

INTERNALIZACIÓN DEL SIGNIFICADO DE OBJETOS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE LA ACCIÓN CON MANIPULATIVOS VIRTUALES. UN ESTUDIO MICROGENÉTICO

ALFONSO ÁLVAREZ GRAYEB

Departamento de Ciencias e Ingeniería, Universidad Iberoamericana Puebla

RESUMEN: Se investiga la internalización gradual de las prácticas culturales discursivas y operativas sobre varios objetos matemáticos en un sujeto a través de su acción con manipulativos virtuales prediseñados y la interacción con un profesor. La actividad y el discurso se registran con un software de captura de pantalla, complementado con pruebas escritas en las que el estudiante resuelve problemas de aplicación relativos a los objetos estudiados. Se documentan el proceso y el producto de la actividad. El objetivo de la investigación es describir y explicar cómo el proceso alcanza el producto en un escenario de actividad formado por el sujeto, las prácticas culturales, los manipulativos virtuales, las tareas y el profesor. Para esto se analiza el discurso de la actividad a través de la evolución de una serie de dimensio-

nes del cambio que permiten dar cuenta del proceso microgenético del sujeto, es decir, de los cambios y abstracciones que se generan en él a muy corto plazo. El funcionamiento del escenario de actividad, que es la unidad de análisis de la investigación, se estudia desde la teoría histórico-cultural de Lev Vygotsky y las extensiones a esta que hicieron A.N. Leontiev y P.Y. Galperin, complementada con algunas ideas provenientes del enfoque onto-semiótico de la didáctica de matemáticas de Díaz Godino, y del marco descriptivo para la interactividad humana con computadoras de Sedig y Hai-Ning.

PALABRAS CLAVE: Instrucción por Computadora, Enseñanza de las Matemáticas, Mediadores, Psicología Educativa, Interactividad.

Introducción

La relación entre los procesos cognitivos y la actividad humana mediada culturalmente es el foco de esta investigación. En un nivel específico se intenta relacionar las prácticas culturales relativas a un conjunto de objetos matemáticos que introducen a la Derivada, con la forma en que un sujeto internaliza dichas prácticas, y con la actividad del sujeto mediada por manipulativos virtuales y la interacción con un profesor. La relación aprendizaje-desarrollo cognitivo se ha estudiado desde la psicología, la semiótica, la antropología y la sociología, y desde enfoques como el cognitivo, el constructivista radical y social, el onto-

semiótico o el crítico. La relación esbozada por Lev Vygotsky (1978) desde la postura teórica histórico-cultural, en la que el buen aprendizaje, mediado por herramientas materiales y psicológicas, es aquel que impulsa al desarrollo y no al revés como lo veía Piaget, es la que interesa a este trabajo. De ahí que se estudie y se tome como unidad de análisis un escenario de actividad cultural que incluya al sujeto cognitivo, al referente epistémico, y los recursos culturales presentes en el lenguaje del profesor y en los artefactos utilizados, en este caso los manipulativos virtuales diseñados con la intención de enfrentar las dificultades de los estudiantes para internalizar las prácticas culturales relativas al Cálculo.

A. N. Leontiev y Piotr Y. Galperin (en Wertsch, 1997) entre otros continuaron el trabajo de Vygotsky sobre la relación enseñanza-desarrollo, en particular en la formación guiada e intencional de acciones mentales a partir de acciones materiales, ambas ligadas a la actividad con el mismo objeto, y su aporte se incluirá en el trabajo al momento de analizar la actividad de un estudiante sobre las representaciones semióticas dinámicas de varios objetos matemáticos tales como la pendiente de una recta, la razón media e instantánea de cambio en una función y la Derivada misma, presentes en los manipulativos virtuales. Se pretende una mayor comprensión del proceso y del producto de la acción de un aprendiz con manipulativos virtuales relacionados con unos objetos matemáticos, con vistas a la internalización de las prácticas culturales asociadas a esos objetos en un contexto en el que los resultados educativos del uso de TIC están lejos de ser claros.

Interesa para ello hacer una observación densa de secuencias de comportamiento de transición de un sujeto en periodos cortos de tiempo, es decir la ejecución de un estudio microgenético, para que el investigador pueda ver directamente los procesos de cambio inducidos por la acción del sujeto con los manipulativos virtuales, cosa que no pueden captar métodos más agregados. Los estudios microgenéticos conllevan aspectos cuantitativos y cualitativos que arrojan luz sobre la naturaleza de los estados transicionales. Por la densidad de las observaciones, los investigadores pueden seguir la traza de las trayectorias de desarrollo para un comportamiento particular, como las prácticas culturales discursivas y operativas relativas a los objetos matemáticos en cuestión. En este sentido, el software de captura de pantalla Adobe Captivate usado en este trabajo, constituye una valiosa herramienta microgenética ya que se convierte en una ventana a la mente del usuario al posibilitar la captura de toda acción ejecutada por el estudiante en la pantalla de la computadora mientras usa los manipulativos, así como el audio simultáneo del diálogo con el profesor. Los estudios microgenéticos pueden hacer crecer el conocimiento de

los procesos de cambio al darnos la oportunidad de explicar, además de describir, estos procesos, que es justamente el objetivo de este trabajo.

Las preguntas iniciales que detonan esta investigación giran en torno a la caracterización de las prácticas culturales acerca de un objeto matemático; a las circunstancias en las que un sujeto abstrae e internaliza esas prácticas; al rol que juega la mediación de los manipulativos virtuales y la interacción con un profesor; y a la relación entre la acción con los manipulativos y el residuo cognitivo del sujeto.

El marco teórico

Para responder a las preguntas iniciales se argumenta sobre la articulación de tres cuerpos teóricos: la teoría histórico-cultural en Vygotsky, Leontiev y Galperin; el enfoque onto-semiótico de la didáctica de matemáticas (Godino, 2003); y el marco descriptivo de Sedig y Hai-Ning (2006). Con el primero se pretende explicar asuntos relativos al efecto de la mediación de herramientas y signos en el desarrollo psicológico humano, el fenómeno de la internalización de experiencias socio-culturales, y la caracterización de las funciones psicológicas superiores o el comportamiento de orden superior. El enfoque onto-semiótico de la didáctica de matemáticas de Díaz Godino se utiliza aquí para caracterizar en forma detallada el significado de un objeto matemático dado como el sistema de prácticas culturales discursivas y operativas relativas a ellos. Y el marco descriptivo de Sedig y Hai-Ning se usa para caracterizar los factores de interactividad humana con tecnología informática que tenga intenciones educativas.

El modelo teórico resultante

La caracterización del significado de un objeto matemático se hace a través del sistema de prácticas culturales discursivas y operativas sobre el objeto, y este sistema a su vez se caracteriza por una serie de funciones semióticas expresión-contenido entre los lenguajes de representación, los conceptos y definiciones, los algoritmos, las proposiciones y argumentos asociados a él, y los problemas de los que surgen. La red de relaciones entre estos componentes es el significado pragmático del objeto matemático. El contexto de las prácticas culturales es una tarea que las detona. En una experiencia sociocultural de aprendizaje se busca que estas prácticas sociales discursivas y operativas sean finalmente ejecutadas por el sujeto en una forma auto-regulada, independiente, consciente, y con-

trolada y mediada por signos presentes en la mente del sujeto, es decir, en forma internalizada. Esta internalización, es decir, la conversión de una herramienta externa en un signo, es lograda a través de acción del sujeto mediada tanto por los manipulativos virtuales como de la interacción con el profesor. Los manipulativos ofrecen tres características esenciales: visualización, interactividad y la oportunidad de ver en forma dinámica el uso funcional de los signos involucrados, que para Vygotsky es el factor más importante en la formación de los conceptos. La interacción del sujeto con el profesor es de dos tipos: la tutoría y la mediación. La primera es la intervención del profesor sobre el alumno para hacerlo actuar y aprender, enrolándolo en la tarea, focalizando su atención y dándole información sobre sus errores. Por su lado la mediación es el rol que ejerce el profesor situándose cuando se requiera entre el estudiante y el saber científico, co-construyendo conocimiento por negociación. La acción ya internalizada y mediada, según Galperin, se forma gradualmente pasando por etapas de acción material manipulando directamente los objetos o sus representaciones semióticas, seguida de acción verbal que prescinde de la manipulación y sucede al nivel del lenguaje, para ser finalmente acción mental que prescinde del objeto y del lenguaje, dirigida desde la mente pero aplicada al mismo objeto material. Las acciones son ejecutadas sobre los lenguajes, conceptos, algoritmos, proposiciones y argumentos de validación relativos a él que están presentes en los manipulativos virtuales. El objetivo último de estas acciones es la ejecución auto-regulada del sujeto del sistema de prácticas culturales sobre el objeto. Las relaciones entre los elementos mencionados se ilustra en la Figura 1 al final.

Secuencia de tareas/objetos/manipulativos

Si se considera metafóricamente el conocimiento matemático como una vasta red tridimensional de objetos –conceptos, gráficas, axiomas, tablas, fórmulas, demostraciones, teoremas, algoritmos, problemas- simples y compuestos, lo que aquí se ha hecho es aislar cuasi-arbitrariamente un subconjunto de objetos que introducen a la Derivada, y diseñar sendos manipulativos virtuales que involucran a los componentes del significado para cada objeto, comenzando con objetos muy simples que al relacionarse con objetos conocidos previamente por el sujeto, se van organizando en una nueva estructura que les confiere un sentido distinto al que tendrían los objetos componentes aislados. Esta reestructuración vertical de objetos previos y emergentes y las nuevas conexiones entre ellos,

constituyen el proceso de abstracción o de construcción de sentido del que hablan Schwarz, Dreyfus y Hershkowitz (2004).

La secuencia de objetos/manipulativos que quieren introducir la Derivada es la siguiente: función como gráfica, fórmula, serie de puntos y como “máquina procesadora”; distancia entre puntos variables alineados vertical y horizontalmente en un plano coordenado; pendiente de una recta secante a dos puntos variables de una curva; razón media de cambio entre dos puntos variables de una curva; razón instantánea de cambio en un punto de una curva en forma gráfica, numérica y algebraica; la Derivada. Cada uno de estos objetos es componente de otros más complejos y toman un nuevo sentido al reestructurarse verticalmente cambiando su estatus ontológico.

Los manipulativos virtuales

Los manipulativos virtuales encargados de crear, movilizar y relacionar los signos característicos de los objetos matemáticos meta en el sujeto, fueron elaborados en la hoja de cálculo Excel de acceso general y que no depende de conexión a internet que pueda obstruir o retardar su descarga en el aula. Todos incluyen una barra de desplazamiento que permite al sujeto cambiar aleatoriamente el valor de algún parámetro que a su vez hace cambiar simultáneamente una gráfica, los valores numéricos en una fórmula o tabla y un resultado, con lo cual se enfatiza el carácter relacional con el que Vygotsky define a un concepto científico. Con esto el sujeto dispone en forma auto-controlada de un ejemplo del objeto cada ocasión que hace clic en la barra de desplazamiento, favoreciendo la posibilidad de que el estudiante pueda abstraer las características invariantes y esenciales del objeto y en consecuencia conducir a una posible generalización y a un concepto, además de que se introducen los signos y la terminología convencionales asociados.

Lo más importante es que el sujeto puede observar a voluntad el uso funcional de los signos involucrados que, insistimos, es el factor central en la formación de conceptos según Vygotsky (1978). En efecto, lejos de presentar una idea matemática a través de una definición para después aplicarla en un problema, en la experiencia aquí investigada el sujeto usa el manipulativo para ver de entrada al signo o al objeto en su funcionamiento o en acción, para intentar luego definirlo verbalmente en varios niveles de generalización, de explicitación y de entendimiento o insight entre otras dimensiones, utilizando los símbolos sugeridos también por el manipulativo. Esta acción sobre los manipulativos, acompañada

de las preguntas del profesor o las que están en el propio manipulativo, está destinada a abrir una zona de desarrollo próximo del sujeto (Vygotsky, 1978) en la que este se adentra para posibilitar un nivel más alto de desarrollo psicológico. El diseño de los manipulativos permite además de la representación semiótica de los objetos, también el tratamiento de las mismas y la conversión dinámica entre diversas formas semióticas del mismo objeto, para enfrentar el fenómeno de la compartimentalización del saber matemático en los estudiantes.

Cada manipulativo virtual comporta en forma explícita o implícita los componentes del significado de los objetos a los cuáles está dedicado, es decir, sus lenguajes de representación semiótica, los conceptos y algoritmos asociados y las proposiciones y argumentos potencialmente detonados por las preguntas del profesor acerca del contenido del manipulativo.

Las características de la interactividad (Sedig y Hai-Ning, 2006) con los manipulativos pasan por puntos como ofrecer una restricción dirigida que focaliza la atención en determinados elementos; el manejar una conveniente distancia semántica con los significados previos de un estudiante de primer año de bachillerato; una idoneidad epistémica que permita al sujeto descubrir relaciones básicas; retroalimentación instantánea que facilita relacionar los objetos afinando su significado pragmático; un grado de implicación del sujeto en un punto medio entre la pura observación pasiva y la pura acción con el manipulativo.

Los supuestos de la investigación

Los supuestos presentes en el modelo teórico son: el significado institucional y el significado personal de los objetos matemáticos se caracterizan a través de un conjunto de funciones semióticas que son relaciones expresión-contenido entre los componentes de ese significado; las funciones semióticas relativas a los objetos matemáticos estudiados, constituyen funciones psicológicas superiores, tal como son definidas por Lev Vygotsky; el significado de los objetos matemáticos se internaliza en el aprendiz a partir de acción material significativa sobre manipulativos virtuales prediseñados, seguida de acción en el nivel verbal y finalmente mental, todas sobre el mismo objeto; la acción a nivel mental se deriva de la acción material con objetos, y tiene el mismo contenido objetivo que esta; la acción sobre un objeto virtual tiene un carácter concreto si relaciona sistémicamente al

objeto con otros objetos en una estructura jerarquizada; la acción humana situada, social y significativa sobre un objeto, mediada por instrumentos culturales, posibilita un conocimiento integrado en una unidad a su objeto, y no un mero conocimiento de cadenas lingüísticas sobre él; es posible comprender el desarrollo de las funciones semióticas (funciones psicológicas superiores) si se comprende su origen y las transiciones por las que pasan, es decir, si se hace un análisis microgenético de ese desarrollo.

Dado el objetivo del estudio, los esfuerzos se concentran en saber cómo es la trayectoria, la velocidad, la fuente y la variabilidad de los cambios sufridos por el sujeto en la experiencia con los manipulativos y el profesor. Para ello se han recopilado una serie de dimensiones del cambio a observar provenientes de autores distintos cuyo seguimiento puede dar cuenta de ese proceso. Las dimensiones son: el grado de abstracción y la función de la acción; el grado de independencia del sujeto; el grado de generalización del discurso; la abreviación de las operaciones; el grado de auto-regulación; el grado de flexibilidad; el grado de entendimiento; el grado de consciencia y de explicitación del discurso. Estas dimensiones dan cuenta de procesos socioculturales tales como la descontextualización de los mediadores semióticos, la transición entre el hetero y el auto-control, o la correspondencia entre el significado personal y el cultural de los objetos matemáticos involucrados entre otros.

Estrategia de investigación y de análisis

Primeramente se aplicó un pretest al sujeto, un estudiante de 1er año de bachillerato de una escuela privada de la Cd.de Puebla. El pretest incluye estos temas: ubicación de puntos en el plano coordenado; trazo de la gráfica de una ecuación; el concepto de función; la notación $f(x)$ para funciones; la recta tangente y secante a una curva; el punto de tangencia; trazo de una recta tangente en un punto dado; cálculo de la distancia entre puntos alineados vertical y horizontalmente en el plano sin recurso gráfico; pendiente de un segmento recto; y razón entre dos números. Simultáneamente se diseñaron las tareas y de los manipulativos virtuales de acuerdo al significado pretendido de cada objeto matemático abordado.

La experiencia de aprendizaje comenzó con acción material del sujeto con los manipulativos seguida de acción verbal al intentar responder a las preguntas detonadoras del profesor; aplicación de un postest 1 al final de cada tarea con el fin de evaluar la acción mental,

es decir, el desempeño del sujeto ante un problema de aplicación en papel sobre el objeto tratado; registro continuo de la actividad en pantalla y del discurso en el software de captura de pantalla Adobe Captivate; transcripción del discurso en una hoja de cálculo Excel donde cada frase del estudiante y del profesor son categorizadas en las dimensiones de cambio a observar; análisis del discurso y de los postest 1 en papel; y finalmente la búsqueda de indicios tanto del proceso (las dimensiones del cambio) como del producto (las funciones semióticas de los objetos matemáticos) de las acciones.

Para dar cuenta del grado de intensidad en que se muestra cada una de las dimensiones de cambio, se propone una codificación numérica que sirve además para representar gráficamente la evolución de las mismas en el tiempo. Un postest 2 en papel fue aplicado 28 días después de la experiencia inicial de dos horas con siete manipulativos.

La investigación aporta por un lado una síntesis teórica argumentada que constituye un modelo y que dirige al método de investigación, y que es extensible a la didáctica de matemáticas y de otras ciencias. Asimismo se aporta en el ámbito metodológico un cuerpo o batería de dimensiones para caracterizar el cambio provenientes de distintos autores y posturas, y su codificación numérica para poder representar visualmente la evolución del discurso. Se esboza también la posibilidad de identificar la idea de significado pragmático de un objeto matemático al concepto de competencia matemática dotando a este de componentes claros e identificables.

Como conclusiones del estudio pueden señalarse las siguientes: el escenario de actividad estudiado ha sido eficaz y eficiente para internalizar las funciones semióticas pretendidas y generar un comportamiento superior; el análisis microgenético del escenario de actividad ha podido mostrar el origen y los cambios de una función psicológica superior; los manipulativos por sí solos no pueden garantizar que el sujeto genere el significado pragmático institucional: es necesaria la tutoría y la mediación del profesor para completar el funcionamiento del escenario de actividad; los manipulativos virtuales son una herramienta que posibilita la formación de acciones mentales a partir de acciones materiales; el método y los instrumentos de recolección y de análisis permitieron hacer una descripción densa y una explicación de los cambios, que es el objetivo del estudio; los manipulativos han contribuido a volver concretos los objetos virtuales al relacionarlos sistémicamente con otros (conceptos científicos en Vygotsky).

Referencias

- Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. *Distribución en Internet*. <http://www.ugr.es/local/jgodino/>
- Sedig, K y Liang Hai-Ning. (2006). Interactivity of Visual Mathematical Representations: Factors Affecting Learning and Cognitive Processes. *Jl. of Interactive Learning Research*, 17(2), 179-212.
- Schwarz, B., Dreyfus, T. and Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 4, 169–176.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Editado por Cole, Michael., Steiner, V. J., Scribner, S., Souberman, E. (Eds). Harvard University Press.
- Wertsch, J., Del Río, P. y Álvarez, A. (1997). Estudios histórico-culturales: historia, acción y mediación. En *La Mente Histórico-cultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas*. Fundación Infancia Aprendizaje.

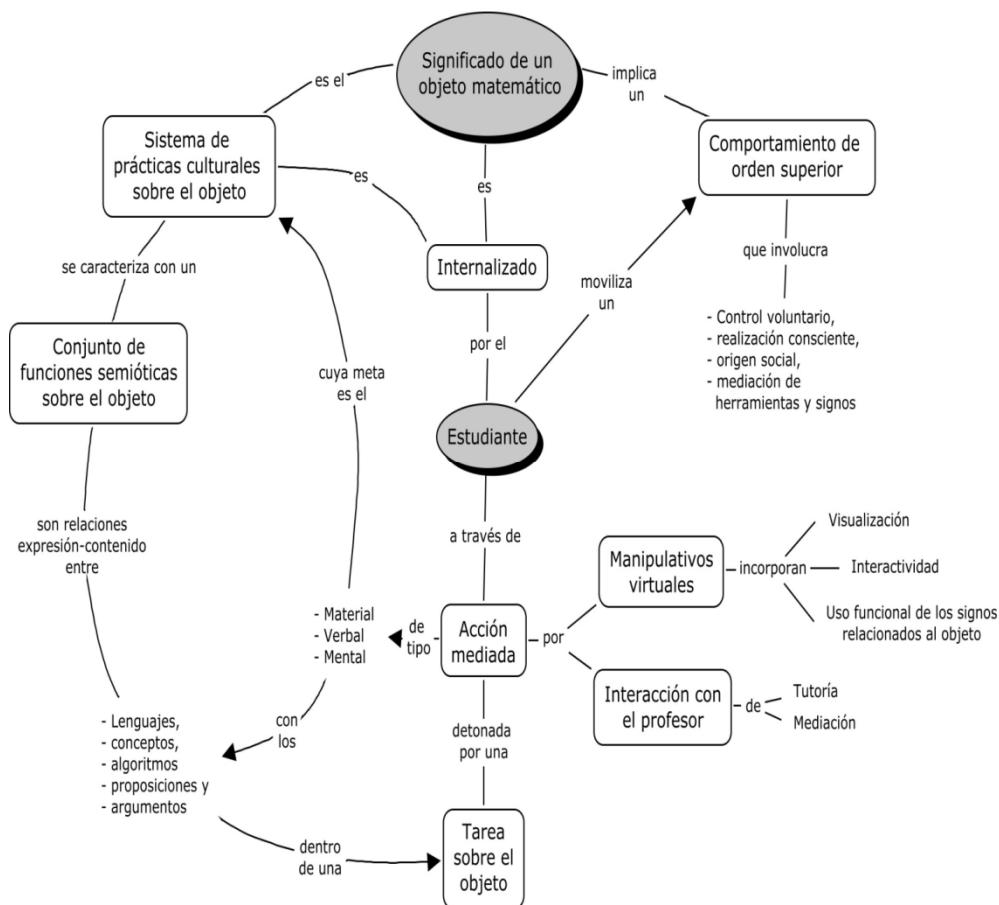


Figura 1. Relación y articulación entre los elementos del marco teórico. Modelo y síntesis teórica de la investigación.