

LA IMPORTANCIA DEL USO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES EN LA FORMULACIÓN DE CONJETURAS

ALMA ALICIA BENÍTEZ PÉREZ / MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ
Departamento de Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional

RESUMEN: El presente trabajo aborda el diseño de estrategias para fortalecer el uso de múltiples representaciones en eventos contextualizados, impulsando la formulación de conjeturas y eventualmente la propuestas de argumentos que la soporten. La investigación se realizó con alumnos del nivel medio superior que estaban inscrito en la asignatura de álgebra. A nivel de hallazgos, se muestra el desarrollo de con-

jeturas, así como la identificación de patrones cuando se plantean situaciones familiares en el alumno y el anclaje del contexto para algunos estudiantes como el anclaje de la descontextualización para otros.

PALABRAS CLAVE: Múltiples Representaciones, Conjeturas, Eventos Contextualizados.

Introducción

Los problemas contextualizados destacan su participación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas concibiendo la actividad matemática como una actividad humana. Uno de sus principios básicos afirma que para conseguir una actividad matemática significativa hay que partir de la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983), lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria, integrando al currículo una variedad de problemas contextualizados relacionados con el contexto de los estudiantes.

La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación. Hans Freudenthal (1983), considera que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización. Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del problema (que se pueda manejar en el aula), que por una parte aún contiene las características

esenciales de la situación original, y por otra parte está ya tan esquematizada que permite una aproximación con medios matemáticos.

Bajo esta óptica las situaciones extra matemáticas, que contextualizan un objeto matemático, los “Problemas contextualizados” permiten simular situaciones del mundo real. En estas situaciones el problema y la solución se generan simultáneamente y la persona está implicada cognitivamente, emocional y socialmente.

Los problemas más estudiados son los problemas de contexto evocados introductorios, estos problemas se presentan al inicio de una unidad de aprendizaje con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos que se van a estudiar en una unidad de aprendizaje. En este caso, se presenta una situación del mundo real que el alumno no puede resolver con sus conocimientos previos, cuyo propósito es facilitar la construcción, por parte de los alumnos, de los conceptos matemáticos nuevos que se van a estudiar en la unidad de aprendizaje, su diseño atiende procesos complejos de modelización, para la aplicación de los conceptos matemáticos (D’Amore, Fandiño y Marazzani, 2003).

El presente trabajo aborda problemas de contextos evocados introductorios, atendiendo a la situación del mundo real que el alumno puede resolver con sus conocimientos previos al inicio de cada unidad de aprendizaje, en este ambiente se ha impulsado el uso de múltiples representaciones con la finalidad de identificar conjeturas que el alumno desarrolla cuando se ha tenido esta vivencia.

Marco Teórico

Diversas han sido las investigaciones que se han enfocado en el análisis del desempeño que tienen las representaciones en el aprendizaje de la matemática, así como estudiar la influencia que posee el manejo de varias representaciones para lograr la aprehensión del objeto matemático.

En esta dirección el trabajo desarrollado por Janvier (1987) enfatiza la importancia de las representaciones, pues considera que ellas son elementos fundamentales para establecer comunicación con el medio que le rodea, pero además concibe la idea de explorar significaciones entre representaciones o modos de representación a través del “proceso de traducción”, el cual es básico en la adquisición de un objeto.

Los trabajos desarrollados por Kaput (1991), Goldin & Kaput (1996) y Duval (2000) respectivamente han destacado con mayor precisión el papel que desempeña emplear varios sistemas de representación en el proceso de la adquisición de un concepto, aunque sus posiciones no coincidan en su totalidad. Así, Kaput (1991) basa su análisis en la tradicional estructura del signo lingüístico tradicional, pero además amplía ésta posición, ya que establece la relación entre lo que él llama notación A y su referente B, y aclara que todo puede ser expresado en forma material e incluso su correspondencia (posiblemente), pero sus relaciones desarrollan únicamente a nivel mental (Goldin & kaput, 1996), actividad que adquiere un papel decisivo en la construcción de conceptos matemáticos.

No obstante, Duval (2000) considera que las condiciones cognitivas internas de un sujeto para lograr la aprehensión del concepto, se enfocan en el desarrollo y fortalecimiento de “La Arquitectura Cognitiva”, a través de una organización sólida de diferentes sistemas semióticos. Esta actividad se logra cuando los sistemas de representación semióticas, adquieren el rango de registros semiótico, pues se habla de los sistemas de producción necesarios en toda representación, y de las transformaciones que pueden tener, tratamiento y conversión.

Duval plantea la siguiente pregunta: “*¿Cuáles son las condiciones cognitivas internas requeridas para que cualquier estudiante pueda entender matemáticas?*”, pág. 1-61 [25], la cual cuestiona las condiciones cognitivas para que el estudiante pueda resolver tareas que requieran el empleo de al menos dos representaciones. Al respecto, Duval (2002) ha clasificado en dos clases las representaciones cognitivas. Aquellas que son intencionalmente producidas por sistemas semióticos, de las cuales se menciona a las representaciones discursivas (algebraica o simbólica) y las representaciones visuales (la gráfica de una función). Y las que son producidas casualmente y automáticamente por sistemas orgánicos.

La coordinación de varios sistemas semióticos, es una actividad cognitiva que es fundamental para el entendimiento de la matemática, pues requiere su organización.

Bajo estas condiciones el aprendizaje de la matemática significa integrar en la Arquitectura Cognitiva todos los registros semióticos, así como nuevos sistemas de representación, para su coordinación. Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva, lo cual contribuye a crear

y desarrollar habilidades en el estudiante para enfrentar nuevos retos en su formación (Benítez Pérez A. y García Leticia M. (2009), Benítez, A. 2010).

Metodología

Esta investigación, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar dos actividades, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron problemas en eventos contextualizados. El propósito de la experiencia educativa fue identificar las conjeturas que el alumno desarrolla cuando se proporcionan al estudiante contextos evocados introductorios para explorar múltiples representaciones, empleando tratamientos que permitan evidenciar su riqueza.

Participantes

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 45 alumnos, del nivel medio superior (C.E.C.yT. 11, "Wilfrido Massieu") que cursaban la asignatura de álgebra, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos durante la investigación fueron:

- Reportes escritos elaborados en forma individual.
- Reportes escritos elaborados por equipos de estudiantes (4 integrantes).
- Grabaciones en audio del trabajo de los estudiantes.
- Reportes elaborados por el profesor-investigador.

Dinámica de trabajo en el aula

La dinámica en el grupo se concretó en la organización de equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. El criterio de selec-

ción consideraba los diferentes puntos de vista, favoreciendo la discusión en el grupo, para aclarar dudas y superar posibles dificultades.

Durante el desarrollo de las actividades en el grupo se impulsaron actividades que involucraron el uso de múltiples representaciones empleando eventos contextualizados, para construir los modelos matemáticos en las diferentes situaciones contextualizadas.

Después de concluida la experiencia educativa se invitaron a 2 alumnas (Susana y Alejandra). La actividad se llevó a cabo en el aula y la sesión se realizó extraclase, teniendo una duración de 2 horas. Las alumnas participantes fueron invitadas para esta actividad, por ser gente comprometida y dispuesta a participar. En las sesiones participó el docente como entrevistador, la transcripción de las grabaciones fueron utilizados para el análisis que se presenta más adelante.

A continuación se muestra la actividad que las alumnas desarrollaron durante la experiencia;

Una compañía de discos estima que podrá vender siete mil álbumes de una nueva versión de “Le nozze di Figaro” de Mozart-Da Ponte a \$ 240 cada álbum. Por cada reducción de \$5 en el precio por álbum, calcula que venderá 300 álbumes más. A la compañía cada álbum le cuesta \$85 y sus costos fijos son de \$100000. Encuentra el número de álbumes que darán a la compañía la ganancia máxima por cada peso invertido

Análisis de datos

Los propósitos que guiaron el análisis son:

- Identificar el tratamiento empleado para explorar el contenido de las representaciones en contextos simulados.
- Documentar las conjeturas que expone el alumno cuando ha explorado múltiples representaciones.

El análisis de las grabaciones, el trabajo escrito por los equipos, así como las notas del entrevistador, muestran las diversas estrategias que los equipos emplearon para explorar las representaciones (numérica, gráfica y algebraica), así como de las cuales se mencionan las siguientes:

Equipo (S – A). El equipo interpreta el texto e identifica las variables; Precio, Número de álbumes, Ingreso, Costo y Ganancia, generando la tabla de valores para las diferentes variables. Respecto del planteamiento de las ecuaciones matemáticas que están en juego, a partir de una tabla de valores, el equipo genera diversos valores para cada una de las variables sin describir las expresiones que se apeguen al contexto del problema. En la representación gráfica el equipo organiza los datos en los ejes cartesianos (variable independiente Número de Ejemplares y variable dependiente Precio por álbum) (Figura 1 y 2).

Precio	Álbumes	Ingreso	Costos	Ganancia	S-J
		$I = (P)(A)$	$C = (P)(N) \cdot A$ $C = (P)(N) \cdot A$	$G = I - C$	
240	7000	1680000	695000	985000	
235	7300	1715500	720500	995000	
230	7600	1748000	746000	1002000	
225	7900	1777500	771500	1006000	
220	8200	1804000	797000	1009000	
215	8500	1827500	822500	1008000	
210	8800	1848000	848000	1000000	
205	9100	1865500	873500	992000	
200	9400	1880000	899000	981000	
195	9700	1891500	924500	967000	
190	10000	1900000	950000	950000	
185	10300	1905500	975500	930000	
180	10600	1908000	1001000	907000	
175	10900	1907500	1026500	881000	
170	11200	1904000	1052000	852000	
165	11500	1897500	1077500	820000	
160	11800	1888000	1103000	785000	
155	12100	1875500	1128500	747000	
150	12400	1860000	1154000	705000	
145	12700	1841500	1179500	662000	
140	13000	1820000	1205000	615000	
135	13300	1795500	1230500	565000	
130	13600	1768000	1256000	512000	

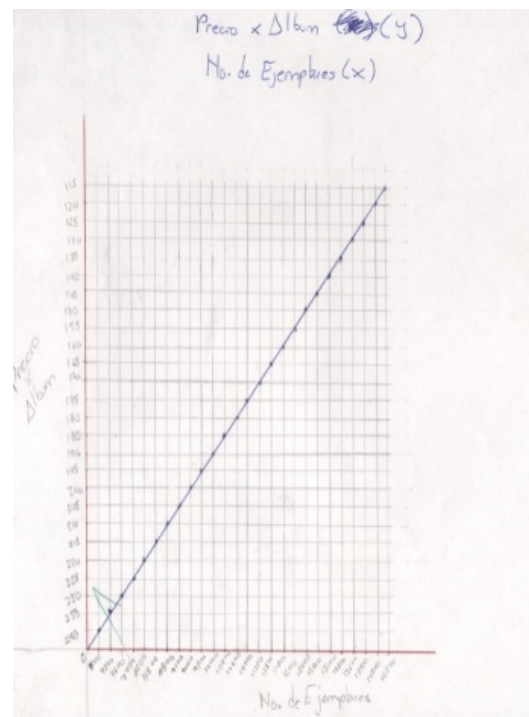


Figura 1. Exploración del contenido en la tabla numérica y ubicación de la información en la representación gráfica

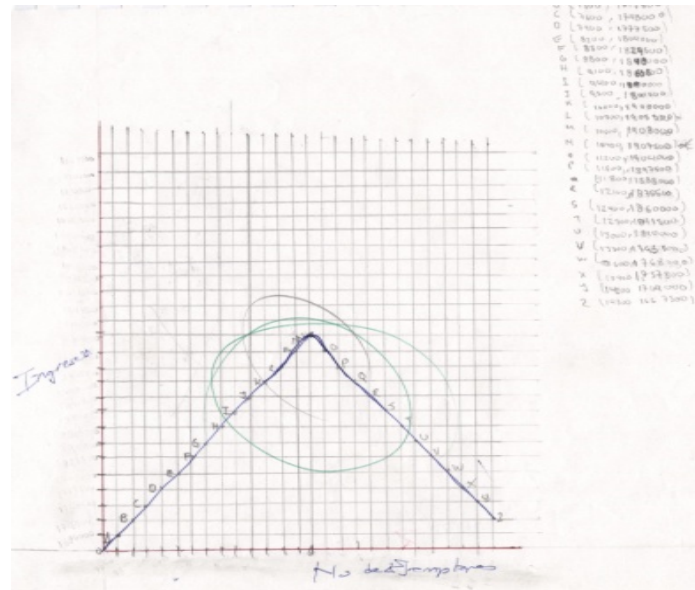


Figura 2. Identificación de las variables en el plano cartesiano, así como la información obtenida en la representación numérica

En este sentido la formulación del modelo que mejor se ajuste a los datos del problema dan cuenta que existen obstáculos. En este aspecto, cabe resaltar que los problemas de modelización de funciones lineales presentan serias dificultades, ya que no logran utilizar conocimiento matemático disponible, como es el de pendiente de la ecuación lineal y aun más para ecuaciones de segundo grado. Particularmente el tratamiento de la información en la representación gráfica fue importante ya que emplearon los datos obtenidos en la representación numérica para convertirlos a la gráfica identificando las variables dependientes e independientes, así como el uso de la graduación para la ubicación de los valores en la gráfica, de esta forma se construyeron dos gráficas las cuales dan cuenta de un comportamiento lineal y parabólico de los datos. Integrando los aspectos conceptuales, es decir, el equipo reconoce y da significado a los conceptos en la resolución de problemas, ya que determina puntos de intersección con el eje x, determina puntos de corte con el eje Y, interpreta y da significado a las variables que interviene en el fenómeno. El equipo también presenta tratamientos pertinentes para ambas representaciones sin establecer la expresión matemática que modele la situación.

Discusión

Los primeros acercamientos se desarrollaron a través de la construcción de tablas de valores, para identificar las interpretaciones que realizan los alumnos del contexto, eviden-

ciendo las variables y constantes, no obstante para algunos alumnos la identificación de los diferentes valores en las tablas, tanto para los Costos como para el Ingreso, son expuesto en un contexto matemático y no acorde con el evento expuesto, mientras que para otros la identificación de las variables se realizan considerando el contexto y desarrollan el tratamiento de la información en el contexto, ello da muestra de la influencia que adquiere la primera representación por ser la que inicia el proceso de resolución del problema, siguiendo un acompañamiento diseñadas con la misma finalidad del procesos.

Por otra parte, durante la experiencia los estudiantes, manifestaron la familiaridad que tienen cuando han explorado las representaciones mediante tratamientos para identificar contenidos que no son obvios a simple vista, los equipos exhibieron dichos tratamientos durante la experiencia, es decir se identificaron patrones durante su análisis, así como la elección de las representaciones están vinculadas con las representaciones analizadas en clase. Respecto al tratamiento que se aplicó en las representaciones fue cuantitativo y/o cualitativo, la cual se interpretó de manera puntual y/o global de acuerdo con las características particulares del contenido.

En cuanto a los problemas contextualizados evocados introductorios de aplicación (D'Amore, Fandiño y Marazzani, 2003) los cuales se presentaron al inicio del proceso, y durante toda la experiencia didáctica, parece ser que algunos estudiantes quedan anclados en la situación de la vida real y no descontextualizan, es decir establecen patrones ante situaciones que consideran son similares a las vistas en clase, obviando las condiciones propia de la situación expuesta.

Conclusiones

- Durante el diseño de las actividades es fundamental favorecer el pensamiento flexible, pues fue evidente, la tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentaban las ideas matemáticas.
- El proceso de aprendizaje durante el uso de contextos simulados, sufrió altas y bajas, principalmente en las actividades para construir o interpretar las situaciones que se planteaban.
- Las representaciones empleadas fueron gráfica, numérica y algebraica, cuyo tratamiento fue de tipo cuantitativo.

- La manera en que se organizaron las actividades en el curso, es decir, trabajo en equipo, exposiciones y discusión grupal, fueron elementos que aportaron para que el alumno pudiera exponer sus ideas y conjeturas.

Referencias

- Ausubel, D.; Novak, J. y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa, *Un punto de vista cognoscitivo* (2ª. ed.). Trillas. México.
- Benítez Pérez A. y García Leticia M. (2009). La importancia de las representaciones en la resolución de problemas. *2do. Congreso Internacional de Orientación Educativa y Vocacional, Baja California*, impreso CD ROM.
- Benítez, A. (2010). Estudio Numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3, *Revista Educación Matemática* 22(1), 5-30.
- Duval, R. (2000), *Basic Issues for Research in Mathematics Education*, in Proceedings of the 24nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I, 55-69.
- Duval R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*. (pp. 311-335). North American Chapter of PME: México: Cinvestav-IPN.
- D'Amore, B., Fandiño, M.I. y Marazzani, I. (2003). "Ejercicios anticipados" y "Zona de desarrollo próximo": comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon* 57, 357-378.
- Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Riedel-Kluwer A.P.
- Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning*, (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale NJ: Erlbaum A.P.
- Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Agradecimiento

Las autoras agradecen el patrocinio otorgado por la Comisión y Fomento a las Actividades Académicas [COFAA-IPN] para realizar y presentar este artículo.

Las investigaciones con números de registro **20100459** y **20100678** han sido apoyadas por la SIP del IPN.