

EPISODIOS DE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ, DIANA ITZEL SEPÚLVEDA JÁUREGUI

Introducción.

Propuestas recientes del currículum matemático (NCTM, 2000; Schoen, 2004) sugieren organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas alrededor de la resolución de problemas. En ellas se reconoce que las experiencias de los estudiantes se enriquecen cuando trabajan con problemas atractivos, planteados en contextos reales, donde tienen oportunidad de aplicar y extender las relaciones básicas de las matemáticas. Además se recomienda implementar una forma de trabajo en el aula que combine el trabajo colectivo, en pequeños grupos y el individual, donde los estudiantes puedan presentar y defender sus ideas y fortalecer sus habilidades en la resolución de problemas.

En este estudio nos interesa documentar estrategias, representaciones y recursos que usan los estudiantes cuando se enfrentan a un conjunto de problemas que sean fáciles de entender y contengan contenidos importantes del currículum escolar. Algunas preguntas que guían el desarrollo del estudio son: ¿Qué formas de comprensión y métodos de solución aparecen durante los procesos de resolución de problemas? ¿Qué significa que los estudiantes aprendan matemáticas? ¿Cuál es el papel del profesor durante la implementación de las tareas?

Marco teórico. El aprendizaje de las matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas (Schoenfeld, 1998), donde los estudiantes tienen oportunidad de practicar formas de pensar que son consistentes con el quehacer de la disciplina, las cuales han sido identificadas mediante las estrategias esenciales que un matemático realiza cuando se encuentra resolviendo problemas. Durante este proceso,

se involucra cierta disposición de los estudiantes para explorar e investigar relaciones matemáticas, emplear distintas representaciones al analizar fenómenos particulares, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados (NCTM, 2000). Esta disposición permite mejorar sus acercamientos iniciales, ya que los estudiantes exhiben ciclos de entendimiento en las distintas fases de resolución de los problemas (Lesh, *et al.*, 2000), que les permite refinar constantemente sus modelos de solución y avanzar en su comprensión matemática.

Por su parte, el grupo Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (1999; 2000) propone la utilización de tareas (o problemas) en la enseñanza, como un medio para promover un aprendizaje que vaya más allá de la memorización de reglas y procedimientos; destacando el empleo de una instrucción que combine el trabajo colectivo e individual. Para su diseño se considera: las tareas deben ser fáciles de entender y atractivas para los estudiantes de manera que, al tener contacto con ellas, expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión y el intercambio de experiencias; deben incluir contenidos fundamentales del currículum; y por su estructura, debe ser posible recuperar los procesos de pensamiento utilizados en los intentos de solución.

Metodología. Las tareas fueron seleccionadas de los paquetes de evaluación balanceada y aplicadas a 24 estudiantes de bachillerato de la Universidad Michoacana, quienes participaron en un curso semestral donde se promovió la resolución de problemas y se practicó una forma de instrucción que contempla varias etapas (Sepúlveda y Santos, 2004): *Actividad previa*. El profesor da una introducción con el propósito de ubicar a los estudiantes en el contexto de la tarea; *Trabajo en equipos*. Durante cierto periodo los estudiantes atacan la tarea en pequeños grupos de tres, al término del cual los equipos entregan su reporte de solución; *Presentaciones*. Cada uno de los equipos presenta su solución ante la clase completa, permitiéndose críticas y opiniones de los demás; *Discusión colectiva*. El profesor promueve la

discusión colectiva, con base en las presentaciones de los equipos, para llegar, si es posible, a una solución sistematizada; y *Trabajo individual*. Los estudiantes vuelven a abordar la tarea, en forma individual, e incorporan reflexiones y puntos de vista dados durante la discusión colectiva.

Con el propósito de mostrar el tipo de resultados y análisis a que conduce la implementación de estas tareas, aquí se presenta **Ordenar un taxi**, que implica la toma de decisiones con base en la comparación de dos conjuntos de datos; se pretende evaluar y promover el aprendizaje de las nociones básicas de la estadística.

Sara quiere comparar a dos compañías de taxi rivales: Taxis Amarillos y Taxis Azules, con base en su puntualidad, y decidir cuál de las dos es mejor. Para ello, solicitó en 20 ocasiones el servicio a cada una de las compañías para ir a su trabajo y registró los tiempos de llegada, antes o después de la hora citada (Tabla 1).

Se sugiere a los estudiantes que usen gráficas y realicen cálculos para responder las preguntas:

Tabla 1. Tiempos registrados por Sara en Ordenar un taxi

	Taxis Amarillos		Taxis Azules	
1. Con base en los registros de los tiempos de llegada, temprano o tarde, decide qué compañía de taxis es mejor.	3 min 30 seg	temprano	3 min 45 seg	tarde
	45 seg	tarde	4 min 30 seg	tarde
2. Escribe un argumento en el que Taxis Amarillos es la mejor compañía.	1 min 30 seg	tarde	3 min	tarde
	4 min 30 seg	tarde	5 min	tarde
3. Escribe un argumento en el que Taxis Azules es la mejor compañía.	45 seg	temprano	2 min 15 seg	tarde
	2 min 30 seg	temprano	2 min 30 seg	tarde
4. ¿Cuál de los dos argumentos que escribiste es más convincente? ¿Por qué?	4 min 45 seg	tarde	1 min 15 seg	tarde
	2 min 45 seg	tarde	45 seg	tarde
	30 seg	tarde	3 min	tarde
	1 min 30 seg	temprano	30 seg	temprano
	2 min 15 seg	tarde	1 min 30 seg	tarde
	9 min 15 seg	tarde	3 min 30 seg	tarde
	3 min 30 seg	tarde	6 min	tarde
	1 min 15 seg	tarde	4 min 30 seg	tarde
	30 seg	temprano	5 min 30 seg	tarde
	2 min 30 seg	tarde	2 min 30 seg	tarde
	30 seg	tarde	4 min 15 seg	tarde
	7 min 15 seg	tarde	3 min 45 seg	tarde
	5 min 30 seg	tarde	3 min 45 seg	tarde
	3 min	tarde	4 min 45 seg	tarde

Los reportes escritos de los pequeños grupos muestran acercamientos distintos:

I) El equipo A utilizó diagramas de barras para representar los datos (Figura 1); llamó T_1 al número de veces que llegaron temprano los taxis de cada compañía y T_2 el número de veces que llegaron tarde, y con base en la frecuencia respondió cuál es mejor.

II) H utilizó dos histogramas con la variable tiempo en el eje de las x , y la frecuencia en el eje y ; Taxis Amarillos hacia arriba del eje x , y Taxis Azules hacia abajo. Calculó medias y medianas para cada compañía; expresó argumentos que involucran la frecuencia.

III) Los equipos B, C, D, E, y F hicieron uso de histogramas no usuales (Figura 2), colocando el número de registro o de taxi en el eje x , y en el eje y el tiempo de llegada, temprano o tarde; calcularon los promedios de llegada para cada compañía. B, D y F basaron su decisión en la media, figurando la frecuencia en sus argumentos; C consideró los rangos y medianas, mientras que E se basó en los rangos y promedios de ambas compañías.

IV) G utilizó polígonos de frecuencias superpuestos, colocando en el eje x el número de registro y en el eje y el tiempo, sin tomar en cuenta tiempos negativos; calculó promedios y así, tomó su decisión.

Siete equipos concluyeron que Taxis Amarillos era la mejor compañía; cinco de ellos coincidieron en dar como argumento (Figura 2) “esos taxis hacen que Sara llegue más temprano y eso es lo que se busca”. El equipo E fue el único en afirmar que Taxis Azules es mejor “porque no llega ni muy temprano ni muy tarde. Si se pide a una hora es porque a esa hora se necesita, y Taxis Amarillos es menos constante, llega o muy tarde o muy temprano”. Nótese que en este argumento, implícitamente están presentes los rangos y promedios de llegada, de cada una de las compañías.

Durante las presentaciones, Alejandra [del equipo E] mostró a la clase completa la hoja que contenía el dibujo que hicieron y anotó en el pizarrón “las medianas que obtuvimos” (dijo); ante comentarios del profesor e integrantes del equipo F, Alejandra corrigió y precisó que eran las “medias o promedios”. Cuando se le preguntó que dónde quedaban ubicados esos

promedios tuvo dificultades para responder; sólo mencionó que eran minutos y debían quedar en el eje y. Alejandra concluyó su presentación argumentando que los Azules eran mejores taxis, porque los Amarillos son menos constantes y corres el riesgo de algún día llegar tarde. Además, “si lo pides a una hora es porque a esa hora se necesita”; esto motivó el cuestionamiento de la mayoría de los estudiantes, pues iba en contra de lo que habían obtenido en sus equipos.

Cuando Alejandro [C] presentó la solución de su equipo, dijo que sus dibujos eran similares a los de Alejandra y anotó sus cálculos; para los Taxis Amarillos: rango -5.45 y mediana 2.55 min; para los Taxis Azules: rango -5.30 min y mediana 3.20 min; concluyó que los Amarillos eran mejores porque llegan más temprano. El profesor pidió que explicara cómo había obtenido la mediana y dónde quedaba ubicada; Alejandro tuvo dificultades.

Fabián [A] dijo que tenían una solución diferente; pasó al pizarrón dibujó sus diagramas de barras que habían construido con base en las frecuencias de llegada, T_1 temprano y T_2 tarde, para cada una de las compañías (Figura 1) y entonces argumentó que si el interés es llegar temprano, los Taxis Amarillos son mejores porque llegaron más veces temprano. Esta forma de solución fue cuestionada por los equipos B, E y H, ya que ignora la magnitud del tiempo que un taxi llega tarde; un retraso de pocos segundos se considera igual que uno de varios minutos. Posteriormente, Yibé [B] y Core [F] presentaron las soluciones de sus equipos, reforzaron la conclusión de que los Taxis Amarillos eran los mejores. A continuación transcribimos parte de la interacción que se dio entre la presentación de Fabián y la de Core (la participación de Victoria [E] es clave):

Fabián: *...más o menos tenemos que, como los Taxis Amarillos llegaron más veces temprano [señala las barras correspondientes a los Amarillos] entonces son los mejores...*

Profesor: *A ver, ¿tienen preguntas?; Victoria ¿quieres hacer preguntas o comentarios?*

Victoria: *Yo digo que los Taxis Azules son mejores porque de nada sirve que los Taxis Amarillos lleguen extremadamente temprano, si no los vamos a necesitar a esa hora, es como tiempo perdido...*

Yibé: *[en el pizarrón bosqueja sus gráficas, tiempo en el eje y] como la media de los Taxis Amarillos es menor que la de los Azules, y vimos que los Amarillos llegaron cinco veces temprano y los Azules solamente una vez, entonces los Taxis Amarillos son mejores ... aunque si es cierto, tenemos un rango muy grande [señala el rango].*

Alejandra: *Por eso decimos que no convienen los Amarillos, porque son menos constantes y te pueden hacer quedar mal, en cambio con los Azules ... puedes calcular cuánto tiempo van a tardar...*

Core: *La mediana la sacamos al ordenar los datos, es el tiempo que se encuentra en la mitad de la lista; y las medias fueron estas... Taxis Amarillos son los mejores.*

En ese momento, Karla y Andrés [H] señalaron que la mayoría estaba mal por haber puesto el tiempo en el eje y ; ahí siempre debe ir la frecuencia. Desde su lugar Andrés mostró sus histogramas (Figura 3) y explicó que el tiempo debe ir en el eje x ; concluyó que Taxis Amarillos era la mejor compañía porque llegaba más veces temprano, señaló las medias en su gráfica. Esto motivó la aceptación de la mayoría de los estudiantes; sin embargo, Victoria [E], manifestó estar de acuerdo con Andrés respecto a los histogramas, pero no en su conclusión; entonces se originó la siguiente discusión:

Victoria: *...cuando tu pides un taxi es porque a esa hora lo necesitas y los Taxis Azules son más constantes que los Amarillos, entonces basta con que los pidas unos minutos antes.*

Andrés: *Nosotros obtuvimos los promedios de $\bar{x} = 2'30''$ (tarde) para Amarillos y $\bar{x} = 3'15''$ (tarde) para Azules, entonces los Amarillos si son mejores.*

Profesor: *¿Solamente debes tomar en cuenta el promedio? [Andrés se queda callado].*

Victoria: *Debe tomarse en cuenta qué tan temprano o qué tan tarde pueden llegar y ver cuáles son más constantes, por eso nos quedamos con los azules.*

Alejandra: *[remarca] los pides unos minutos antes y ya.*

Después de haber escuchado estos últimos argumentos de Victoria y Alejandra, la mayoría de los estudiantes del grupo manifestaron estar de acuerdo con ellas; quienes, a su vez, aceptaron la forma de hacer histogramas que explicó el equipo H. El profesor aprovechó la ocasión para hacer una sistematización.

En el trabajo individual: 21 estudiantes representaron los datos mediante histogramas o polígonos de frecuencia, con el tiempo en el eje x y la frecuencia en el y . En la conclusión final: dos dieron una respuesta ambigua “depende de los intereses de la persona”; siete mantuvieron su posición “Taxis Amarillos es la mejor compañía”; y 15 contestaron que “Taxis Azules eran mejores”. En las Figuras 4 y 5 se puede ver el trabajo individual de Erick [F] y de Karla [H] quien modificó la forma de graficar los datos.

Conclusión. La discusión colectiva inició con las presentaciones de los equipos; los estudiantes y el profesor cuestionaron afirmaciones, hicieron correcciones o pidieron aclaraciones a quienes exponían. Varias intervenciones pedían a los estudiantes que explicaran sus razonamientos sobre el uso de ciertas representaciones y cálculos, lográndose que algunos modificaran sus puntos de vista.

Los estudiantes mostraron interés por participar en la actividad y después de la introducción en cada tarea, manifestaron entusiasmo y disposición por contestar cada pregunta. En el trabajo en equipos, fue posible identificar contribuciones que muestran distintas cualidades matemáticas y cuando los estudiantes hicieron sus presentaciones, compartieron y criticaron fortalezas y limitaciones de los métodos de solución de los demás.

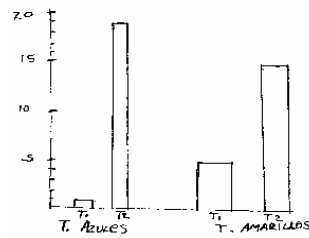
La forma de trabajo en el aula y las cualidades asociadas a las tareas permitió que los estudiantes practicasen los pasos establecidos en el método de Polya (1945) y arribaran a la solución: tanto en los equipos como en la clase completa, la discusión giró en torno al esclarecimiento de qué es lo que se pregunta, cuáles son los datos, etc.; surgió un plan de ataque al problema, a veces en forma individual o colectiva; se llevó a cabo el plan usando

distintos recursos matemáticos que incluyen trazos, arreglos numéricos, operaciones, aplicación fórmulas, etc.; y obtuvieron resultados que fueron comprobados o revisados para ver su pertinencia como solución.

Referencias

- Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package*. (1999; 2000). White Plains, N. Y.: Dale Seymours Publications.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Schoen, L. (Ed.). (2004). *Teaching Mathematics through Problem Solving. Grades 6-12*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A. H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. *Research in Collegiate Mathematics Education III.*, pp. 81-113.
- Sepúlveda, A., Santos, M. (2004). Developing Understanding in Mathematical Problem-Solving. A Study with High School Students. En McDougall, D.E. & Ross, J.A. (Eds.). (2004). *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto: OISE/UT, pp. 499-506.

- Con base en estos registros decide qué compañía es mejor. Usa adecuadamente cálculos, gráficas y diagramas, que te permitan analizar los datos y hacer comparaciones más fácilmente. Escribe todo lo que necesites para responder.



$T_1 = \#$ de veces que llegan temprano
 $T_2 = \#$ de veces que llegan tarde

Σ de T. AMARILLOS $T_1 = 5$ $T_2 = 15$
 Σ de T. AZULES $T_1 = 1$ $T_2 = 19$

- Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Amarillos" es la mejor compañía. Escribe claramente tu argumento.
 LA PUNTUALIDAD EN LOS TAXIS AMARILLOS ES MEJOR.
 Y POR LO TANTO ES LA MEJOR COMPAÑÍA, DADO QUE LA IMPUNTUALIDAD ES MENOR QUE LA DE LOS TAXIS AZULES.
- Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Azules" es la mejor compañía.
 LA COMPAÑÍA DE TAXIS AZULES ES LA MAS IMPUNTUAL
 Y CON UN MAYOR NUMERO DE VECES QUE LLEGAN TARDE.
- ¿Cuál de los argumentos que presentaste es más convincente? ¿Por qué?
 LA PRIMERA, PORQUE LA PUNTUALIDAD HACE QUE SARA LLEGUE TEMPRANO AL TRABAJO

Figura 1. Respuestas del equipo A en Ordenar un taxi.

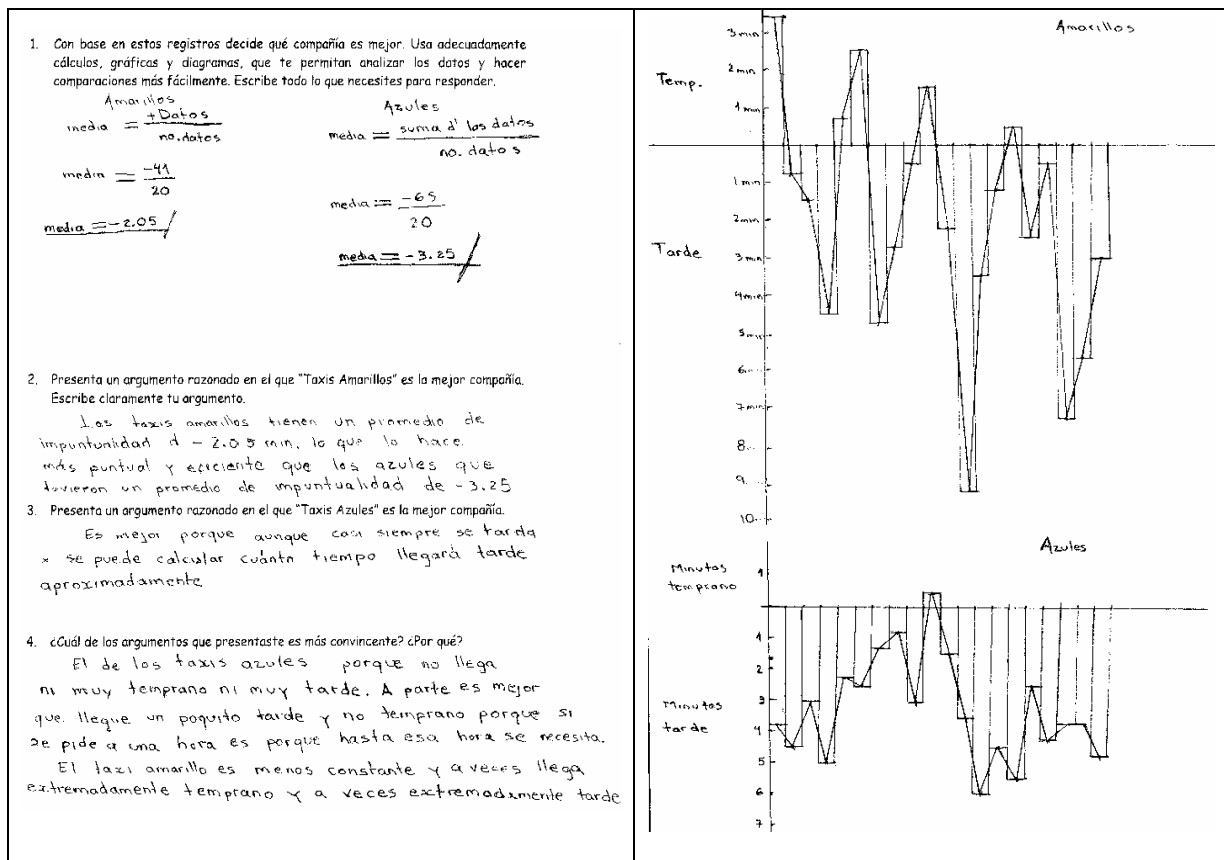


Figura 2. Respuestas del equipo E en Ordenar un taxi

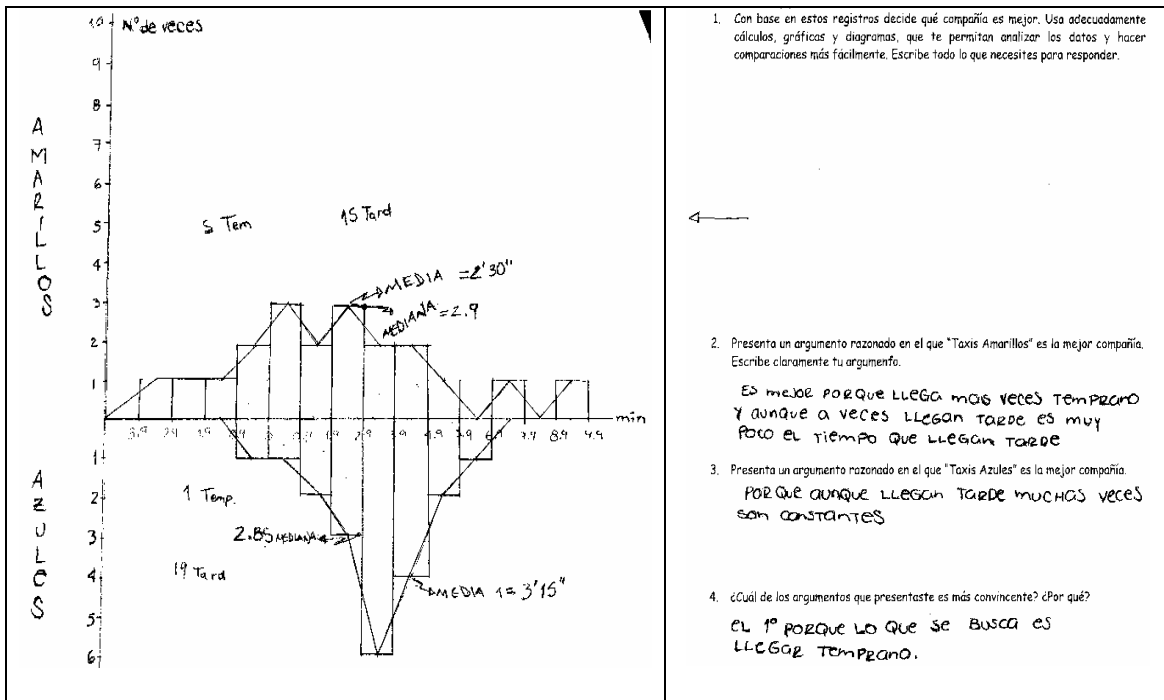
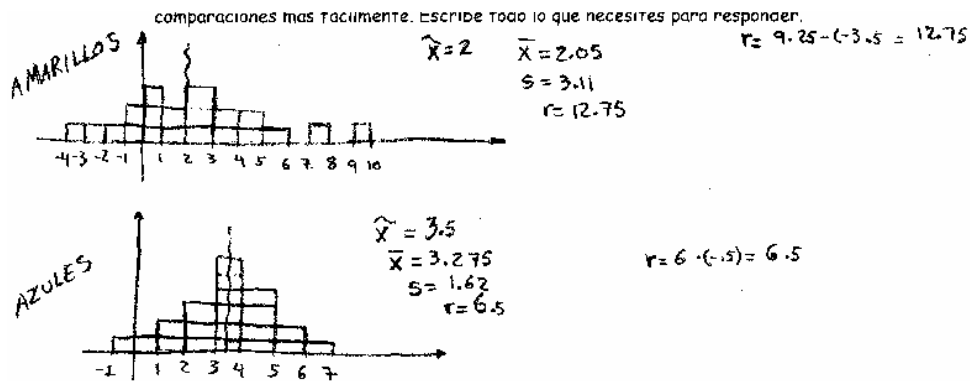


Figura 3. Respuestas del equipo H en Ordenar un taxi.



2. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Amarillos" es la mejor compañía. Escribe claramente tu argumento.
- Porque Los taxis amarillos tienen la media menor a la de los azules
3. Presenta un argumento razonado en el que "Taxis Azules" es la mejor compañía. Porque los taxis Azules la desviación estandar mas pequeña que la de los Amarillos.
4. ¿Cuál de los argumentos que presentaste es más convincente? ¿Por qué?
- La de los Azules, Porque tambien tiene un rango mucho menor que el de los Amarillos.

Figura 4. Trabajo individual de Erick (equipo F) en Ordenar un taxi.

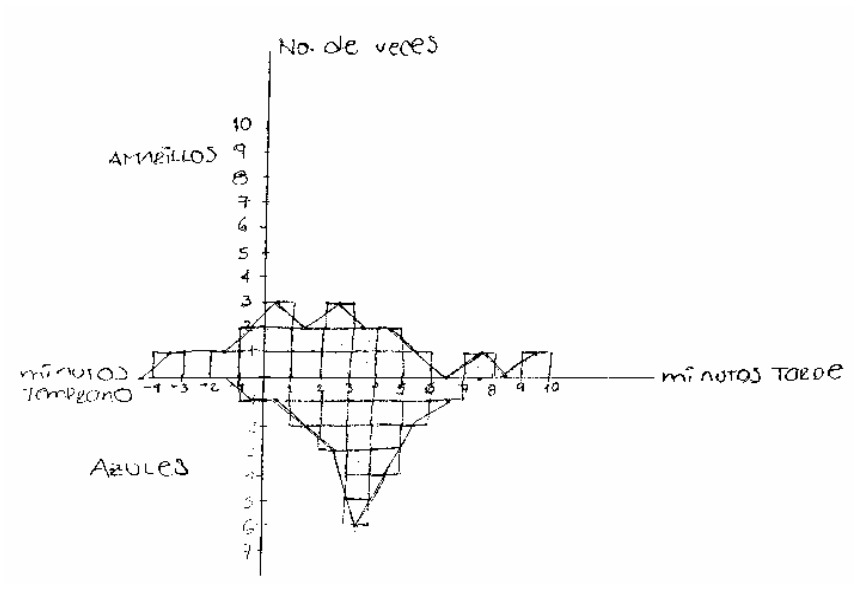


Figura 5. Histograma conjunto de Karla en Ordenar un Taxi.