Conocimientos previos para desarrollar nociones de fracción como cantidades de tamaño relativo

CLAUDIA ZÚÑIGA GASPAR
Universidad Iberoamericana

JOSÉ LUIS CORTINA MORFÍN
Universidad Pedagógica Nacional

RESUMEN: Se analizan 14 entrevistas clínicas realizadas a un grupo de estudiantes de cuarto grado de una primaria en el Estado de Chiapas. Las entrevistas incluyen tareas en las cuales se les pide a los niños razonar acerca de la capacidad de diferentes tipos de vasos en relación a cuántos de esos vasos se pueden llenar con la leche que contiene un cartón. El análisis sugiere que estas comparaciones "de tipo razón" pueden ser un punto de partida viable para apoyar a los estudiantes a razonar cuantitativamente sobre fracciones unitarias; un punto de partida que, como se discutirá, puede ser una alternativa al método de "partición equitativa" (o de "reparto equitativo") que tradicionalmente se utiliza y que algunos autores han juzgado inadecuados para apoyar el desarrollo de entendimientos complejos de los estudiantes sobre fracciones.

PALABRAS CLAVE: **Enseñanza de las matemáticas, Números Racionales, Educación Básica.**

Introducción

Para los educadores matemáticos una gran preocupación ha sido la introducción de los números racionales, de manera que los estudiantes puedan involucrarse en actividades que les sean significativas y que puedan servir de base para desarrollar entendimientos complejos sobre las fracciones. Las actividades preferidas se basan en el método de partición equitativa (Fig. 1), el cual orienta a los estudiantes a pensar en el denominador como el número que señala en cuántas partes iguales se dividió un entero y el numerador como el número de esas partes que se tomaron del entero (Nunes y Bryant, 1997).

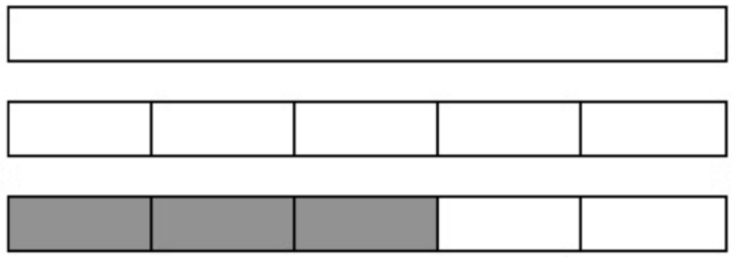

Figura 1. Representación de un entero, quintos y tres quintos con el método de partición equitativa

Esta aproximación es muy atractiva porque los estudiantes pueden fácilmente involucrarse en la partición equitativa y en actividades de reparto. Sin embargo, esta aproximación ha sido considerada por algunos autores como insuficiente (*e.g.,* Kieren, 1980), y por otros como inadecuada (*cf.* Pitkethly y Hunting, 1996).

En el campo conceptual, Kieren (1980) identificó la partición equitativa como sólo un aspecto de los números racionales y consideró que su enseñanza no debería limitarse a esta aproximación. Este autor recomendaba trabajar situaciones en las cuales se incluyera a los otros subconstructos (fracción como razón, medida, cociente y operador). Las ideas de Kieren han sido aceptadas en gran medida (Pitkethly y Hunting, 1996) y han sido tomadas en consideración para el desarrollo de currículos de Matemáticas, como es el caso del currículo de nuestro país. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos que se han realizado en este aspecto, los estudiantes continúan teniendo dificultades para tratar con situaciones que involucran la noción de fracción (*cf.* Backhoff, Andrade, Sánchez, Peón, y Bouzas, 2006).

Otros autores han cuestionado la conveniencia de usar el método de partición equitativa para introducir fracciones. Tal es el caso de Freudenthal (1983), el cual nombró esta aproximación *fracción como fracturador* y la consideró un comienzo bastante estrecho y unilateral. Freudenthal propuso una alternativa que consiste en una aproximación de *fracción como comparador*, donde la gran idea ya no es partir equitativamente un entero y seleccionar un número de partes, sino poner magnitudes en una relación de razón.

Thompson y Saldanha (2003) también expresaron inquietud acerca introducir las fracciones a través de la partición equitativa. Para estos autores: el sistema de operaciones conceptuales que compone a un esquema de fracción está basado en concebir dos cantidades estando en una relación recíproca de tamaño relativo: *La cantidad A es 1/n del* *tamaño de la cantidad B, lo que significa que la cantidad B es n veces el tamaño de A. La cantidad A siendo n veces del tamaño de B significa que la cantidad B es 1/n del tamaño de A.*

Tanto Freudenthal (1983) como Thompson y Saldanha (2003) consideran a la partición equitativa como una base inadecuada para apoyar el desarrollo de entendimientos cada vez más complejos de fracción. Estos autores también coinciden en reconocer las comparaciones tipo razón como el fundamento desde el cual se puede apoyar desarrollo del concepto de fracción. Surge entonces una pregunta: ¿Qué tipo de actividades pueden ser compatibles con las consideraciones de estos autores acerca de la esencia para entender fracciones, y que también sean significativas para quienes se inician en el aprendizaje de las mismas?

Thompson y Saldanha (2003) identificaron en la investigación de Steffe (2002) el carácter potencial de estas actividades. Steffe orientó a los estudiantes a pensar en una fracción unitaria, no tanto en términos del resultado de partir un entero en cierto número de partes iguales, sino en términos de cuántas iteraciones (o copias) de dicha parte producirían algo del tamaño de un entero. De esta manera 1/5 de una barra de dulce no sería interpretado como la cantidad de dulce contenido en los pedazos que son producidos al dividir equitativamente una barra en cinco partes iguales (Ver Fig. 1). En lugar de eso, desde la aproximación de Steffe se buscaría orientar a los estudiantes a pensar acerca de las fracciones unitarias en términos de multiplicandos que satisficieran un criterio iterativo específico. Desde esta aproximación, un quinto de la barra de dulce sería una cantidad de dulce tal que cinco veces esa cantidad equivaldría a la cantidad de dulce de una barra entera (Fig. 2).

Figura 2. “1/5” es una parte de un tamaño tal que cinco de ellas resultarían del tamaño de un entero

La investigación hecha por Steffe sugiere que las actividades en las cuales las fracciones unitarias son aproximadas más en términos de multiplicandos que de cocientes partitivos pueden ser la base para apoyar el desarrollo de entendimientos complejos sobre fracciones, compatibles con los análisis de Freundenthal (1983), y de Thompson y Saldanha (2003). Sin embargo se debe tomar en cuenta que Steffe reportó haber trabajado con un par de estudiantes, en una situación que implicó el uso intensivo de computadoras. Queda pues sin responder la pregunta de si sería viable utilizar actividades basadas en la aproximación de los multiplicandos a las fracciones unitarias, en salones de clase donde asisten niños de contextos no muy favorecidos.

Recolección de los datos y Metodología

Los datos que se analizan en este reporte provienen de 14 entrevistas clínicas realizadas a niños de un grupo de cuarto grado de primaria de una ciudad en el Estado de Chiapas. El propósito de las entrevistas fue documentar el tipo de recursos matemáticos desarrollados por los estudiantes que habían seguido trayectorias de educación formal en escuelas públicas marginadas. Siguiendo una perspectiva de diseño de enseñanza (Gravemeijer, 2004), se buscó reunir información útil para formular conjeturas acerca de la naturaleza de las actividades en las cuales los estudiantes de este tipo de escuelas serían capaces de involucrarse con relativa facilidad.

Las entrevistas implicaron seis actividades, cuatro de las cuales se discuten en este reporte. Fueron conducidas en enero de 2007 a mediados del ciclo escolar. En ese momento las edades de los estudiantes eran nueve años (siete niños), diez años (seis niños) y once años de edad (un niño). Todos los estudiantes pertenecían a familias pobres.

Las entrevistas duraron entre 25 y 40 minutos cada una y fueron videograbadas. Las entrevistas fueron analizadas siguiendo las directrices recomendadas por Cobb (1986). Las partes más importantes de las entrevistas fueron transcritas.

Análisis de los datos

Tres de las actividades de las entrevistas estaban centradas en documentar los entendimientos de los estudiantes sobre la multiplicación. Una basada en la narrativa del número de “tazos” que muchos niños coleccionan. El problema implicaba determinar cuánto era "lo doble", "lo triple" y "lo quíntuple" de cinco tazos; por ejemplo "Manuel tiene cinco tazos y Rafael tiene "lo doble" de Manuel, ¿cuántos tazos tiene Rafael?

Se decidió no utilizar la palabra "veces" desde el principio para permitir que emergieran estrategias diferentes a la adición iterada. Sin embargo, expresiones como "cinco veces" tuvieron que ser utilizadas cuando los estudiantes no parecían entender lo "triple" o lo "quíntuple".

Todos los estudiantes fueron capaces de determinar fácilmente el doble de cinco. También pudieron determinar lo triple de cinco, aunque ocho de ellos no pudieron dar una respuesta inmediata al utilizar estrategias aditivas (*e.g.,* sumar cinco a diez, o contar tres veces cinco). Determinar lo quíntuple de cinco representó un reto significativo para cuatro de los niños. Parecía que tenían dificultad para mantener el doble conteo (*e.g.,* 1-5, 2-10, 3-15, 4-20, 5-25).

Otra de las actividades que se planteó a los estudiantes fue encontrar el número de galletas que había en una caja que contenía 10 paquetes con 10 galletas cada una. En este caso, seis de los estudiantes dieron una respuesta inmediata, aparentemente utilizando la tabla de multiplicar (*i.e.,* 10x10). Cuatro de ellos resolvieron el problema exitosamente contando 10 veces 10 (*i.e.,* 1-10, 2-20, 3-30,…10-100). Los cuatro restantes utilizaron la misma estrategia pero parecían tener dificultades con el doble conteo. En general, las nociones de multiplicación de al menos ocho de los estudiantes parecían insuficientes para el cuarto grado de primaria.

Otra situación planteada implicaba una barra de chocolate que fue físicamente presentada a los estudiantes (un rectángulo de 8 por 16 cm). Se les mostraron a los niños tarjetas con las siguientes inscripciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ y se les solicitó identificar la cantidad de chocolate que correspondería con lo escrito en cada tarjeta. Además, en el caso de 1/4 y 2/4, se les pidió que explicaran si esta cantidad sería mayor, menor o lo mismo que 1/2. Vale la pena aclarar que de acuerdo con el currículo de primaria, los estudiantes deberían haberse familiarizado con estas fracciones en tercero de primaria, y durante el tiempo que llevaban en cuarto grado ya deberían reconocer tercios, quintos y décimos.

Todos los estudiantes fueron capaces de identificar la mitad de la barra de chocolate, aunque tres de ellos no relacionaron inmediatamente la representación "$\frac{1}{2}$" con la idea de mitad. Cinco de los estudiantes consideraron que 1/4 de chocolate sería menor que una mitad; seis estudiantes consideraron que sería más; y los tres restantes dijeron no saberlo. Sólo uno de los niños reconoció que 2/4 del chocolate era lo mismo que 1/2. El resto consideró que era más o no estaba seguro. En general, casi todos los estudiantes parecían tener entendimientos inadecuados acerca del significado de las fracciones convencionales simples.

La actividad principal de la entrevista implicó el razonamiento sobre la capacidad relativa de los vasos que era posible llenar con la leche de un cartón. Se les presentó físicamente un cartón de leche como el que se muestra en la Figura 3.

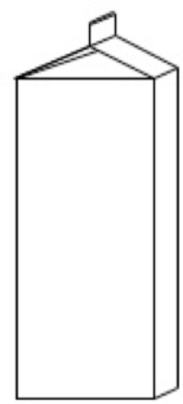

Figura 3. Dibujo del cartón de leche de un litro como el que se utilizó en las entrevistas

Las tareas estaban planeadas para orientar a los estudiantes a razonar acerca de la capacidad de los vasos en términos de cantidades (multiplicandos) que satisficieran un cierto criterio iterativo: se trataba de comparar el tamaño de diferentes tipos de vasos (plástico, vidrio y unicel) en relación a cuántos de estos vasos podían ser llenados con la leche contenida en el cartón. El propósito de la actividad fue identificar la diversidad y naturaleza de los razonamientos que emergerían en los estudiantes al reflexionar sobre este tipo de situaciones. En consecuencia, las tareas implicaron comparar el tamaño relativo de magnitudes que no eran parte de la misma cosa.

A los niños se les platicó acerca de unos vasos de plástico que eran de un tamaño tal que la leche del cartón podía llenar exactamente tres de ellos (*i.e.,* 1/3 de la leche del cartón).

Se les pidió que estimaran el lugar donde la leche se podría encontrar después de haber servido uno, dos y tres vasos.

Más adelante se les comentó a los estudiantes acerca de unos vasos de vidrio que eran de un tamaño tal que la leche del cartón podía llenar exactamente cinco de ellos (*i.e.,* 1/5). Se les pidió que explicaran si a los vasos de vidrio les cabría más o menos leche que a los vasos de plástico (*i.e.,* 1/3 *vs.* 1/5). Después se les pidió a los niños que estimaran el lugar donde podría estar la leche en el cartón después de servir uno, dos, tres, cuatro y cinco vasos.

Finalmente, se les explicó a los niños sobre la existencia de otros vasos que eran de unicel, que eran de un tamaño tal que con la leche del cartón se podían llenar exactamente 10 de ellos (*i.e.,* 1/10). Se les preguntó si a los vasos de unicel les cabría más o menos leche que a los vasos de plástico o a los vasos de vidrio (*i.e.,* 1/10 *vs.* 1/3 y 1/10 *vs.* 1/5). Después se les pidió que estimaran y marcaran el lugar donde estaría la leche en el cartón después de haber servido uno y cinco vasos, y que explicaran si al servir cinco vasos de unicel se requeriría más, menos o lo mismo que la mitad de la leche del cartón (*i.e.,* 5/10 *vs.* 1/2).

Las actividades de la capacidad de los vasos pareció tener sentido para todos los estudiantes, dado que no se necesitó dar más explicaciones para ayudarlos a involucrarse con los problemas de una forma razonable. Todos los estudiantes identificaron los vasos de plástico de mayor capacidad que los vasos de vidrio (*i.e.,* 1/3>1/5) y los vasos de unicel de menor capacidad que los vasos de plástico y de vidrio (*i.e.,* 1/10<1/3 y 1/10<1/5). Diez de los estudiantes también articularon explicaciones razonables del porqué era así. La siguiente explicación es un ejemplo de la comparación entre los vasos de plástico y los de vidrio (*i.e.,* 1/3 *vs.* 1/5):

> (Vicky indica que los vasos de plástico son más grandes)
>
> Entrevistadora: ¿Por qué?
>
> Vicky: Porque eran 3 [de plástico] y los de vidrio son 5.
>
> Entrevistadora: ¿Y eso qué quiere decir?
>
> Vicky: Le sirven a cada quien un vaso [de plástico], pero si sirven 5 [vasos de vidrio] va a tener más poco [de leche un vaso de vidrio].

En el caso de estimar el lugar donde podría estar la leche después de haber servido cinco vasos de unicel, los estudiantes hicieron marcas que indicaban donde podría estar después de servir uno, dos, tres, cuatro y cinco vasos. Cinco de las estimaciones de los niños coincidían con la mitad del cartón de leche, ocho excedían la mitad por poco y uno excedía por mucho.

A este respecto la pregunta de si al servir cinco vasos de unicel se utilizaría más, menos o lo mismo que la mitad del cartón de leche (*i.e.,* 5/10 *vs.* 1/2), los cinco estudiantes cuyas marcas coincidían con la mitad del cartón rápidamente respondieron que sería lo mismo. Aunque es posible que sus respuestas estuvieron basadas en las marcas que ellos habían hecho en el cartón y que quizá anticiparon que sus marcas tenían que coincidir con la mitad del cartón, los cinco fueron capaces de justificar sus respuestas matemáticamente (*e.g.,* "porque cinco y cinco son 10").

Los otros nueve estudiantes claramente basaron sus respuestas en las marcas que habían hecho en el cartón y respondieron que sería más o menos que la mitad, dependiendo del lugar donde habían puesto sus marcas. Estos estudiantes cuando se les preguntó acerca de cuántos vasos se podrían llenar con la mitad de la leche del cartón, todos respondieron que serían cinco vasos. Entonces se les hizo la pregunta original: esta vez siete de ellos dijeron que al servir cinco vasos sería lo mismo que servir la mitad del cartón de leche. Los dos estudiantes restantes continuaron basando sus respuestas en las marcas originales que habían hecho. Estos estudiantes parecían tener problemas reconciliando su entendimiento aritmético respecto a que la mitad de 10 es cinco con imaginar el proceso de servir la leche en los vasos.

Discusión

El análisis de las entrevistas apoya la conjetura de que las actividades de tipo razón podrían ser productivamente utilizadas en los salones de clase para introducir las fracciones, incluso en aulas de escuelas marginadas. Las actividades de los vasos parecieron tener significado inmediato para todos los niños que participaron en las entrevistas, y ser útiles para ayudarlos a razonar acerca de multiplicandos que satisficieran un cierto criterio (*i.e.,* vasos conteniendo una cantidad de leche tal que un número *x* de ellos pudiera ser llenado con la leche del cartón). Las actividades también parecieron útiles para apoyar en el razonamiento de los estudiantes acerca de equivalencias básicas (*e.g.,* 1/2=5/10). Desde una perspectiva de diseño de la enseñanza, la emergencia de este tipo de razonamiento cuantitativo entre los niños entrevistados es particularmente relevante, dado que se dio a pesar de la aparente comprensión limitada que la mayoría de ellos parecía tener respecto a la multiplicación y a las fracciones convencionales.

Este análisis sugiere que sería viable involucrar a los niños en rutas de aprendizaje de las fracciones en las que se sorteen las limitaciones de la partición equitativa y apoyar el desarrollo de entendimientos complejos acerca de los números racionales; entendimientos que no son típicamente alcanzados por los niños en México (*cf*. Backhoff *et al*., 2006).

Agradecimientos

La investigación y el análisis reportados en este estudio fueron posibles gracias al apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México a través del proyecto 53448. Las opiniones y puntos de vista expresados no reflejan necesariamente a los del Consejo.

Referencias

Backhoff, E., Andrade, E., Sánchez, A., Peón, M., y Bouzas, A. (2006). *El Aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México: Sexto de Primaria y Tercero de Secundaria*. México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Cobb, P. (1986). Clinical interviewing in the context of research programs. En G. Lappan y R. Even (Eds.), *Proceeding of the Eighth Annual Meeting of the International Group of the Psychology of Mathematics Education: Plenary Speeches and Symposium* (pp. 90-110). East Lansing, Michigan State University.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical henomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland, Kluwer.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 105-128.

Kieren, T. (1980). The rational number construct —Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.). *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-149). Columbus, OH, ERIC/SMEAC.

Nunes, T. y Bryant, P (1997). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. México, Siglo XXI.

Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 5-38.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 267-307.

Thompson, P. W. y Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin, y D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-113). Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.