# LA COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE MATEMÁTICO POR MEDIO DEL ANÁLISIS DE LAS DEFINICIONES EN UN CURSO DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

JOSÉ LUIS RAMÍREZ ALCÁNTARA / CÁNDIDO MANUEL JUÁREZ PACHECO
**Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico**

**RESUMEN:** El aprendizaje de los conceptos básicos de matemáticas discretas está relacionado con el dominio del lenguaje semi-formalizado en el que se expresan sus definiciones y teoremas. Tradicionalmente dicho lenguaje ha sido una fuente de dificultades para los estudiantes de Informática y Sistemas computacionales. En este trabajo se describe un enfoque que propicia la comprensión del lenguaje matemático en los temas básicos de un curso de matemáticas discretas.

Considerando que el texto de matemáticas se forma con componentes del lenguaje de la lógica de primer orden y símbolos propios del contenido matemático, es necesario que los estudiantes reconozcan la estructura lógica del enunciado, los símbolos propios de las matemáticas y la forma de representarse en el lenguaje pictográfico. El enfoque propuesto se centra en el análisis de las definiciones donde se pone en juego el conocimiento que tienen los estudiantes tanto del lenguaje lógico como del lenguaje matemático y se articula con las diferentes representaciones que se pueden tener de un concepto dado.

La propuesta, desde el punto de vista pedagógico, se fundamenta en la segunda generación de la Teoría de la Actividad, en la cual se hace uso de los conceptos: capacidad, habilidad y base de orientación para la acción (BOA).

De acuerdo con la teoría, se respondió a las siguientes preguntas: ¿cómo se caracteriza la "habilidad para analizar una definición en matemáticas"? ¿Cómo debe presentarse la BOA en la que se explicitan las acciones que se deben realizar para llevar a cabo el análisis de las definiciones?

**PALABRAS CLAVE: Teoría de la actividad, lenguaje matemático, habilidad, base de orientación.**

## Introducción

Desde hace varios años, en el área de ciencias de la computación, se han hecho diversas propuestas para incluir en la currícula los denominados *Métodos formales (Boca, P., Bowen, J.P. & Duce, 2006)*. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes tiene dificultades para comprender y utilizar dichos lenguajes. El primer acercamiento que tienen los estudiantes de Informática y Sistemas computacionales con el lenguaje formalizado o semi-formalizado es en el curso de Matemáticas discretas, en dicho curso los estudiantes tienen que comprender el uso del lenguaje de la Lógica de primer orden (LPO) y al mismo tiempo deben dominar el lenguaje matemático. Pero, en general, los estudiantes que ingresan al nivel universitario en nuestro país, desconocen el lenguaje de la LPO y el de las matemáticas y se da la situación que describe J. F. Ortega de la siguiente forma:

> *"El desconocimiento del lenguaje propio de las matemáticas produce errores de construcción y de interpretación, crea problemas para la comprensión de los nuevos conceptos que se introducen y deficiencias en las respuestas en exámenes, dificultando la comunicación entre el profesor y los alumnos. Además, estos problemas de comunicación generan en el alumno una reacción de antipatía y rechazo hacia las matemáticas, que en algunos casos resulta difícil de superar" (Ortega, 2002. pp 2-3).*

Las dificultades señalas por Ortega se acentúan cuando se estudian las definiciones de los conceptos matemáticos, en textos semi-formalizados, donde además de los conectivos y cuantificadores se utilizan una serie de símbolos propios del tema en estudio y una notación propia de las matemáticas. Esto ha dado como resultado que la mayoría de los estudiantes no pueden leer adecuadamente los textos dematemáticas, ni los documentos en Internet que utilizan un lenguaje más formalizado. Los estudiantes sólo leen los enunciados informales y "*le dan la vuelta a las definiciones*" perdiendo una parte importante del conocimiento matemático. En el caso de los estudiantes de Informática y sistemas computacionales, se han identificado problemáticas específicas en la comprensión del lenguaje lógico y del lenguaje matemático.

## Dificultades en la comprensión del lenguaje lógico y matemático

En los cursos de matemáticas discretas, y en general de matemáticas del nivel universitario, se presentan las dificultades asociadas a la comprensión de los conectivos lógicos, en particular la implicación material y el uso de los cuantificadores anidados, como lo han reportado tanto los investigadores en didáctica de las matemáticas, como del área de las ciencias de la computación (Barwise & Etchemendy, 1998; Almstrum, 1999; Duran-Guerrier, 1996; Duran-Guerrier & Arsac, 2003; Dubinsky 1997, Dubinsky & Yiparaky, 2000).

Las dificultades que se han reportado se refieren también a la negación de los enunciados en matemáticas (Barnard, 1995; Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004) y la falta de habilidad para traducir (o formalizar) enunciados tanto del lenguaje natural como del lenguaje informal de las matemáticas al lenguaje formal de la LPO y de las matemáticas (Selden

&Selden, 1995; Ramírez & Juárez, 1997; Hersh, 1997; Maier, H. 1998; Ramírez, 2000; Oller, 2000; Ferrari & Geraudi, 2001; Epp, 2003).

Las dificultades señaladas son un obstáculo para la comprensión de las definiciones en matemáticas.

## Propuestas para la comprensión del lenguaje lógico y matemático

Como respuesta a las problemáticas identificadas, se han propuesto diferentes alternativas para propiciar que los estudiantes logren desarrollar las habilidades necesarias para comprender tanto el lenguaje de las matemáticas como el uso del lenguaje de la LPO en diferentes métodos formales aplicados en las ciencias de la computación. Las investigaciones se han realizado en los primeros años de la universidad.

En cuanto al aprendizaje y comprensión del lenguaje de las matemáticas, las propuestas de W. W. Esty (1994), I. Stewart & D. Tall (1996), D. Velleman (1996), D. Gries & F. B. Schneider (1993) & J.A. Amor (1994) describen y explican el lenguaje de la LPO que se usa en el lenguaje matemático. También ponen especial énfasis en la forma de escribir y representar las definiciones en matemáticas y muestran cómo se usan las definiciones en los esquemas de razonamiento o deducción tratando de preparar a los estudiantes para las demostraciones en matemáticas.

Tomando en cuenta estos antecedentes, en la investigación que aquí se reporta se responde a las preguntas: ¿cómo se caracteriza la “habilidad para analizar una definición en matemáticas”?

## La habilidad para analizar una definición en matemáticas desde la perspectiva de la Teoría de la Actividad (TA).

Actualmente se reconocen tres generaciones de la TA(Engeström, 1987), la primera generación en la que se plantea a la actividad como objeto de estudio, centra su atención en la interacción entre sujeto y objeto e introduce a la mediación como elemento clave en la reconstrucción dialéctica del sujeto y el objeto (Vygotsky, 1988). Los conceptos centrales en esta generación son: la mediación, la interiorización y la zona de desarrollo próximo.

La segunda generación evidencia la importancia del contexto de la actividad y explicita el conjunto de relaciones sociales que también mediatizan la relación del sujeto con el objeto. Otra de sus aportaciones es la definición y precisión de la estructura de la actividad, compuesta ésta por acciones y operaciones (Leontiev, 1984), esta caracterización permite aclarar el concepto de *interiorización* propuesto por Vygotsky. En esta generación se refina el proceso de interiorización en la asimilación de nuevos conocimientos con la "*Teoría de la formación por etapas de la actividad cognoscitiva*", propuesta de Galperin (1969), la cual tiene repercusiones didácticas, en particular en el proceso de aprendizaje en la escuela, en la que incorpora el concepto de *Base Orientadora de la Acción* (BOA) como un elemento de apoyo en el proceso de asimilación de un nuevo conocimiento.

Engeström (1987), en la tercera generación, incluye dentro del análisis el contexto en el cual están inmersos tanto el sujeto, el objeto y los artefactos mediadores, con la finalidad de explicar cómo una comunidad se apropia de un nuevo conocimiento y el conjunto de prácticas que se le asocian e introduce cuatro niveles de contradicciones en el *Ciclo expansivo* de un sistema de actividad para explicar el desarrollo de un grupo (Zona de desarrollo próximo grupal).

Una de las derivaciones de la segunda generación de la teoría de la actividad representada por Tallizina (1998) y Hernández (1989) retoma las propuestas de Leontiev & Gaperin y, para el caso de la didáctica de las matemáticas, propone la incorporación de los conceptos de capacidad y habilidad en el dominio del contenido matemático. La estructura de la habilidad se basa en la estructura de la actividad propuesta por Leontiev (figura 1).

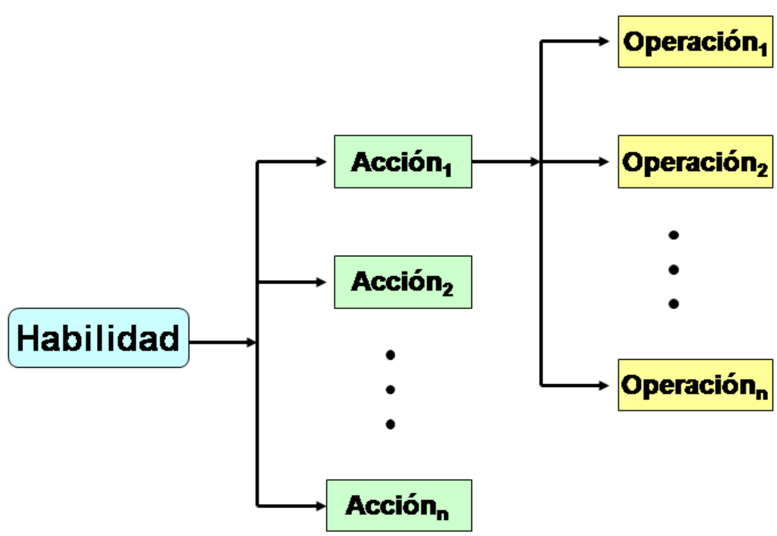



**Figura 1: Estructura de la habilidad.**

La habilidad está constituida por un conjunto de acciones y cada acción por un conjunto de operaciones. El proceso de formación de habilidades implica una sistematización de las acciones que la componen, requiere de una ejecución consciente por parte del sujeto, no es sólo una repetición sistemática. El grado de desarrollo de la habilidad en un sujeto se observa por la ejecución exitosa de algunas de las acciones que éste realiza en la tarea asociada. El sujeto ha desarrollado la habilidad cuando domina totalmente el sistema de acciones que la constituyen.

En nuestro caso debemos reflexionar sobre cómo llevamos a cabo el análisis de una definición para identificar las acciones que la constituyen, en este caso, en una primera aproximación se identificaron las siguientes:

a. Diferenciar entre la expresión de la definición en lenguaje natural y en el lenguaje matemático;

b. Identificar las entidades matemáticas que aparecen en ella;

c. Dar ejemplos de objetos que satisfacen la definición y de aquellos que no la satisfacen;

d. Buscar diferentes formas de representarla;

e. Identificar su estructura lógica,

f. Establecer su negación;

g. Encontrar equivalencias lógicas de la definición y, finalmente,

h. Generalizarla.

En las acciones a, e, f y g se pone en juego el dominio del lenguaje matemático ya que se debe pasar del enunciado expresado en lenguaje natural a su expresión en el lenguaje matemático y viceversa, además el análisis que permite determinar la estructura lógica de la definición, su negación y sus equivalencias lógicas lleva implícito el conocimiento del lenguaje lógico que es parte fundamental del lenguaje matemático. Las acciones c y d complementan el proceso de comprensión de una definición ya que mediante ellas se busca que se usen los registros gráficos y se identifiquen los objetos que satisfacen o no una definición dada. La generalización de la definición con lleva una reflexión más profunda para identificar qué aspectos de la definición son generalizables o no y cómo debe expresarse esa generalización tanto en lenguaje natural como en el lenguaje matemático.

Habiendo identificado las acciones que componen la habilidad en estudio, el siguiente paso es establecer la forma en que se presentarán esas acciones a los estudiantes, es decir debe diseñarse una BOA que sirva de apoyo o guía en el proceso de análisis de una definición.

## La BOA que apoya el desarrollo de la habilidad para el análisis de las definiciones en matemáticas

En las figuras 2 y 3 se muestra una forma de presentar la BOA para el análisis de una definición, ejemplificando cada una de las acciones que constituyen la habilidad.

**Análisis de la definición**

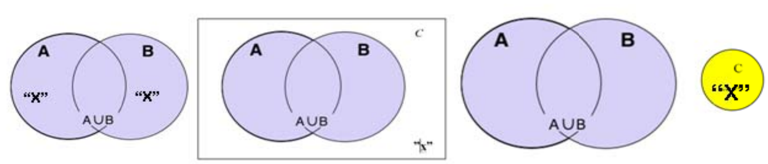
<table>
<tr><th>Base de orientación</th><th>Ejemplificación de la acción</th></tr>
<tr><td>a. Diferenciar entre lenguaje natural y lenguaje matemático</td><td>
<table>
<tr><th>Definición en lenguaje natural</th><th>Definición en lenguaje matemático</th></tr>
<tr><td>Si A y B son dos conjuntos, los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos forman otro conjunto llamado unión de A y B, escrito como A U B.</td><td>$A \cup B := \{ x \mid x \in A \vee x \in B\}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>b. Reflexionar sobre las entidades matemáticas de la definición</td><td>Definición de “conjunto”, concepto de “pertenencia” o “ser elemento de” un conjunto</td></tr>
<tr><td>c. Analizar diferentes representaciones de la definición.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>d. Dar ejemplos de situaciones en que se satisface la definición y en las que no se satisface.</td><td>
</td></tr>
</table>

***Figura 2. Acciones “a” a “d” presentadas a los estudiantes como ejemplo para el análisis de la definición***

**Análisis de la definición**

| Base de orientación | Ejemplificación de la acción |
|---|---|
| e. Identificar la estructura lógica de la definición | Si P(x) significa que x pertenece a A y Q(x) significa que x pertenece a B, la estructura lógica presente en la definición de la unión de dos conjuntos es: $P(x) \vee Q(x)$ |
| f. Establecer la negación de la definición | La estructura lógica de la definición: $P(x) \vee Q(x)$ y aplicamos a esta expresión la negación: $\neg(P(x) \vee Q(x))$, aquí hacemos uso de la equivalencia lógica: $\neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$ la negación de la unión de los conjuntos A y B sería: $\neg(A \cup B) = \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\}$ |
| g. Encontrar equivalencias lógicas de la definición | En este caso una expresión equivalente a: $P(x) \vee Q(x)$ sería poco natural, podríamos usar: $\neg(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ |
| h. Generalización de la definición | La unión de varios conjuntos: $A \cup B \cup C \cup \ldots \cup W = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C \vee \ldots \vee x \in W\}$ que puede sintetizarse como: $\bigcup_{\beta \in B} A_\beta = \{x \in U \mid \exists \beta \in B : x \in A_\beta\}$ |

***Figura 3. Acciones "e" a "h" presentadas como ejemplo para el análisis de la definición***

Un complemento fundamental de la BOA lo constituye el sistema de preguntas de control que propician la reflexión sobre las acciones que se van realizando y permiten evaluar el resultado de cada una de las acciones. Por ejemplo para la acción de diferenciar entre la expresión de la definición en lenguaje natural y el lenguaje matemático se pueden plantear las preguntas: ¿se puede expresar la definición de diferentes formas en el lenguaje natural? o ¿habrá dos o tres formas de expresar la definición en lenguaje natural? ¿Las diferentes formas de expresar la definición en lenguaje natural son equivalentes? Responder a estas preguntas permite, por un lado evaluar el resultado de la acción y por otro mejorar la comprensión de la definición en estudio. Las preguntas de control también permiten el proponer nuevos problemas y ejercicios que permiten una mejor comprensión de la definición en estudio.

En el proceso de ejercitación, la BOA debe usarse de manera sistemática hasta que se hayan interiorizado las acciones que constituyen la habilidad. La BOA presupone el desarrollo parcial de las habilidades para traducir enunciados entre los lenguajes matemático, pictográfico y lenguaje natural. Además de ser un medio para su desarrollo. Ésta BOA se presenta a lo largo del curso dentro del material que utilizan los estudiantes.

Con esta base de orientación y su aplicación en la ejercitación del análisis de las definiciones se proporciona a los estudiantes un medio para el desarrollo de la habilidad de lectura y la comprensión de los textos semi-formalizados de matemáticas.

La BOA propuesta se ha puesto en práctica en un curso introductorio de matemáticas discretas, en la modalidad de e-learning y se han obtenido resultados interesantes que han permitido reflexionar sobre diversos aspectos propios del contenido matemático. En un trabajo futuro se sistematizarán los resultados obtenidos en dos vertientes: las reflexiones que realizó el profesor participante y las preguntas que se plantearon los estudiantes, así como su desempeño al aplicar los conocimientos adquiridos durante el curso en los cursos formales de ciencias de la computación.

## Conclusiones

La segunda generación de la Teoría de la actividad ha permitido analizar y comprender la habilidad para analizar una definición en matemáticas, identificar las acciones que la componen permitió comprender, por un lado la complejidad que conlleva el comprender el lenguaje semi-formalizado de las matemáticas y por otro el proponer una BOA y las preguntas de control que sirven de apoyo a los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

El análisis de las acciones que deben realizarse para desarrollar la habilidad en estudio y las preguntas de control propuestas, también han permitido proponer un conjunto de actividades y problemas que permiten una mayor reflexión sobre el significado de los conceptos matemáticos y su definición.

## Referencias

*Almstrum, V., (1999)*."The Propositional Logic Test as a Diagnostic Tool for Misconceptions About Logical Operations", *Jl. Of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *18(3), 205-224.*

*Amor J. A. (1994).* "Sobre un curso de Análisis Lógico", *revistaEducación Matemática Vol.6 No.2. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica.*

*Barnad, T. (1995).* **"**The Impact of 'Meaning' on Students' Ability to Negate Statements**"**, *Proceedings of the 19th PME Conference, Vol.2, Recife, Brazil. p. 2-3, 2-10.*

*Barwise, J. y Etchemendy, J., (1998).* "Computers, visualization, and the nature of Reasoning"*, in T.W.Bynum & J. H. Moor, eds. The Digital Phoenix: How Computers are Changing Philosophy, London: Blackwell.*

*Boca, P., Bowen, J.P. y Duce, D.A. Eds., (2006).* Teaching Formal Methods: Practice and Experience, *Electronic Workshops in Computing (eWiC), BCS London Office, UK.*

Durand-Guerrier, V., (2003), Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.

Durand-Guerrier, V. y Arsac, G., (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, 295-342.

Durand-Guerrier, V. y Ben Kilani, I., (2004), Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien, Les Cahiers du Français Contemporain, 9, 29-55.

Dubinsky, E. (1997). On Learning Quantification, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16(213) 335-362.

Dubinsky, E. and Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification, CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 239–289.

Engeström, Y (1987) **Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research.** Helsinki, Finland: Orienta-Konsultit Oy.

Epp, S. S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly*, 110, No. 10. pp. 886 - 899.

Esty, W. (1998). "The Language of Mathematics". Montana State University. Ed Interna.

Galperin, P. Y. (1969). Stages in the development of mental acts. In M. Cole & I. Maltzman (Eds.), A handbook of contemporary Soviet psychology (pp. 249–273). New York: Basic Books.

Gries, D. y Schneider, F. B. (1993). *A Logical Approach to Discrete Math*. Springer Verlag.

Hernández, H (1989) El perfeccionamiento de la enseñanza de la matemática en la enseñanza superior cubana. Experiencia en álgebra lineal. Tesis Doctoral no publicada. La Habana. Cuba.

Hersh, R. (1997). "Math Lingo vs. Plain English", *The American Mathematical Monthly"*, Vol.104, n°1, pp.48-51.

Jamison, R.E. (2000). 'Learning the Language of Mathematics', *Language and Learning Across the Disciplines,* 4(1), 45-54.

Leontiev, A.N. (1984). **Actividad, Conciencia y Personalidad.** México:Cartago.

Maier, H. (1998). El conflicto para los alumnos entre lenguaje común y lenguaje matemático. *Grupo editorial Iberoamérica*. Querétaro, México.

Oller, C. (2000) "The Teaching of Formalization in First Order Logic and its Problems". *First International Congress on Tools for Teaching Logic.*

Ortega, J. F. "Lenguaje Matemático: Una experiencia en los estudios de Economía de la UCLM". Consultado el 28 de mayo del 2010 en: http://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:OJIW2J5X3g4J:www3.uclm.es/fcee-ab/index.php%3Foption%3Dcom_docman%26task%3Ddoc_download%26gid%3D188%26Ite-mid%3D100%26lang%3Des+%22Lenguaje+Matem%C3%A1tico:+Una+experiencia+en+los+estudios+de+Econom%C3%ADa+de+%22&hl=es&pid=bl&srcid=ADGEESgksNeY9Q9SV9uW1loy-Nqub4b7wJn7B6NFw5YpG-ChVP6FcLy2e-3gTVkLHT2zKxrT8FZqSwzi9c0DZQvgkCsecjMt5_7RDEvcJQfGvuobJVkpgBkGgbxYzERz12VUb_fytaJm&sig=AHIEtbRA_wjZ35zPbVWaRu3Ui-cZvQvAWg

Parnas, D. L., (1996). "Teaching programming as engineering" . In Dean N. and Hinchey M. (Eds.). *Teaching and Learning Formal Methods*, Academic Press.

Ramírez J. L. y Juárez C. M. (1996). **"***Problemas en el aprendizaje de la lógica de predicados: la traducción del lenguaje coloquial (escolarizado) a fórmulas bien formadas"* Memorias del RELME11, (Poster). Michoacán, México.

Ramírez J. L. (2000). "Análisis del modelo de descomposición genética de la cuantificación, en dos contextos: el contexto de los enunciados en matemáticas y el contexto no matemático de la representación del conocimiento con la lógica de primer orden", Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona.

Reinfelds, J. (1996). "Logic in CS-1 and CS-2".*DIMACS Symposium: teaching logic and reasoning in an illogical world.* Disponible en: http://dimacs.rutgers.edu/Workshops/Logic/cornellprogram.html

Selden, A. & Selden, J. (1996). The Role of Logic in the Validation of Mathematical Proofs. *The DIMACS Symposium on Teaching Logic and Reasoning,* Rutgers University, 25-26 July 1996.

Stewart I. y Tall D. (1996). The foundations of mathematics. Oxford University Press.USA.

Tallizina, NF. (1998) Los fundamentos de la educación superior. México, UAM-Ángeles Editores.

Velleman, D. (1996). How to Prove It: a Structured Approach. Cambridge University. Press. UK.

Vygotsky L.S. (1988). **El desarrollo de los procesos psicológicos superiores**. Barcelona. Grijalbo.