La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros

Rocío Guadalupe Balderas Robledo / David Block Sevilla
Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN

María Teresa Guerra Ramos
CINVESTAV-IPN-Monterrey

Resumen: La finalidad de este trabajo fue explorar la enseñanza actual de la noción de proporcionalidad teniendo como punto de referencia los conocimientos de los maestros. Para ello se aplicó un cuestionario a un grupo de 63 maestros de matemáticas de secundaria del estado de Nuevo León mediante el cual se analizó la resolución de problemas de proporcionalidad, la diversidad de procedimientos empleados y algunas propiedades con las que caracterizan a las relaciones de proporcionalidad. Los resultados indicaron que la mayoría de los maestros son capaces de resolver los problemas de valor faltante, reparto proporcional y comparación de razones y, usar diversos procedimientos para resolverlos. No obstante, en los problemas donde interviene escalas sucesivas, identificación de escalas y relación aditiva, los maestros fueron menos exitosos y tuvieron serias deficiencias conceptuales. Pocos fueron capaces de identificar las propiedades de las relaciones de proporcionalidad y construir argumentos claros para justificar la presencia o ausencia de la proporcionalidad en diferentes situaciones.

Palabras clave: Proporcionalidad, conocimientos de maestros, argumentación, enseñanza de la proporcionalidad.

Introducción

La noción de proporcionalidad se puede encontrar presente en diversas situaciones cotidianas y casi en todas las disciplinas científicas incluyendo las del área de sociales (Fiol &Fortuny, 1990), e incluso en arte (pintura, música). En México, esta noción se incluye en programas de estudio de matemáticas de primaria (de cuarto a sexto grado), de secundaria, y también se aborda en los niveles medio superior y superior.

En el nivel básico, la proporcionalidad juega un papel relevante ya que, se relaciona con otras nociones de matemáticas tales como: conversiones de unidades, figuras a escala, semejanza, trigonometría, funciones, razón de cambio. Estas relaciones favorecen a la comprensión tanto de las relaciones de proporcionalidad como de las otras nociones.

Diversos estudios cognitivos (Inhelden & Piaget, 1955; Hart, 1988, Noelting, 1981) y didácticos (Vergnaud, 1988; Block, 2001; Ramírez, 2004; Mendoza, 2007; entre otros), han mostrado la existencia de dificultades para resolver problemas de proporcionalidad y han dejado ver que estas dificultades, en particular el utilizar estrategias aditivas en lugar de multiplicativas, pueden provenir tanto de una cuestión de desarrollo del razonamiento proporcional, como de una enseñanza deficiente.

Con respecto a este último punto, cabe señalar que la enseñanza de la proporcionalidad ha tenido cambios sustanciales en el curriculum, principalmente en la manera en la que se reconstruye y define el saber matemático. Esto ha afectado el conocimiento que se tiene del tema, incluyendo el de los maestros (Block, 2006), pues lo que ellos saben es también consecuencia de lo que se les ha enseñado e influye en lo que ellos enseñan.

No obstante, los maestros forman parte de un sistema, en el que son responsables de llevar a cabo el proceso de enseñanza, en particular, de los contenidos establecidos. Es así como este estudio se centró en averiguar ¿cómo se enseña hoy en día la proporcionalidad? Desde el punto de vista de "el sujeto" encargado de la enseñanza, se decidió explorar los conocimientos de los maestros respecto a la proporcionalidad con el objetivo de acercarnos a la problemática y dar una visión más amplia acerca de su enseñanza.

La proporcionalidad como conjunto de situaciones y como praxeología

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) fueron los referentes teóricos en los que se enmarcó la investigación.

De la TSD de Brousseau se retoma la idea de caracterizar al conocimiento matemático desde el punto de vista de las situaciones en las que funciona y ofrece herramientas para analizarlas:

- Presenta y trata el conocimiento matemático expresado en situaciones.
- Diferentes situaciones que ponen en juego un mismo conocimiento matemático de maneras diferentes resaltando características particulares.

- Manipulación de las variables didácticas. Son las variables que el docente puede fijar. La elección de valores diferentes en una misma situación puede provocar cambios en el conocimiento óptimo, es decir, que para algunos valores de esas variables existe al menos una estrategia óptima (desde el punto de vista de su costo en diseño, fiabilidad, costo de aprendizaje, etc.) y uno o varios conocimientos que le corresponden (Brousseau, 2007, p.32).

De la TAD de Chevallard retomamos los conceptos de praxeología y transposición didáctica:

- Toda actividad matemática institucional puede modelizarse mediante la noción de praxeología (u organización) matemática (Chevallard, 1999). Su estructura se compone de: tareas, técnicas (bloque práctico-técnico: *praxis*), tecnologías y teorías (bloque tecnológico-teórico: *logos*) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). De esta manera pretendemos caracterizar dos aspectos de la proporcionalidad: praxis, formada por los tipos de problemas y las técnicas y; logos, en donde ubicamos el conocimiento explícito de las propiedades que definen a la proporcionalidad.

- La transposición didáctica de las transformaciones que sufre un conocimiento, en este caso la proporcionalidad, para poder ser enseñado (Chevallard, 1992).

La metodología

Mediante el cuestionario se exploró tres tipos de conocimientos de los maestros sobre la proporcionalidad: los conocimientos del *bloque técnico-práctico* (tareas y técnicas), los del *bloque tecnológico-teórico* (justificaciones) y, los conocimientos *relativos a la enseñanza de la proporcionalidad* (percepciones sobre el conocimiento de los alumnos, de situaciones didácticas, etc.). En este trabajo solo se hace referencia a los primeros dos (práctico y teórico) de la parte 1 del cuestionario (Cuadro 1).

Para la elaboración de los ocho problemas que conformaron la parte 1, se consideró el programa de estudios de matemáticas 2006 de primer grado de secundaria (SEP, 2006) y algunos estudios similares (Comin, 2000; Block, 2006; Monteiro, 2003).

Solo se trabajó con la proporcionalidad directa, pero se abarcaron varios tipos de problemas (valor faltante, comparación de razones, reparto proporcional, entre otros). Las variables didácticas fueron elegidas de forma intencional, de manera que favorecieran a ciertas técnicas o procedimientos, y así verificar si éstas eran conocidas por los maestros. También se incluyeron dos problemas en donde la relación no es de proporcionalidad (relación afín y aditiva) con la finalidad de averiguar si los maestros, además de resolverlos, los reconocían explícitamente.

En todos los problemas se solicitaron varios procedimientos de resolución con el fin de explorar la diversidad de procedimientos o técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad que los maestros probablemente conocían. Además en cada uno de los problemas se plantearon dos preguntas, con el propósito de averiguar en qué grado los maestros podían explicitar y justificar si las magnitudes eran o no proporcionales.

En este trabajo se reporta los resultados principales de la parte 1 del cuestionario, tal como se indica en el Cuadro 1. Los resultados completos y en detalles se reportan en Balderas (2010).

El cuestionario se aplicó a 63 maestros del estado de Nuevo León. Los maestros reunían las características de ser docente de matemáticas en escuelas secundarias públicas o privadas del estado y estar impartiendo clases en el periodo 2007–2008, preferentemente en primer grado. La aplicación se dio en el contexto de un taller para maestros llamado “Reflexiones sobre la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela secundaria”.

Los problemas resueltos por los maestros fueron clasificados de acuerdo a categorías creadas a partir de los mismos datos, así como las justificaciones dadas por cada problema. Esto con la finalidad de generar tablas y gráficas de frecuencias que posteriormente sirvieron para el análisis cuantitativo y cualitativo.

Resultados

Resolución de los problemas

La resolución de los problemas no fue un aspecto primordial a estudiar. No obstante, al revisar las soluciones de los maestros encontramos algunas deficiencias, lo cual nos permitió separar los ocho problemas en problemas fáciles (valor faltante, reparto, comparación) y, difíciles (relación aditiva, factores sucesivos y reconocimiento de una escala). En los problemas fáciles al menos la mitad de los maestros propusieron más de un procedimiento, mientras que en los difíciles, propusieron en su mayoría uno.

Desde la perspectiva del desempeño de los maestros y considerando solo la solución de los problemas (correcta o no), se pueden ubicar tres grupos: Alto, 30% resolvieron bien los ocho problemas; Medio, 63% cometen entre 1 y 3 errores u omisiones y; Bajo, 7% cometen más de tres errores u omisiones (Gráfica 1).

Se observó la presencia de tres tendencias: fuerte incidencia de los procedimientos "clásicos", la Regla de Tres y el Valor Unitario; presencia menor de los procedimientos "internos" (al doble, el doble) que suelen ser menos formales, más intuitivos. Finalmente, presencia más pequeña de procedimientos "algebraicos".

Las principales dificultades en los problemas fueron: dificultad para distinguir un problema que no es de proporcionalidad (relación afín y aditiva) de uno que sí lo es, dificultad con la noción de escala (confusión entre longitud y superficie) y dificultad con la noción de composición de factores de escala.

Ejemplos de resoluciones en problemas con mayores deficiencias.

Problema 6 (55.6% de aciertos). Luisa tiene ocho años. Su hermana tiene lo doble. ¿Cuántos años tendrá la hermana cuando Luisa cumpla 10 años? Solución:

Luisa = 8 años
hermana = 16 años

Luisa = 10 años
hermana = 20 años

por cada año que tenga Luisa su hermana tendrá 2 veces más

Problema 7 (50.8% de aciertos). Una fotografía se reduce con una escala de $\frac{1}{2}$ y enseguida se reduce nuevamente con una escala de $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la reducción total que sufre la fotografía original? Soluciones (ver Cuadro 2).

Reconocimiento de la proporcionalidad y su argumentación

En cada problema del cuestionario, una vez que los maestros lo resolvían, se les preguntó:

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

¿Considera que esas magnitudes son proporcionales? Sí/No Justifique su respuesta.

La sola identificación por parte de los maestros de la presencia o ausencia de una relación de proporcionalidad no garantizó una justificación correcta: la mayoría identificó correctamente a la proporcionalidad en 4 a 6 problemas; y en los argumentos, justificó correctamente de 1 a 3 problemas, o bien, no justificó (Gráfica 2).

En la Tabla 1 muestra que los maestros tienen grandes dificultades para argumentar: en los problemas fáciles, el 1 y el 2, menos del 45% logró argumentar correctamente. En los demás, lo hizo entre el 3 y 31% de los maestros.

Los argumentos se consideraron correctos cuando lo afirmado era correcto de acuerdo al modelo de proporcionalidad y al contexto de la situación. Así de un total de 504 argumentos solicitados (ocho por cada uno de los 63 maestros) se obtuvo solo un 25.4% de argumentos correctos, y los restantes fueron incorrectos u omitidos (Gráfica 3).

Estas cifras están por debajo de las alcanzadas en la resolución de los problemas, en donde el 90% pudo resolver al menos cinco problemas. Esta situación expresa que es en el conocimiento explícito de las propiedades de la proporcionalidad en donde están las principales debilidades, es decir, en el bloque tecnológico teórico (Chevallard, 1999).

Argumentos deficientes

Los argumentos incorrectos se dividieron en subcategorías:

a) Propiedades necesarias pero no suficientes.

- El comportamiento de las magnitudes, cuando una de ellas aumenta o disminuye, la otra también:

“Sí, porque a mayor kg más unidades y viceversa” (Problema 1).

b) Argumentos incompletos, implícitos o circulares.

- Hacen referencia a una idea de constancia, pero no precisan qué tipo de constancia o, utilizan argumentos circulares:

“Sí, porque la relación de ambas <u>va cambiando constantemente</u>” (Problema 2).

"Sí, la repartición es proporcional al porcentaje de la proporción que aporto cada una" (Problema 5).

c) Argumentos falsos.

- Atribuyeron la existencia de proporcionalidad solo a rasgos particulares de la situación o, a modelos matemáticos que no corresponden al de la proporcionalidad:

"Sí, ya que va de una escala mayor a una menor" (Problema 7).

"Sí, siempre cobra el mismo precio el kilómetro al total se agrega 7 de banderazo" (Problema 4).

"Sí, la edad de la hermana siempre va 8 años arriba" (Problema 6).

- Argumentos correctos en el modelo matemático de la proporcionalidad, pero que se contraponen al contexto de la situación:

"Sí, porque siempre tendrá el doble" (Problema 6).

Relaciones entre resolver, explicitar el tipo de relación y argumentar

Los apartados de resolución de los ocho problemas, la identificación del tipo de relación (proporcional o no) en cada problema y, la argumentación de éstas últimas, abordaron los aspectos *praxis* y *logos*.

La resolución de los problemas pareció ser el apartado más sencillo para los maestros, pues de los 63 maestros, 19 obtuvieron todos los problemas correctos. En los otros dos, ninguno alcanzó el máximo (ocho) de respuestas correctas. La Gráfica 4 muestra el número de maestros que obtuvieron la mayor cantidad de respuestas correctas en cada apartado.

Se puede notar que ningún maestro obtuvo el máximo de respuestas correctas en los tres apartados. Quienes respondieron los ocho problemas correctamente no necesariamente les fue bien al identificar las relaciones de proporcionalidad y menos al argumentar. Este comportamiento fue contrario para quienes identificaron o argumentaron la mayor cantidad de respuestas correctas. La tendencia observada en el grupo en general se muestra en el Cuadro 3.

El hecho de que resolver bien los problemas no implica poder identificar el tipo de relación en juego se confirma con el siguiente dato: de los 23 maestros que resolvieron correctamente los problemas más difíciles, el 6 y 7, 11 afirmaron que las magnitudes del problema 6 (aditiva) eran proporcionales.

Conclusión

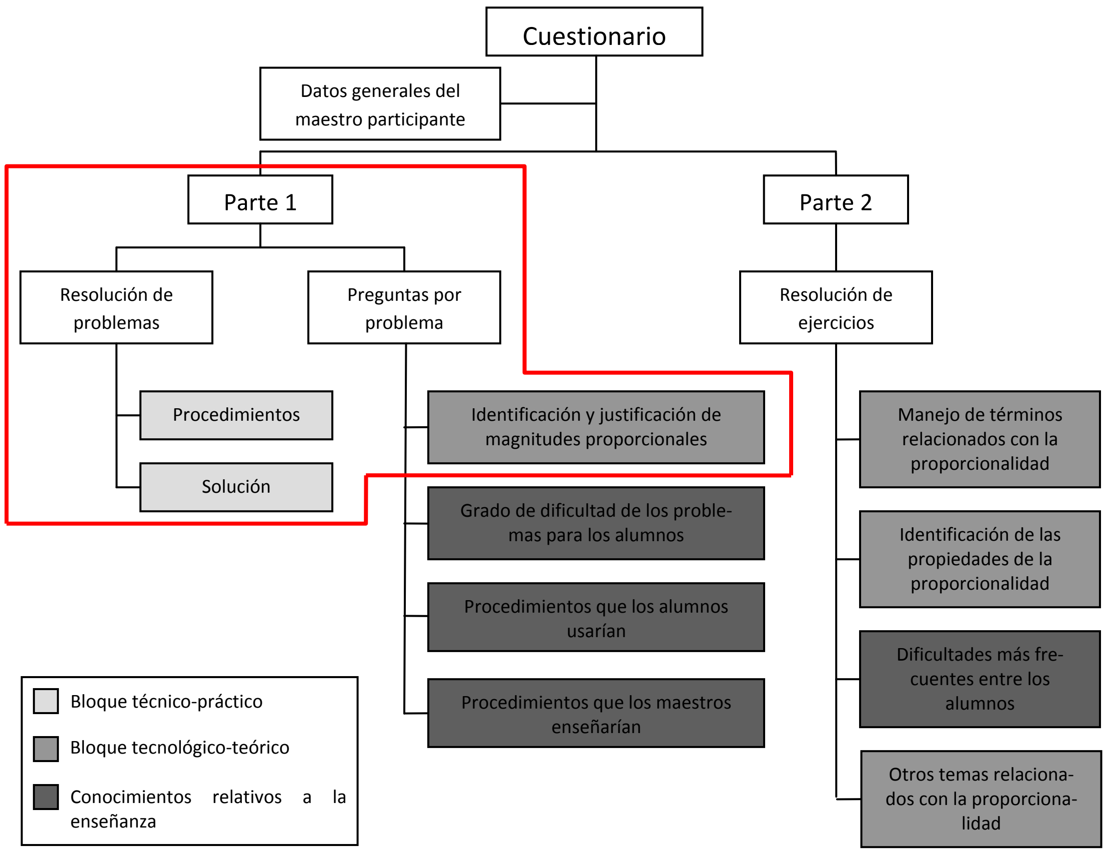
Se manifestó un claro contraste entre los conocimientos que se sitúan en *el bloque técnico práctico*, esto es, la resolución de tareas relativamente sencillas, y las técnicas, la mayoría de los maestros logró un desempeño bueno, y los conocimientos del *bloque tecnológico teórico*, conformado por las justificaciones que caracterizan a la proporcionalidad, donde los maestros demostraron deficiencias.

La Regla de Tres y Valor Unitario fueron los procedimientos más utilizados en la resolución de los problemas, aún en casos en donde los datos favorecían a otros procedimientos, como los internos.

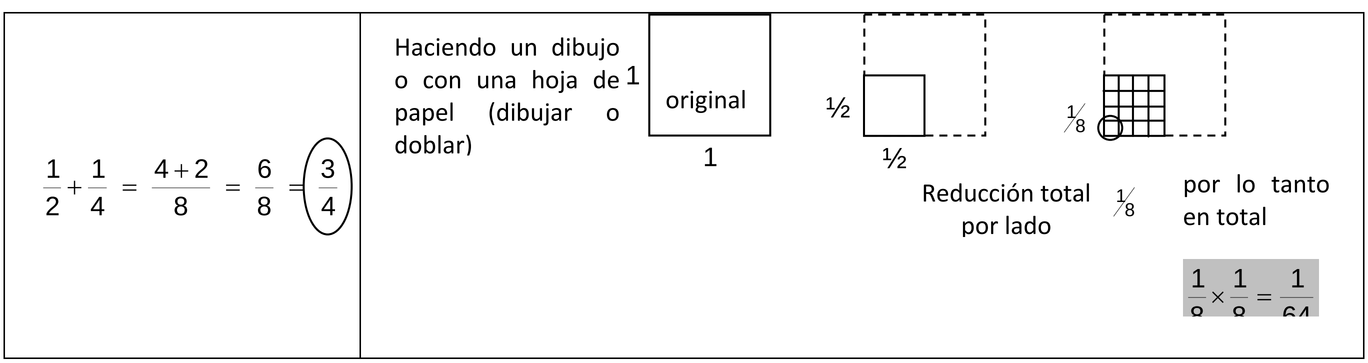
Además de las dificultades identificadas y que ya fueron señaladas, resultó notable la dificultad de los maestros para argumentar por escrito. La mayoría no pudo justificar por qué afirma que hay o no proporcionalidad. Respondieron sin dar una causa, de forma incompleta, dejando implícita una parte del argumento, o mediante argumentos circulares o ambiguos. Esta situación es preocupante si se considera que un aspecto innovador de la reforma 2006 para la evaluación de la asignatura es la introducción de competencias, donde la *comunicación* (incluyendo la escrita) y la *argumentación* forman parte de la educación integral del estudiante (SEP, 2006).

Finalmente, se logró identificar, con claridad, donde están las limitaciones más graves. Este trabajo evoca la necesidad imperiosa de promover la capacidad de argumentación de los maestros, además de la redacción en general. En este sentido, el estudio es una referencia útil para la planeación de cursos o materiales didácticos, tanto en la formación de maestros como en los talleres de actualización de los mismos. Sin embargo, reconocemos que los resultados que aporta este trabajo son parciales, y deben ser complementados con otros acercamientos metodológicos.

Cuadros y Tablas



Cuadro 1. Estructura del cuestionario



Cuadro 2. Ejemplo de resolución del problema 7.

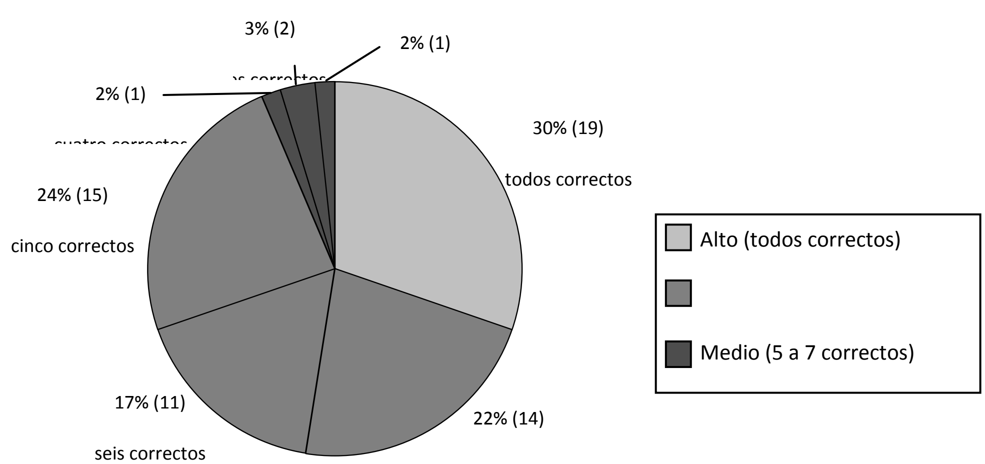
Los que resuelven bien los problemas	→	No necesariamente identifican bien la relación, ni argumentan bien
Los que identifican el tipo de relación	→	Resuelven bien los problemas, pero no argumentan bien
Los que argumentan bien	→	Resuelven e identifican correctamente la relación

Cuadro 3. Tendencias del grupo en los apartados.

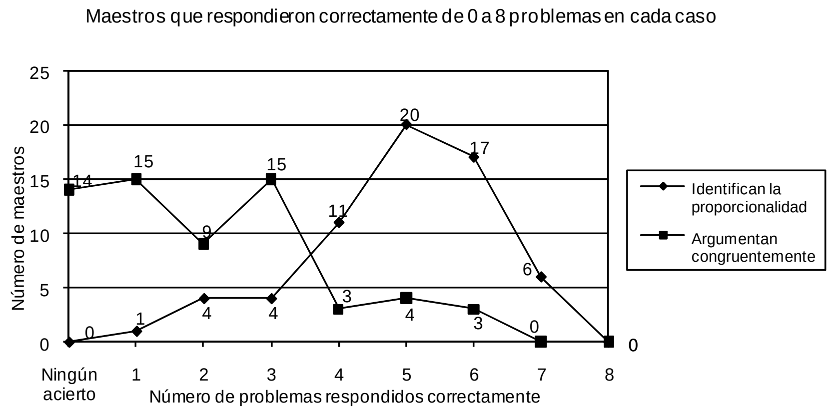
Problema (proporcionalidad)	Identifican correctamente la presencia o ausencia de la proporcionalidad	Argumentan congruentemente	Ambas
P_1 (sí hay)	61	26	26
P_2 (sí hay)	60	28	28
P_3 (no)	33	20	17
P_4 (no)	10	11	6
P_5 (sí)	54	10	10
P_6 (no)	18	13	13
P_7 (sí)	35	2	2
P_8 (sí)	37	18	18

Tabla 1. Maestros que identificaron y argumentaron correctamente en cada problema (n = 63).

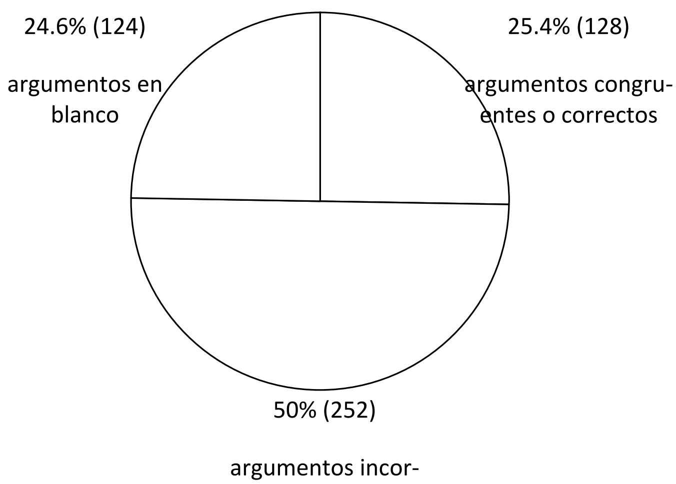
Gráficas



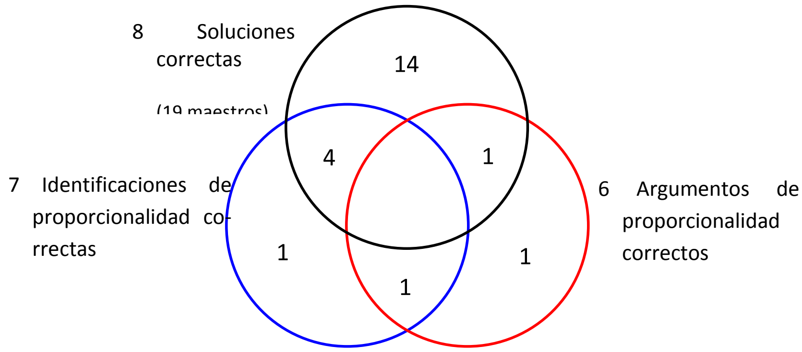
Gráfica 1. Soluciones del cuestionario (n = 63).



Gráfica 2. Distribución de maestros de acuerdo al número de problemas identificados y justificados correctamente.



Gráfica 3. Distribución de los argumentos de los ocho problemas.



Agradecimiento

Este trabajo se realizó como parte de una tesis de maestría en el Departamento de Investigaciones Educativas, del Cinvestav y para lo cual la primera autora contó con apoyo de una beca de Conacyt.

Referencias

Balderas, R. (2010). La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros. Tesis de Maestría. México: CINVESTAV-IPN.

Block, D. (2001). La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico. Tesis de Doctorado. México: CINVESTAV-IPN.

Block, D. (2006). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. 19a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, (675-680). Montevideo: RELME.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Argentina: Libros Zorzal.

Chevallard, Y. (1992). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Aique (Psicología cognitiva y educación).

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). Matemáticas, alumnos y profesores. Las matemáticas en el aula. En Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2): 221-266.

Comin, E. (2000). Proportionnalitè et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes Dans la scolarité obligatoire. Francia: Université Bordeaux.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). Proporcionalidad directa. La forma y el número. España: Síntesis.

Hart, K. (1988). Ration and proportion. En J. Herbert and M. Beher (Eds.), Number Concepts and operation in the middle grades, 2 (p. 198-219). Lawrence Erlbaum Associates NCTM.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). De la lógica del infante a la lógica del adolescente, París: PUF.

Mendoza, Tatiana (2007). Estudio didáctico de la noción de porcentaje. Tesis de Maestría. México: CINVESTAV-IPN.

Ramírez, M. (2004). Análisis de situaciones de proporcionalidad en la escuela primaria. Tesis de Maestría. México: CINVESTAV-IPN.

SEP (2006). Educación Básica Secundaria. Programas de estudio 2006. México, D.F.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En Hiebert, James y Behr, M. (Eds.), Number Concepts and Operations in the Middle Grades (p. 141-161), Nueva York: NCTM.