EL CONCEPTO LÍMITE EN BACHILLERATO: ¿INTUICIÓN O CONCEPTUALIZACIÓN?

SALVADOR HERNÁNDEZ VACA
Dirección de investigación y desarrollo, Centro de Ciencias de Sinaloa

SILVIA EVELYN WARD BRINGAS
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Sinaloa

RESUMEN: En el presente trabajo se reflexiona sobre el tránsito de la intuición a la conceptualización de la noción matemática del límite en bachillerato, para ello se realizó un estudio de caso acerca del concepto límite que promueve un profesor en el aula, considerando como eje metodológico la reflexión-acción, e incluye componentes de la investigación-acción. Los datos se recopilaron en dos momentos: primero, se realizaron registros de los diálogos entre el docente y sus estudiantes; y posteriormente una entrevista semiestructurada entre el investigador y el docente. Encontrando que el docente centra la enseñanza del límite en una destreza muy estereotipada, que consiste en fomentar la simplificación algebraica de funciones polinomiales y racionales elementales para obtener numéricamente un valor operativo del límite dejando de lado la parte conceptual.

PALABRAS CLAVE: Límite, intuición, deducción, definición, modelo de enseñanza.

Introducción

Esta investigación se integra a numerosos reportes de investigación que documentan la notoria dificultad que tiene tanto el docente como los estudiantes para entender el concepto límite, las creencias acerca del concepto, son hazañas intelectuales que han evolucionado históricamente (Oehrtman, M., 2009). Investigaciones previas han focalizado minuciosa y exhaustivamente las caracterizaciones ingenuas de los estudiantes acerca del concepto límite (Sierpinska, 1987).

La intuición y la matemática han estado relacionadas desde los inicios de la civilización, ellas aparecen en todas las culturas como un signo de estar y ser en la explicación del mundo. La solución a un problema matemático proviene de interrogantes sobre el significado de lo que acontece, similar a la solución de la expresión artística pujando por encontrar el habla, color, notas, formas que traduzcan su significado. En ese transitar, la importancia de la idea de límite en matemáticas adquiere las dimensiones de lo humano, donde el conocimiento matemático proyecta la propuesta de observar el mundo desde la mirada humana y el pincel que lleva consigo el lenguaje. En este proceder creativo existe una didáctica, Comenius en su obra "La Didáctica Magna" hablaba de una escuela para todos, en donde distinguía diferentes estratos, según la edad, y a cada uno de éstos señalaba un determinado programa de instrucción. No se trataba de cambiar temas, sino de tratar los mismos con maneras diversas a medida, precisamente, de la posibilidad de comprensión de los alumnos, y considerados desde un punto de vista siempre más amplio. Estas ideas nos condujeron a la interrogante ¿Cuál es la interpretación epistemológica que promueve primordialmente el docente en el aula y, a cuál modelo de enseñanza se adhiere primordialmente el profesor?, con el objetivo de identificar la postura epistemológica y el modelo de enseñanza del que se derivan las estrategias didácticas que el docente utiliza para la enseñanza del concepto límite en bachillerato.

Metodología

La investigación en la que sustentan los resultados presentados, es de corte etnográfica, sustentada en desarrollo profesional de los docentes está identificada con el esquema de reflexión-acción, planteado por (Schön, D., 1998), e incluye componentes de la investigación-acción de (Elliot, E., 1996). Participaron 35 alumnos y el docente de la clase observada. Para hacer la interpretación cognitiva de las observaciones utilizamos la llamada triada de la enseñanza propuesta por (Potari, D., y Jarawoski, B., 2002). Los resultados obtenidos son de particular interés para los docentes de los cursos iniciales de cálculo y a los estudiosos de la enseñanza de las matemáticas.

Discusión de resultados

El brevísimo recorrido que hicimos en la introducción nos lleva al encuentro con la narrativa, espacio donde son posibles propuestas para interpretar la visión del mundo humano y su proposición de vivencias en ese mundo donde habitar con números y formas es dar un sentido didáctico al vivir social. La imaginación y el concepto límite acompañan al conocimiento, a la matemática. La novela "Alicia en el país de las maravillas" de Lewis, Caroll, su interpretación lleva a varios caminos, por la multitud de lecturas que se pueden sacar de sus páginas, en una primera revisión, se puede encontrar un cuento para niños, desbordante de ilusiones fantásticas que llevan en una espiral de personajes increíbles y situaciones disparatadas, un reflejo de esas conversaciones absurdas con más risas que palabras de las que gustan mantener los niños cuando empiezan a manejar lenguaje y conceptos. Como nos lo hace ver el siguiente segmento, equivalente al concepto matemático de "límite".

> **Profesor:** Haber muchachos vamos a ver ¿Qué entienden por límite?
>
> **A1:** Que llega a un punto determinado y que de ahí no pasa, frontera.
>
> **A2:** Cuando voy por mi novia, la suegra nos pone un límite, nos pone la hora de regreso.
>
> **A1:** Que te vas acercando.
>
> **A1:** Es como una aproximación.
>
> **A3:** Hasta el infinito.
>
> **A4:** Es contrario al infinito porque tiene un tope.
>
> **A10:** La terminación, final, el alcance máximo…
>
> **A6:** Límite de tiempo.
>
> **A1:** Límite de velocidad.
>
> **A9:** En una carrera la meta es un límite.
>
> **A10:** El velocímetro del carro.
>
> **A11:** La temperatura de una persona, por ejemplo, para los adultos es de 36ºC.
>
> **A9:** En el estacionamiento he visto el límite de altura.
>
> **Profesor:** Una frontera es un límite matemático, luego lo vamos a ver. Hey, ¿A dónde van?
>
> **A12:** Es el límite de la clase, se acabó.

Las líneas anteriores nos proporcionan la riqueza intuitiva de la categoría "límite". Dicho concepto metafórico del límite, no conoce de límites en la imaginación del estudiante, desde el lenguaje materno se pueden colapsar todas las dimensiones para explorar el concepto límite, tan rico como el lenguaje materno mismo. No obstante, cuando se analiza la novela de Alicia en el País de las Maravillas, se llega a la conclusión de que sólo pudo haber sido escrita por una mente matemática acostumbrada a deducir "partiendo de lo ilógico", no se pudo escribir tal novela de manera inocente. Además, los niveles de interpretación de esta novela son muchos, desde los más simples, que se fijan en la caricatura, hasta los más profundos, ésos que saben encontrar una crítica a la sociedad atada a unas normas impuestas por el poder establecido.

En el terreno de la educación matemática, la noción intuitiva es fundamental, es el punto de partida para el razonamiento deductivo, la creatividad de las expresiones metafóricas sobre el concepto límite, es esa creatividad el punto de partida para entrar al razonamiento deductivo porque la verdad matemática también existe como una forma abstracta de estructura. Aunque el mundo de Alicia parece dejado al azar, lleno de absurdos, en realidad tiene una estructura lógica. Podemos decir que el País de las Maravillas tiene sus propias reglas y formas matemáticas como lo tiene el concepto límite. En el ámbito de la esfera matemática, (Fischbein, E., 1999) ya anticipaba interpretaciones del límite como los enunciados por los alumnos, la enseñanza del "límite" parte de las ideas intuitivas para arribar al conocimiento formal, como una premisa inevadible en la génesis de los objetos matemáticos que para Fischbein, se compone básicamente de dos elementos: intuición y deducción.

Pero, (Shavenson, R., Stern, P., 1981) nos alertan en el sentido de que no bastan las intuiciones, es necesario el otro lado de la moneda: la deducción ya que las intuiciones "son reglas implícitas e inconscientes, se emplean en una gran variedad de tareas para seleccionar la información, clasificar objetos o personas o revisar su conocimiento. Pero, a pesar de que en general son completamente útiles, algunos casos nos llevan a sistemáticos y severos errores". Protegiéndose de las limitaciones de las intuiciones, veamos como el profesor empieza, desde la matemática a abordar el concepto límite.

> **Entrevistador:** ¿Cómo enseñas el concepto límite?
>
> **Profesor:** Límites por aproximaciones, acercándonos poco a poco al punto límite como una aproximación.
>
> **Entrevistador:** ¿Qué actividades realizas para enseñar límites?
>
> **Profesor:** No encuentro muchas herramientas, de cómo poder diversificar la forma de que ellos capten el concepto límite no de la manera popular, de que lo puedan interiorizar desde el punto de vista matemático, se me dificulta y te confieso trato de verlo lo más rápido, llevármelos a la práctica de cómo calcular límites, de hacer ejercicios de manera directa y de forma indeterminada, no me centro en el concepto límite.
>
> **Entrevistador:** Entonces, ¿En qué te centras para enseñar límites?

Profesor: En la parte operativa.

Entrevistador: ¿En procedimiento de calcular límites?

Profesor: Así es, vemos límites matemáticos que es lo que nos interesa, de una variable, de una función y enseguida el cómo calcularlos. El método de aproximaciones sucesivas y después el método de sustitución directa que ellos se den cuenta que hay un método más rápido que es lo mismo, pero el concepto exactamente no.

Entrevistador: ¿Enseña la definición épsilon-delta del límite?

Profesor: No, porque ellos no lo comprenden y creo que les complicaría más las cosas, pienso que esos son temas para los chavos de físico-matemáticas o de ingeniería.

Entrevistador: ¿Para expertos?

Profesor: Sí, yo pienso que ellos, con que logren manipular lo que corresponde a límite es suficiente, porque es lo que van a ocupar en profesional.

Entrevistador: En eso de la sustitución directa que menciona ¿para qué funciones?

Profesor: Vemos funciones algebraicas fundamentalmente, solamente les menciono casi siempre dos o tres límites de funciones trascendentales, los muy específicos, con que ellos logren asimilar los cálculos de los límites algebraicos es más que suficiente desde mi punto de vista.

Entrevistador: ¿Cuál considera que es la dificultad más grande de ellos?

Profesor: Ellos batallan en los casos del límite en donde aparece un hueco, una discontinuidad, tienen que factorizar y buscar una función equivalente.

Entrevistador: ¿Dónde aparecen indeterminaciones?

Profesor: Si, ahí ellos batallan para factorizar, ellos siguen diciendo que cero entre cero es cero y no hallan que hacer algunos ponen cero y otros indeterminación matemática y dan el problema por terminado, pero esa no es la intención, no quiere decir que el límite de la función no exista a la mejor si existe, hay que buscar una función equivalente.

Otro gigante de la educación matemática (Polya, G., citado en Sinicrope, R., 1995) afirmaba que el razonamiento intuitivo es la imaginación antes de la demostración de un teorema matemático, es la imaginación antes de llevar a cabo algunos detalles, es la combinación de observaciones y el seguimiento de analogías, es el ensayar, intentar una y otras vez. Más adelante citando a Kant sostuvo, "toda cognición humana empieza con intuiciones, luego se siguen las concepciones y finaliza en grandes ideas", comentó Polya que él re-escribiría la oración anterior de la siguiente forma: "el aprendizaje comienza con una acción y una percepción, luego siguen las palabras y conceptos". Siguiendo al parecer esta lógica el docente da seguimiento a los límites formalizando ahora el concepto, el siguiente párrafo ejemplifica cómo se accede al conocimiento formal del límite:

> **Profesor:** Ahora vamos a ver la definición de límite de una variable. Escriban, un número '*k*' es el límite de una variable independiente '*x*', si en un proceso de variación de '*x*', se aproxima infinitamente al número '*k*', de tal manera que, a partir de cierto momento el valor absoluto de la diferencia '*x* menos *k*' es infinitamente pequeña y es menor que un número positivo infinitamente pequeño el cual se representa como ε. Una especie de E manuscrita y es Épsilon, es como la abuelita de la E, los matemáticos la llaman Épsilon y representa cantidades infinitamente pequeñas. Si el valor absoluto de '*x* menos *k*' es menor que Épsilon, entonces '*k*' es el límite de '*x*' y se dice '*x* tiende a *k*', $x \to k$, ¿Qué representa la flechita?
>
> **AO12:** Tiende
>
> **AO12:** ¿Por qué se llama Épsilon?
>
> **Profesor:** Creo que así se llama la E en griego, nuestros orígenes son grecorromanos.

En el diálogo anterior se observa como en el concepto formal de límite intervienen símbolos que los alumnos deben abstraer, como por ejemplo épsilon, el docente les describe como se representa y les expresa el significado para las matemáticas de esa representación, en este sentido es importante señalar que la comunicación verdadera presupone una actitud generalizadora que es una etapa avanzada en el desarrollo del significado de las palabras. Las formas superiores del intercambio humano son posibles sólo porque el pensamiento del hombre refleja una realidad conceptualizada, y ésta es la razón por la cual ciertos pensamientos no pueden ser comunicados a los niños, aunque estén familiarizados con las palabras necesarias, pues puede fallar el concepto adecuadamente generalizado que asegure la comprensión total. (Vigotsky, L, 2010).

Los límites también se pueden formalizar a través de las propiedades de los mismos, el docente optó por comentarlas mediante ejemplos, las propiedades se ven del libro de texto, (Fuenlabrada, T, 2001) en el pizarrón el docente va explicando ejemplos de cada una de ellas y les comenta a los estudiantes "*de eso se trata, de sustituir pero con ciertas* *reglas"*. La forma de inducir al conocimiento de las propiedades del límite, está ejemplificada así:

> **Profesor:** Hay unas propiedades de los límites, por favor abran su libro en la página 33. No siempre se va a resolver los límites con tablas, utilizaremos esos teoremas. ¿Qué pasa si sustituimos el 3, en la expresión, cuanto da?
>
> **A1:** Siete
>
> **Profesor:** De eso se trata de sustituir pero con ciertas reglas, ¿Qué dice el primero?
>
> **A2:** Teorema de una constante, *El límite de una constante c, cuando x tiende a un valor a,* es la constante

$$\lim_{x \to a} -3 = -3$$
$$\lim_{x \to 10} 2 = 2$$
$$\lim_{x \to -1} 4 = 4$$

Los diálogos anteriores pueden hacer pensar que la clase tiene un orden, como en la matemática misma; si se recuerda que en matemáticas hasta el final se formaliza, los límites se formalizaron con los teoremas aun cuando no se dieron las condiciones, ni se demostraron, cada uno de ellos se ejemplifica para que se apliquen, pero estas reglas fueron dadas como algo ya establecido falto el análisis de las diferentes representaciones de las mismas para que se significaran.

En los ejercicios de límites el docente pone énfasis en el algoritmo de los métodos algebraicos de resolución con la intención de que los alumnos mecanicen un procedimiento algorítmico. Un algoritmo según Ballester (2000) es "una regla exacta sobre la ejecución de cierto sistema de operaciones, en un determinado orden, de modo que resuelvan todos los problemas de un tipo dado". De aquí que se obtiene el concepto de sucesión de indicaciones con carácter algorítmico (SICA).

La resolución de un límite algebraico similar significa que se resuelven ejercicios del mismo tipo, aprendiendo la sucesión de pasos que lleva a la solución, se realizan varios ejercicios del mismos tipo y con el mismo grado de complejidad, la intensión es que los estudiantes puedan manejar los límites operativamente, esto se aprecia cuando existen incertidumbres y se procede a la ejecución, como ésta:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$$

Profesor: ¿Qué pasa si sustituimos directo?

AO1: Cero entre cero

Profesor: Busquemos una expresión equivalente, ¿ x^2-16 es?

AO1: Diferencia de cuadrados

Profesor: ¿Cómo lo factorizamos? Lo acabamos de ver en el primer ejercicio

AO2: Binomios conjugados

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=x+4$$

Profesor: Entones, ¿da?

AO3: Ocho

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x\qquad)(x\qquad)}{x-1}$$

Profesor: Luego dos números que multiplicados den el tercer término y sumados el segundo, -2 y -1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x-2=-1$$

Para los ejercicios abordados en el dialogo anterior se puede elaborar una SICA, los ejercicios tratados son del mismo tipo lo que indica la mecanización de los límites algebraicos.

Conclusiones

El profesor como responsable de la selección y conducción de los temas a enseñar (Potari, D, y Jaworski, B., 2002), observamos en él que inicia el tema de límites en forma de plática con la intensión de saber que entienden los alumnos por límite y suavizar la enseñanza del nuevo concepto. Se explora semánticamente el concepto de "límite", con toda la riqueza de los conceptos intuitivos del límite. Durante el dialogo que sostiene el docente con sus estudiantes, induce a la vez, él mismo, las categorías que más tarde formaliza, los conceptos como: aproximaciones sucesivas, propiedades de los límites, sustitución directa, entre otras, para poder calcular el límite. Además comenta el profesor la dificultad que hay entre sus estudiantes para entender la definición épsilon-delta, prefiere evadir está explicación del concepto límite, es un concepto que a juicio del docente, los estudiantes no están maduros para interiorizar.

La dificultad del cálculo subyace, por una parte, en que la experiencia empírica está muy alejada de las categorías como: límite y las cantidades infinitamente pequeñas o grandes pues sus experiencias distan mucho del significado conceptual de estos en matemáticas. Por otra parte, la poca habilidad operativa en la simplificación de expresiones que poseen los estudiantes en temas matemáticos previos al cálculo, como son: álgebra, geometría y la trigonometría genera una discusión más operativa que conceptual del límite. Todo esto contribuye a que el cálculo se vuelva para ellos un entramado sin fin de fórmulas y, por consiguiente, con un significado vacío para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Ballester, S., (2000). Et. Al., Metodología de la enseñanza de las Matemática. Tomos I y II. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Elliott, J., (1996). El cambio educativo desde la investigación acción. España: Morata.

Fischbein, Efraim, (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning, Educational Studies in Mathematics, vol. 38, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Fuenlabrada, Samuel. (2001). Cálculo Diferencial. McGraw-Hill Editores, México, D.F.

Oehrtman, M., (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphor for limit concepts, Journal for Research in Mathematics Education, vol 40, num 4.

Potari, D, y Jaworski, B., (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: using the teaching triad as a tool for reflection and analysis, Journal of Mathematics Teacher Education, vol. 5, num. 4.

Schön, D., 1998, El profesional reflexivo. Cómo piensan los profesionales cuando actúan. España: Paidós.

Shavenson, R., Stern, P., (1981). Research on teachers' pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior, Review of Educational Research, Winter, 1981, vol. 51, num. 4.

Sierpinska, A., 1987, Humanities students epistemological obstacles related to limits, Educational Studies in Mathematics, 18.

Sinicrope, Rose, 1995, "A Polya sampler", Mathematics Tacher, vol. 88, num. 3.

Vigotsky, Lev, S., (2010). Pensamiento y lenguaje. Ediciones Paidós, Barcelona, España.