agrega los cambios (6 estudiantes);
- 3) toma en cuenta el valor inicial pero agrega a este sólo el cambio actual (un estudiante) y
- 4) toma en cuenta el valor inicial y agrega a este los cambios (12 estudiantes).

Así, en la mayoría de los casos, los estudiantes no usaron la información completa dada, estas tareas básicas sugeridas no son naturales para estos estudiantes y tienen que ser aprendidas

En el problema tres nosotros quisimos averiguar cómo dibujan los estudiantes la razón (la velocidad) lineal simple de un gráfico de distancia-contra-tiempo. La mayoría de los estudiantes pudo encontrar las distancias viajadas en los diferentes intervalos, encuentran el valor de la velocidad y afirman que es constante (24 estudiantes fuera de los 30). Sin embargo, nosotros descubrimos una consistente dificultad de los estudiantes para dibujar la constante correspondiente en la gráfica de velocidad. La mayoría de ellos (25 estudiantes) dibuja para la velocidad el mismo el gráfico de posición lineal (cualquiera de los dos, punto por punto o una línea continua). Los otros cinco no dibujaron ningún gráfico. Esto muestra que ellos pueden hacer el la transformación a una tabla (discreto) pero no a un gráfico. Como en el problema uno, esta dificultad podría ser debida a una no-equivalencia de representaciones.

En el problema cuatro se usó un gráfico poligonal tomado de un libro de texto de matemáticas del nivel secundaria, el cual representa las ventas por año de una bebida en millones de pesos. Éste es un ejemplo de un datos discretos (las ventas promedio por año) representa una gráfica de forma continua (poligonal). Cuando se preguntó a los estudiantes que dieran las ventas totales de algún intervalo, ellos agregaron la razón de valores de maneras muy diferentes:

A) agregan los valores correctamente de cada año (11 estudiantes)

B) agregan los valores, pero omite uno de los puntos del intervalo extremo (3 estudiantes)

C) agregan sólo los valores de los puntos extremos (3 estudiantes)

D) no sólo agregan los valores de cada año, también inclusive los valores en medio de los años (4 estudiantes) y

E) toman sólo el valor del último punto (3 estudiantes). En este problema la representación gráfica dada “datos distractores” (desde que el gráfico tiene una reja cada medio año) que provoca las respuestas como en la opción (D). Este tipo de respuestas es probablemente debido al hecho que el gráfico poligonal no es el apropiado para la representación de estos datos discretos. Lo hace que tenga sentido durante año no-entero ¿los valores en el gráfico? Éste es un ejemplo de una forma gráfica engañosa (¿Por qué es un poligonal?)

El objetivo del problema cinco, era observar las respuestas de los estudiantes al extraer los cambios de una cantidad (el valor de una casa) dado en forma gráfica (aquí nosotros podemos hacer la misma pregunta como antes: ¿por qué es un poligonal? Aunque en este caso de totales no produzca las mismas confusiones). Aproximadamente el 70% de los estudiantes contestaron correctamente el valor pedido de los cambios. El resto sólo dio como respuesta una lectura de valor del gráfico. Parece que estos estudiantes confundieron los cambios con los valores totales (este error de “ignorancia al etiquetar los ejes, es

reportado frecuentemente en la literatura. Sin embargo, es probable profundizar sobre cómo los estudiantes conceptualizan estas relaciones funcionales).

En las entrevistas, dónde el entrevistador intentó investigar sobre las ideas de los estudiantes que lo lleven a algo nuevo, los estudiantes pudieron contestar muchas preguntas correctamente en las que encontraron dificultad en el cuestionario. Por ejemplo, ellos pudieron describir ahora el significado de secciones horizontales en los gráficos. Ellos también fueron capaces de obtener los cambios de secciones de funciones lineales, o decir en qué sección había una tasa de crecimiento más rápida. Incluso dos de los estudiantes, que no podían dibujar antes gráfica de velocidad de la gráfica de posición lineal, con la dirección del entrevistador, fueron capaces de dibujar una línea horizontal. Esto muestra la importancia de la interacción con un “par especialista” para crear la zona de desarrollo próximo (ZDP).

Este trabajo describe cómo los estudiantes transforman la variación de una cantidad en razones y apoyados en diferentes representaciones. Nosotros descubrimos la incongruencia entre representaciones de tabla y de gráfica que eran las fuentes de dificultades de los estudiantes y tiene que ser estudiado más profundamente.

Referencias bibliográficas

- Chazan, D. (1994). Esbozando los gráficos de un independiente y una persona a cargo de la cantidad. Los procedimientos de la Decimotava Reunión del PME, Lisboa, Portugal.
- Dugdale, S. (1993), Funciones y gráficos-las perspectivas en el estudiante pensar, en T. A. Romberg, E. Fennema y T. P. Carpintero (Eds.) Integrando investigación en la representación gráfica de funciones, 101-130, El Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.
- Duval, R. (1993). Registros de la representación semiotique et fonctionnement el cognitif del pensee del la. Annales del et de Didactique de Sciences Cognitivies, 5, 37-65, Estrasburgo.
- Kaput, J. (1993). La Necesidad Urgente para Proleptic Research en La representación de Relaciones Cuantitativas, en T. A. Romberg, E. Fennema y T. P. Carpintero (Eds.)

Integrando la investigación delante de la representación gráfica de funciones, 279-312, Lawrence Erlbaum, Los socios, Hillsdale, New Jersey.

Kieran, C. (1993). Las funciones, graphing y tecnología: La investigación integrando n aprender e instrucción, en T. A. Romberg, E. Fennema y T. P., arpintero (Eds.). Integrando a investigación en la representación gráfica e funciones, 189-237, el Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, Nuevo, Jersey.

Mellar, H. y Beatitud, J. (1994) el Modelado y educación, en Mellar, la Beatitud, Boohan, Ogborn y Tompssett (Eds.) Aprendiendo con Mundos Artificiales. Londres y Washington: La Prensa de Falmer.

Schwartz, J. L. y Yerushalmy, M. (1995). En la Necesidad por Pontear El idioma por el Planear Matemático. Para el Aprendizaje de Matemática, 15, 2.

Yerushalmy, M. (1994). Mathematizing las Situaciones Cuantitativas Cualitativamente: Una Oportunidad para Plan de estudios que Reestructura la Tecnología El Grupo del enfoque, PME-NA, el Colorete del Bastón, Louisiana.

Cuestionario

PROBLEMA 1

Una enfermera lleva el control de la temperatura de un paciente y registra los resultados en la siguiente tabla.

HORAS	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00
TEMPERATURA	36	37	38	39	39.5	40	40	40	38

- 1.- ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 15: 00 y las 16:00 horas?_____
- 2.- ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 20:00 y las 21:00 horas?_____
- 3.- ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 22:00 y las 23:00 horas?_____
- 4.- De la gráfica describe la temperatura entre las 20 y las 22 horas. _____

PROBLEMA 2

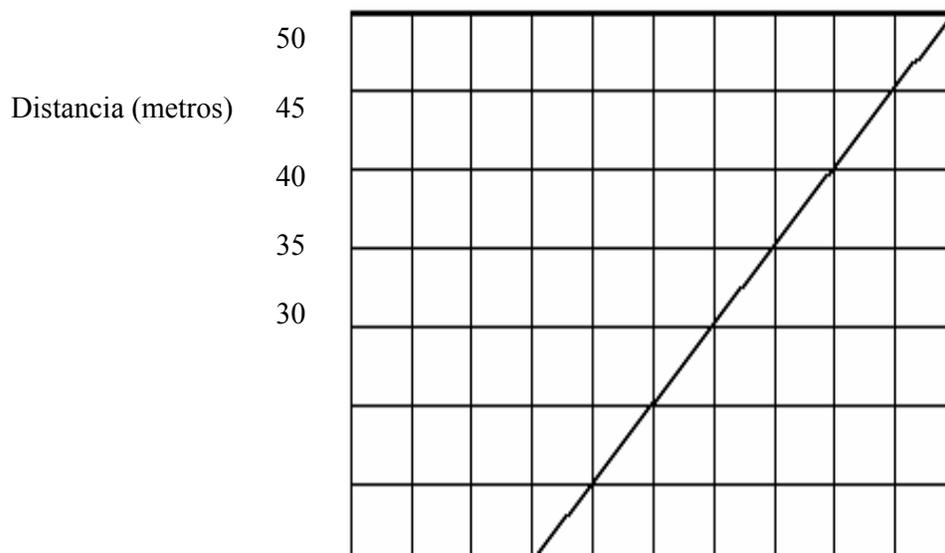
En un invernadero se registra el aumento en la altura de dos plantas (A y B) cada semana. Este registro se inicia cuando las dos plantas tenían una altura de 20 cm. La tabla siguiente muestra estos aumentos.

TIEMPO(semanas)	AUMENTO EN LA ALTURA (cm)	
	Planta A	Planta B
Primera	3	5
Segunda	3	4
Tercera	3	3
Cuarta	3	2

- 1.- ¿Cuál es la altura de la planta A después de una semana? _____
- 2.- ¿Cuál es la altura de la planta B después de una semana? _____
- 3.- ¿Cuál es la altura de la planta A después de dos semanas? _____
4. ¿Cuál es la altura de la planta B después de tres semanas? _____

PROBLEMA 3

A continuación se presenta una gráfica de distancia contra el tiempo, en la cual se muestra la distancia recorrida por un corredor.



25
20
15
10
5
0

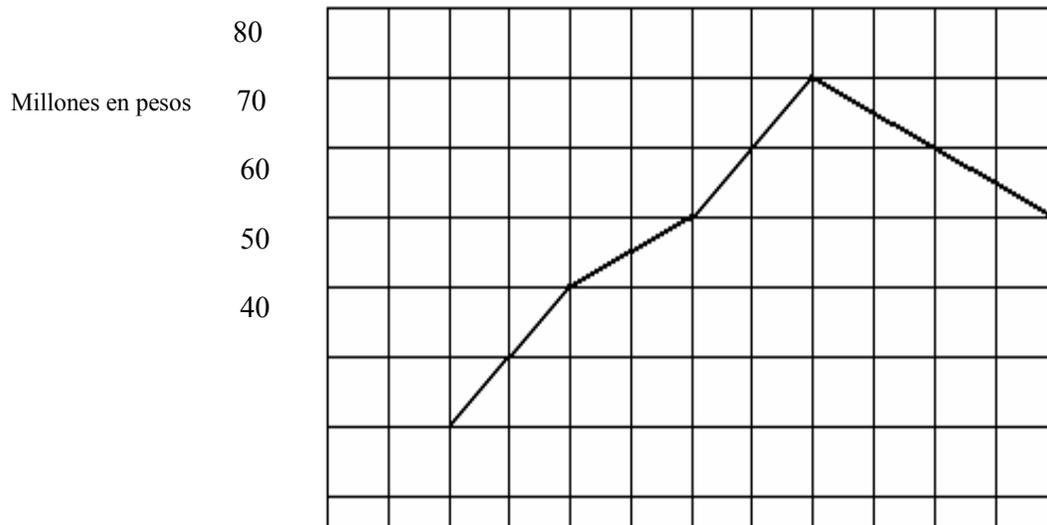
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Tiempo (segundos)

- 1.- ¿Qué distancia recorrió en seis segundos? _____
- 2.- ¿Qué distancia recorrió del segundo seis al segundo nueve? _____
- 3.- ¿Cuántos metros recorrió por cada segundo transcurrido? _____
- 4.- ¿Cuál es la velocidad del corredor? _____
- 5.- ¿Es constante esta velocidad o varía durante el recorrido? _____

PROBLEMA 4

La gráfica siguiente representa las ventas por año, de un refresco en millones de pesos.



30
20
10

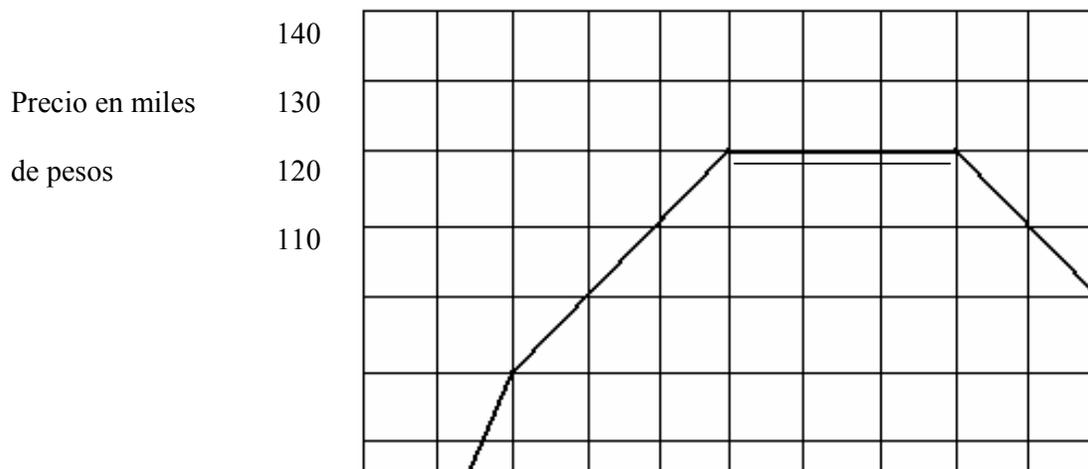
1990 1991 1992 1993 1994 1995

Años

- 1.- ¿Cuánto vendieron en el año de 1992? _____
- 2.- ¿En qué año vendieron lo máximo en millones de pesos? _____
 - a) ¿Cuánto fue? _____
- 3.- ¿En qué año vendieron lo mínimo en millones de pesos? _____
 - a) ¿Cuánto fue? _____
- 4.- ¿Cuántos millones de pesos vendieron en total de 1990 a 1992? _____
- 5.- ¿Cuántos millones de pesos vendieron en total de 1990 hasta 1995? _____

PROBLEMA 5

La siguiente gráfica muestra el valor de una casa registrado cada año, este registro fue hecho en un periodo de 10 años.



100

90

80

70

60

50

40

1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988 1989 1990

(Años)

1.- ¿En cuánto aumentó el valor de la casa del año de 1980 a 1982? _____

2.- ¿En cuánto aumentó el valor de la casa del año de 1980 a 1985? _____

3.- Explica que pasó con el valor de la casa del año de 1985 a 1988. _____

4.- Explica que pasó con el valor de la casa del año de 1988 a 1990. _____

5.- De la gráfica puedes decir ¿En qué años el costo de la casa aumento más rápido? _____