

UN REGISTRO DE REPRESENTACION SEMIOTICA DE NATURALEZA GEOMÉTRICA PARA LA TRIGONOMETRIA

OSCAR JESÚS SAN MARTÍN SICRE

Resumen

Este trabajo constituye un reporte parcial de investigación que contiene una recopilación de varios resultados del desarrollo de un registro de representación semiótica de Duval para la trigonometría elemental. En sus investigaciones sobre los registros de representación semiótica Raymond Duval señala que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas y que pocos estudios se centran en la operación de cambiar la forma semiótica a través de la cual un conocimiento es representado. Consecuentemente los esfuerzos sistemáticos que se desarrollen con el propósito de construir una nueva forma semiótica para un registro de representación dado pueden constituir una manera formalmente válida de realizar una investigación asociada a la perspectiva de la escuela de Duval. El trabajo que aquí se presenta muestra una metodología que de manera central se ocupa de cambiar la forma semiótica en que (tradicionalmente) son presentados los contenidos trigonométricos. Como un resultado colateral de esta transformación de la forma semiótica de representación se logra además la visualización de algunos contenidos trigonométricos en forma geométrica, por ejemplo las razones, las identidades y las ecuaciones trigonométricas, algunos de los trabajos de Duval se ocupan de la correspondencia entre la visualización y diversas formas de representación semiótica de objetos matemáticos. En el trabajo aquí expuesto se muestra que este registro de representación semiótica para la trigonometría elemental satisface y permite las tres actividades cognoscitivas fundamentales que postula Duval, a saber: formación tratamiento y conversión de representaciones.

Palabras clave: registro, representación, semiótica, visualización, trigonometría.

EL CONTEXTO TEORICO: LAS INVESTIGACIONES DE R. DUVAL

Inicialmente se considera pertinente establecer que los antecedentes teóricos fundamentales para la tarea investigativa de Duval pueden recuperarse de los trabajos de Jean Piaget y de Lev .S. Vygotsky, y en particular de las obras “La formation du symbole chez l’ enfant” del primero y “Thought and Language” del segundo.

Una vez establecido lo anterior, el trabajo investigativo de Duval puede describirse muy brevemente como sigue :

Las ideas fundamentales a partir de las que desarrolla su obra son las siguientes:

- Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente se hace necesario tener representaciones de los mismos. Como lo señala el mismo Duval: “... el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (botánica, geología, astronomía, física), no existen otras maneras de ganar acceso a los objetos matemáticos sino producir algunas representaciones semióticas”
- Aunque pudiera parecer obvio, debe enfatizarse que no debe confundirse al objeto matemático con su representación.

- Debe distinguirse entre: imagen mental (perceptos interiorizados); representación semiótica (representación constituida mediante el empleo de signos) y representación mental (interiorización de una representación semiótica)
- Las representaciones semióticas cumplen diversas funciones: expresión (para otros), objetivación o identificación de un objeto de la realidad (para si mismo) y tratamiento o “movilización” de la representación semiótica de conformidad con ciertas reglas
- El conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas
- Pocos estudios se centran en la operación de cambiar la forma semiótica a través de la cual un conocimiento es representado. (El estudio que aquí se presenta intenta precisamente eso)
- El cambio de forma semiótica de representación constituye una operación cognitiva básica
- El fenómeno de la representación se refiere y abarca a la comunicación, al funcionamiento cognitivo del pensamiento y a la comprensión.
- Las representaciones semióticas muestran y utilizan registros diferentes

En su trabajo Duval se ocupa y establece la importancia fundamental de cuestiones tales como las siguientes:

- la habilidad para cambiar de registro de representación semiótica. La misma resulta necesaria para el aprendizaje de las matemáticas
- La importancia de la coordinación de diversos registros de representación semiótica. Establece que muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación.
- El considerar al conocimiento conceptual (la comprensión) como el invariante de múltiples representaciones semióticas
- En base a diferentes registros de representación, definir variables independientes específicas para contenidos cognitivos y organizar propuestas didácticas para desarrollar la coordinación de registros de representación.

SEMIOSIS Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIOTICA

Duval denomina “semiosis” a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica y postula que para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir las tres actividades cognoscitivas fundamentales ligadas a la semiosis: a saber:

- 1) **Formación de una representación identificable como una representación** de un registro dado

- 2) **Tratamiento de la representación** esto es, la transformación de la representación realizada en el mismo registro en que ha sido formulada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

- 3) **Conversión de la representación** es la transformación de la representación en una representación de otro registro, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

La conversión es una transformación externa a un registro. La conversión no debe ser confundida con la codificación que sería una especie de representación “puntual” que no tendría en cuenta al contenido representado.

UN REGISTRO DE REPRESENTACION SEMIOTICA DE DUVAL PARA ALGUNOS CONTENIDOS TRIGONOMETRICOS

En el trabajo de investigación aquí expuesto se muestra que un nuevo registro para algunos contenidos trigonométricos de la educación media básica y media superior, desarrollado a partir de 1990 por el autor, constituyen un registro de representación semiótica ya que satisface o permite las tres operaciones cognoscitiva básicas ligadas a la semiosis, a saber:

- 1) Constituye una representación de un registro dado

- 2) Esta representación tiene asociada una transformación interna, esto es un tratamiento al interior del mismo registro donde ha sido formulada
- 3) Existen conversiones o transformaciones exteriores al registro original, entre la representación y las representaciones usuales de la Trigonometría tradicional.

1) LA REPRESENTACIÓN

El registro de representación semiótica para los contenidos de la trigonometría elemental que aquí se presenta está basado en definir las razones trigonométricas elementales en un triángulo rectángulo inscrito en un semicírculo de diámetro unitario y a partir del mismo se ha constituido una figura que ha sido construida en la forma siguiente:

- 1) Se dibuja un semicírculo de diámetro AB unitario
- 2) Se inscribe un triángulo rectángulo arbitrario ABC en el semicírculo anterior
- 3) Se levantan dos rectas perpendiculares a AB a través de los extremos del diámetro del semicírculo
- 4) Se prolonga el segmento AC hasta que intersecte en el punto D a una de las perpendiculares a AB
- 5) Se prolonga el segmento BC hasta que intersecte en el punto E a la otra perpendicular.

6) En la figura anterior denominaremos “ángulo X” al ángulo BAC

Puede probarse fácilmente que la figura así construida determina 5 triángulos rectángulos que son todos semejantes entre sí, y también puede demostrarse fácilmente que en dicha construcción:

$$BC = \text{sen } X$$

$$AC = \text{cos } X$$

$$BD = \text{tan } X$$

$$AE = \text{cot } X$$

$$BE = \text{csc } X$$

$$AC = \text{sec } X$$

Puede constatarse fácilmente que este registro de representación semiótica es diferente a los tradicionalmente utilizados en la didáctica de la trigonometría y permite visualizar fácilmente las razones trigonométricas y desarrollar recursos de carácter mnémico para la memorización de algunos resultados: por ejemplo el seno y la tangente se encuentran “enfrentados” al coseno y a la cotangente; el “segmento seno” prolongado adecuadamente es el “segmento cosecante”; el “segmento coseno” prolongado adecuadamente es el “segmento secante”.

El registro de representación semiótica que tradicionalmente se ha utilizado para la trigonometría elemental en la escuela secundaria (le llamaremos “registro 1”) define las mismas razones en triángulos rectángulos aislados o discretos. Esta representación facilita

el tratamiento de problemas donde se enfatizan los significados de estas nociones como razones entre longitudes.

El registro de representación semiótica que tradicionalmente se ha utilizado para la trigonometría elemental en la escuela preparatoria (las funciones en un círculo trigonométrico de radio unitario) define las mismas funciones en términos de los triángulos que resultan al considerar las coordenadas de un punto que se mueve de manera continua (le llamaremos “registro 2”). Consecuentemente puede pensarse que esta representación facilita el tratamiento de problemas donde se enfaticen los significados de estas nociones como funciones, esto es por ejemplo, la continuidad y la periodicidad.

Puede constatarse que el registro de representación semiótica que aquí se plantea (le llamaremos “registro 2”) combina las “propiedades” de ambos tipos de representación y establece por tanto conexiones entre los significados de las nociones trigonométricas como razones o como funciones.

Con respecto a lo anterior puede agregarse que aunque al parecer no existe diferencia aparente significativa entre ambos tipos de registros de representación semiótica, aquí se piensa que una diferencia tan aparentemente sutil como la indicada, conduce sin embargo a que la comprensión del invariante matemático tras ambos tipos de registros, a saber, las nociones de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc. se facilite, si se conocen más tipos de registros de representación semiótica.

2) EL TRATAMIENTO

Las transformaciones al interior del mismo registro de representación permiten realizar un novedoso tratamiento alternativo para algunos contenidos de la trigonometría tradicional, a la fecha se han diseñado “tratamientos” para las siguientes nociones:

- La representación de las funciones trigonométricas como segmentos (5,6,7,12 en la bibliografía)
- La equivalencia lógica entre proposiciones lógicas de tipo trigonométrico y proposiciones lógicas de tipo geométrico.(6,7 en la bibliografía)
- La visualización de objetos trigonométricos (5,6,7,10,12 en la bibliografía)
- El estudio de la variación de los valores de las funciones trigonométricas a medida que cambia la magnitud del ángulo x (5,6,7,10,12 en la bibliografía)
- El cálculo de valores de funciones de ángulos de 30, 45 y 60 se facilita y sistematiza, no requerirá de la invención de triángulos especiales, una misma figura podrá ser utilizada para el calculo de todos ellos (5,6,7,12 en la bibliografía)
- Posibilita la visualización de los valores asociados a otros ángulos tales como los de cero y noventa grados. Lo anterior no puede hacerse en el registro de representación semiótica que tradicionalmente se ha utilizado. (5,6,7,10,12 en la bibliografía)

- La continuidad de las funciones trigonométricas para ángulos menores de 90 grados (10,12 en la bibliografía)
- Las razones trigonométricas como funciones de un ángulo X (5,6,7,10,12 en la bibliografía).
- Las razones trigonométricas como funciones de valor y variable reales, esto es, la figura permite visualizar que a la longitud de un cierto arco expresada en números reales, le corresponde la longitud de un segmento expresado también en números reales.(10,12 en la bibliografía).
- La representación de las identidades trigonométricas como relaciones (invariantes) entre segmentos. (8 en la bibliografía)
- Maneras geométricas de construir identidades trigonométricas (8 en la bibliografía)
- Representación de ecuaciones trigonométricas como comparación entre longitudes de segmentos de longitud variable. (9 en la bibliografía)

Resulta conveniente el mencionar aquí, que la figura básica que origina la formación del nuevo registro de representación semiótica aquí propuesto es fácilmente construible con los softwares de geometría dinámica por ejemplo con los denominados “Geometer’s sketch pad” o “Cabri- Geometre II”, en particular la figura elemental básica elemental se utilizó

para el diseño de un aparato virtual que se presentó en algunos Congresos de investigación educativa.

3) LA CONVERSION

La conversión entre los tipos de registros es de carácter elemental, únicamente ejemplificamos lo que debe hacerse para pasar del registro 1 al registro 3.

Sea un triángulo rectángulo de catetos a , b e hipotenusa c en el registro 1.

- 1) Multiplíquense las tres longitudes a , b , c por $1/c$ esto generará un triángulo rectángulo semejante al primero con longitudes a/c , b/c , 1
- 2) Inscríbase el nuevo triángulo en un círculo. Si se considera sólo al semicírculo, esto completa el paso del registro 1 al registro 3. La representación converso, el paso del registro 3 al 1 es trivial.

Resulta fácil verificar que varios otros de los resultados obtenidos con el tratamiento al interior del registro aquí provisto tienen una correspondiente conversión en los registros de representación correspondientes a la trigonometría tradicional, debe señalarse sin embargo que en algunos casos la conversión no resulta inmediata.

COMPARACIÓN DE ALGUNAS SITUACIONES EN AMBOS REGISTROS

Para sistematizar y simplificar en alguna manera el estudio de las diferencias y posibilidades de conversión entre ambos tipos de registros de representación semiótica, se hacen a continuación, breves comparaciones esquemáticas entre los registros 1,2 y 3.

Sin embargo también resulta necesario señalar que algunos resultados provistos por el tratamiento al interior del nuevo registro no tienen una correspondiente conversión al interior de los registros de la trigonometría tradicional, por ejemplo, aquellos donde se muestra el carácter funcional asociado a las razones trigonométricas. Esto ya ha sido señalado en la teoría correspondiente.

Entonces, como ya se dijo, se da el caso de que cada registro enfatiza mas adecuadamente alguna propiedad o significado de la noción en cuestión, así el registro 1 enfatiza el significado de razón entre magnitudes de segmentos y el registro 3 combina los significados de los registros 1 y 2.

Con respecto a la “gradación curricular de los contenidos escolares” puede establecerse que en los registros correspondientes a la trigonometría tradicional en secundaria, las razones como segmentos usualmente (salvo casos particulares especiales) no aparecen, y solo surgen cuando se generalizan las definiciones básicas a ángulos de cualquier magnitud utilizando para ello un círculo de radio unitario y las representaciones de puntos por sus coordenadas cartesianas. o rectangulares.

En el registro de representación semiótica que proponemos las razones como segmentos pueden estudiarse desde secundaria y no requieren de representaciones de puntos por sus coordenadas Cartesianas.

Otro caso similar se tiene cuando se aborda la representación analítica o Cartesiana de las ecuaciones trigonométricas que suele ser una cuestión abstracta y difícil.

El registro aquí presentado resulta auto- contenido o suficiente en el sentido de que no se necesita mayor grado de “avance curricular” para introducir las nociones antes mencionadas.

El registro 1 de representación semiótica tradicional sólo admite la representación funcional analítica cuando se expresa en términos de las coordenadas de un punto que gira en un círculo, esto es, en el registro 2.

Dado que el registro 3 enfatiza el enfoque geométrico, permite asimismo que el tratamiento asociado a la Trigonometría admita nuevas demostraciones con tal carácter. Permite asimismo nuevas conceptualizaciones para algunos objetos trigonométricos, por ejemplo, las identidades trigonométricas pueden visualizarse como los “invariantes” de una cierta “teselación móvil” con respecto a la variación del ángulo que hemos denominado X .

La “teselación móvil” a que aquí se alude puede construirse por ejemplo con Cabri II prolongando la figura aquí propuesta y agregando los nuevos triángulos rectángulos que van surgiendo hasta llenar el plano.

Finalmente y considerando que los propósitos centrales de este escrito se han conseguido ya que consistían en::

- a) Indicar el camino hacia otra línea de investigación que puede seguirse a partir de este trabajo, y,
- b) b) demostrar que el registro trigonométrico aquí presentado constituye un registro de representación semiótica de Duval, ya que satisface las operaciones cognitivas básicas que se han postulado para tales registros,

Entonces no se ha considerado pertinente el profundizar en los resultados señalados en los párrafos precedentes que serán objeto de estudio posterior.

Bibliografía

- 1) PROCEEDINGS OF THE TWENTY FIRST ANNUAL MEETING.(1999). Psychology of Mathematics Education. Vols I and II. CINVESTAV IPN and UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MORELOS. ERIC EDITORS..
- 4) PARRA, C. e Irma Saiz (comps) (1994). **Didáctica de matemáticas**. Argentina. Editorial Paidós.
- 5) SAN MARTIN, O. (1990). **Transportador Trigonométrico Cuadrático**. Acapulco, México. Memorias de la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe...
- 6) SAN MARTIN, O. (1992). **Sobre la definición de función trigonométrica de un ángulo agudo**. Cuernavaca, México. Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe

- 7) SAN MARTIN, O. (1993), **Elementos para un enfoque didáctico activo de la Trigonometría Elemental**. Panamá, República de Panamá. Memorias de la VII Reunión Centroamericana y del Caribe ...
- 8) SAN MARTIN, O.. (1998). **Construcción y clasificación de identidades trigonométricas utilizando recursos y criterios de tipo geométrico**. Santa Fé de Bogotá, Colombia. Resúmenes de la XII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa
- 9) SAN MARTIN, O. (1999). **Representación geométrica de ecuaciones trigonométricas**. Santo Domingo, República Dominicana. Resúmenes de la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.
- 10) SAN MARTIN, O. y SOTO J.L (2001). **Elementos para la construcción de significados para las razones trigonométricas utilizando Cabri**. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Michoacán, México. Memorias de la Conferencia Internacional sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las matemáticas.
- 11) SANCHEZ, E. y Gonzalo Zubieta (comps.) (1993). **Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela Francesa**. México. CINVESTAV – IPN, Departamento de matemática educativa.
- 12) SAN MARTIN, O. (2006). **Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón**. Hermosillo, Sonora, México. Memoria (electrónica) de VIII Congreso Nacional de Investigación Educativa.