LAS REPRESENTACIONES EN EL ENTENDIMIENTO DE LA MATEMÁTICA EN CONTEXTO

PATRICIA CAMARENA GALLARDO, CLAUDIA ROSARIO MURO URISTA

Introducción

Algunos problemas en el aprendizaje de la Serie de Fourier son la desvinculación de ésta con los conocimientos de la ingeniería que estudia el alumno y la falta de significado en el área de aplicación, esta problemática es identificada y abordada a través de la aproximación teórica de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* (Camarena, 2000), donde la modelación matemática es un eje vertebrador en la construcción del conocimiento.

El transporte o transferencia de masa, matemáticamente y de forma teórica, después de un tiempo infinito llega al equilibrio, el cual es referido al estado estable del proceso (Muro, 2004) y se encuentra íntimamente ligada con el concepto matemático de la convergencia de la serie de Fourier, como se establece en la Teoría Analítica de Calor (Fourier, 1822).

Tomando como base el planteamiento de Fourier, la transferencia de masa en un proceso químico es semejante. Por tanto, la representación del fenómeno y su comportamiento está relacionada con estas series y su correspondiente convergencia (Muro, 2000 y 2004). Proporcionando así, elementos matemáticos y del proceso mismo, para establecer las representaciones.

Así el objetivo de la investigación es la caracterización de las variaciones en las representaciones acerca de las diferentes facetas que se presentan en el entendimiento y solución de un problema en una situación de matemáticas en contexto.

Fundamentación

Para esta investigación se toman como marco de fundamentos los estudios sobre las representaciones de problemas matemáticos donde Vergnaud hace énfasis en el papel de las diferentes relaciones que tienen lugar en problemas determinados que contienen estructuras aditivas, multiplicativas, relaciones número-espacio, entre otros, (Vergnaud y Durán, 1976; Vargas y López, 1988 Guerrero, 1997; Vergnaud, 1994; Nunes y Bryant, 1998). Estas investigaciones convergen en el estudio de la relación con los procedimientos que los niños emplean para resolver problemas, enfatizando en el análisis de los procedimientos informales (no algorítmicos) para llegar a soluciones correctas.

Los trabajos de Vergnaud acerca de las estructuras aditivas, muestran el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar los problemas como tareas matemáticas, bajo factores que se establecen a partir de la actividad del niño en diversos problemas, por tanto el conocimiento que resulta de la actividad del estudiante es considerado pragmático y se establece a través de sus representaciones. Vergnaud (1990 y 1994).

En esta línea, en Flores (2002), se destaca el interés en la comprensión de diversas transformaciones y transiciones que ocurren en el tránsito de una resolución no- canónica hacia una resolución canónica y algorítmica acerca de la estructura aditiva; considerando las características de la representación, en términos de sus invariantes operatorias tales como propósitos, reglas de acción, inferencias, teoremas en acto y conceptos en acto.

Los resultados anteriores justifican el hecho de establecer los tipos de representaciones que muestran los estudiantes pertenecientes a un nivel superior en la solución de problemas referidos sobre conceptos matemáticos y de ingeniería en un contexto determinado (Camarena, 1997) tomando como base el análisis referido a las estructuras aditivas en la educación básica de Flores (2002).

MÉTODO

El método a seguir para establecer las representaciones relativas a la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa es el siguiente:

1. Descripción de la Modelación del fenómeno: representación formal del problema
2. Identificación de los aspectos a representar dentro de las tareas a realizar por el estudiante de acuerdo a la modelación del fenómeno.
3. Descripción de las variaciones en las representaciones que genera el estudiante al interactuar con este problema.
4. Identificación de las invariantes operatorias en el análisis de la variación de sus representaciones.

Para la descripción del modelo, se analizan los elementos matemáticos y del fenómeno, los cuales son referentes a la relación existente entre la estructura de la serie de Fourier y a la del transporte molecular. A partir de algunos aspectos que sobresalen en el modelado se establecen las tareas que comprende el problema.

El análisis de la interacción del estudiante con este problema, se basa en el estudio de las variaciones de las representaciones en el entendimiento y de la solución de un problema que conlleva la relación de la serie de Fourier con el cambio que tiene lugar en el fenómeno en el tiempo y el espacio.

La categorización de las variaciones se establece en términos de representaciones canónicas y no canónicas y cada una puede presentarse bajo el aspecto de algorítmica y no algorítmica. Las canónicas son referidas a esquemas de entendimiento que corresponde al que se plantea, mientras que el no canónico, no corresponden al problema que se plantea. Cuando es algorítmico, el esquema indica que el sujeto puede emplear herramientas de la matemática formal para solucionar el problema y cuando es no algorítmico, el conocimiento se manifiesta en forma rudimentaria que puede ser congruente o no al problema según sea canónico o no canónico.

Los aspectos asociados a la variación de estas representaciones, son las invariantes operatorias. Las invariantes operatorias son referidas a principios matemáticos para desarrollar operaciones de pensamiento de forma incipiente, ya sea como conceptos y teoremas en acto que no pueden ser llamados conceptuales porque no son aspectos explícitos del conocimiento, por tanto es difícil distinguirse entre ellos, pero constituyen una base para entender el conocimiento formal del individuo. La identificación de estas invariantes es inferida de la observación de la actividad que desarrolla el individuo en una tarea y no es explícita.

De esta manera, la recolección de datos se realiza a través de la observación y sesiones en profundidad o grupo de enfoque. La medición de las invariantes operatorias, corresponden a un enfoque cualitativo y son organizadas por el tipo de representaciones.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La formalidad del problema de transferencia de masa del tipo difusional, establece que bajo ciertas condiciones, la transferencia de masa, se debe al movimiento de moléculas de una región de mayor otra de menor concentración, disminuyendo dicho movimiento a través del tiempo y por el poco espacio que las moléculas tienen para desplazarse de una región a otra. Cuando el tiempo es teóricamente infinito, la transferencia de masa tiene un límite que corresponde al límite de la función $T(t)$ que representa el equilibrio en el fenómeno en el tiempo. Este límite representa a su vez la finalización del estado inestable y el inicio del estado estable del proceso donde se lleva a cabo dicha transferencia. De esta forma, la representación matemática de estos cambios en la transferencia de masa, es una ecuación en derivadas parciales que es función del tiempo “t” y el espacio “x” de la forma:

$$K_g \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1)$$

La ecuación describe un fenómeno que se desarrolla en el tiempo como una operación de evolución que toma el estado inicial T(x, 0), en que la condición inicial se plantea para un tiempo de transferencia cero y lo lleva al estado T(x, t) cuya descripción se representa mediante una serie de Fourier (ver ecuación 2) como función solución de la ecuación diferencial parcial proporcionando el comportamiento en el cambio de la propiedad que conlleva la transferencia de masa, a través de una suma de funciones que la conforman y siguen un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que el cambio es uniforme en todo el espacio. Ecuación (2).

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right]\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K_g t}{4\ell^2}\right] \quad (2)$$

La suma de la serie da como resultado la función: f(t) = T(x, t) en un intervalo $-\ell < x < \ell$ correspondiente al espacio total donde tiene lugar la transferencia.

En base a lo anterior las tareas a desarrollar destacan aspectos útiles para analizar las siguientes representaciones:

Representaciones canónicas y no canónicas asociadas al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno y su variación con el tiempo y el espacio. Ambas representaciones se desglosan de la siguiente manera:

a) Una serie de Fourier determina el cambio en la transferencia de masa que se sufre con el tiempo T(t) en la última etapa del proceso.

b) El cambio en la transferencia de masa debido a la posición muestra una función T(x) en la última etapa del proceso y este, se encuentra determinado por una función periódica generada por una serie de Fourier.

c) Dicha función periódica sigue un patrón sinusoidal que se atenúa gradualmente hasta que la transferencia de masa es uniforme en todo el sistema, determinando así, el contenido de esta propiedad en equilibrio.

d) La suma de la serie de Fourier, converge a la función que representa al fenómeno en su última etapa.

Los resultados referidos a la variación en las representaciones de los estudiantes ante las tareas son las siguientes:

1. Representación canónica no algorítmica

Esquema de entendimiento: Canónico: El esquema de entendimiento refleja la comprensión acerca de que existe ecuación que relaciona el cambio en la transferencia de masa con el tiempo y la posición. La solución proporciona la función que satisface dicho cambio.

Propósitos: 1) Encontrar una expresión matemática que represente el cambio de T en términos de dos variables "t" y "x" y su solución.

Esquema de solución. No algorítmico: El grupo establece el cambio en "t" y en "x" mediante una ecuación diferencial T(t)+T(x) que no corresponde a una representación formal como una ecuación diferencial parcial de dicho cambio. Asimismo, no presenta herramientas para hallar su solución.

Invariantes: Relación del cambio que se define con respecto a dos variables en la ecuación diferencial parcial y de esa manera encontrar la función T en términos de "x" y de "t"

2. Representación canónica-algorítmica

Esquema de entendimiento. Canónico: refleja, la obtención de diferentes series a través del desarrollo de una sumatoria para obtener a T(t) y la representación gráfica de dichas series.

Propósitos: Obtener series y su representación gráfica para identificar a la función T(t) en función del tiempo t.

Esquema de solución. Algorítmico: El grupo sustituye valores de "x" para encontrar a T(t) a través de conformar la serie, cuyo términos resultan al desarrollar la sumatoria con valores de $n = 0$ hasta $n = 25$ y de esa manera hallar su suma, considerando que la suma es aproximadamente igual o igual cuando "n" va de 0 hasta ∞.

Invariantes: Desarrollo de una sumatoria, conformación de una serie de funciones, suma de funciones, grafica de una suma de funciones y obtención de una suma infinita de funciones.

3. Representación canónica asociada a la serie de Fourier

Esquema de entendimiento. Canónico: El grupo muestra un entendimiento canónico al representar a la serie como una suma de funciones cuyo resultado es una grafica que corresponde en una cierta porción de la curva T(t).

Propósitos: Obtención de la suma de la serie, su gráfica y la relación correspondiente a la curva T(t).

Esquema de solución. No algorítmico: Este esquema se presenta cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con su suma, aunque es congruente con el esquema de entendimiento canónico

Invariantes. Suma de una serie de funciones y la convergencia de una suma de funciones

4. Representación canónica de la serie de Fourier asociada al fenómeno de transferencia de masa

Esquema de entendimiento. Canónico: El grupo atribuye el comportamiento de la suma de la serie al fenómeno, al representar a T(t) en la última etapa de secado en la que se llega al equilibrio.

Propósitos: Identificación de la suma de la serie en la última etapa del fenómeno correspondiente al equilibrio.

Esquema de solución: No algorítmico. Este esquema se presenta cuando el grupo no asocia la convergencia de la serie con el equilibrio del fenómeno, aunque es congruente con el esquema de entendimiento en el comportamiento del fenómeno en esta etapa, desconociendo el término matemático y su relación con el fenómeno.

Invariantes: Suma de una serie de funciones, Equilibrio en el fenómeno.

A lo largo de las sesiones el despeño de los estudiantes estuvo limitado en lo que se refiere al entendimiento del cambio con respecto a la posición "x". En la mayoría de las preguntas con respecto a esta relación, los estudiantes muestran entendimientos no canónicos. Cuando se habla de de este tipo de cambio, ellos son capaces de referirse a las curvas de perfil de transferencia de masa, pero han sido incapaces de relacionar dicho perfil con una función T(x) que es representada por una serie de Fourier.

Las representaciones canónicas no algorítmicas asociadas al entendimiento de la serie de Fourier en relación con el fenómeno, muestran que la relación entre la serie y el fenómeno existe, pero ellos no saben como expresar matemáticamente dicha relación.

CONCLUSIONES

La actuación de los estudiantes, arroja resultados que en general se pueden identificar como representaciones canónicas provenientes de un entendimiento sobre la relación que guarda una serie con el fenómeno de transferencia de masa. El seguimiento del grupo, comprende conceptos de la serie de Fourier que son atribuidos al comportamiento del fenómeno, sin que se haya reconocido que se trata de este concepto matemático, ni los aspectos que lo definen; tal es el caso del reconocimiento que tiene lugar acerca de la suma de funciones que proviene de la serie y que representa a la función T(t) y que converge a la misma.

BIBLIOGRAFÍA

▪ Camarena, P. (1997). La Matemática en Contexto. Novena reunión Centroamericana del Caribe Sobre formación de profesores e Investigación en Matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional, México.

▪ Camarena, P. (2000). *Reporte del proyecto de investigación titulado: La matemática en el contexto de las ciencias, la resolución de problemas*. ESIME-IPN, México.

▪ Flores, R. C. (2002). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación.* Tesis de Doctorado no publicada. Aguascalientes. Ags. México.

▪ Fourier J. (1822). Théorie Analytique de la Chaleur. Chez Firmin Didot. Pere et fils Librairers pur les Mathématiques L´architecture hydraulique et lamarine. Rue Jacob. No. 24. París. Reimpressions Editions Jaques Gabay (1988).

▪ Guerrero A. (1997). *El proceso de enseñanza de aprendizaje de las operaciones elementales*. Tesis de Doctorado no publicada. Facultad de filosofía y Letras. UNAM.

Nunes, T. & Bryant, P. (1998). *Las matemáticas y su aplicación la perspectiva del niño.* México: Siglo XXI editores. (Traducido del inglés 1996).

▪ Muro, C. (2000). *La significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

▪ Muro, C. (2004). Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa. Tesis de Doctorado. IPN. México.

▪ Vargas, S. J., López, L. A**.** (1988). *La adquisición de las operaciones aritméticas mentales en los niños de primaria.* México: DGEE, SEP/OEA

▪ Verganud, G., Durand, C. (1976). *Structures additives et complexité psychogénétique.* Revue Francaise, de Pédagogie, 36, 28-43.

▪ Vergnaud, G**.** (1990). *Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In P. Nesher and J. Kilpatrick. (Ed.). Mathematics and Cognition:* A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. pp.(14-30). Cambridge University Press.

▪ Vergnaud, G. 1994. *El Papel del Enseñante a la Luz de los Conceptos de esquema y del Campo Conceptual"(*Le role de I´enseignant á la lumiére des concepts de schéme et de champ conceptuel). París.