LA MULTIPLICACIÓN ACHICA Y LA DIVISIÓN AGRANDA. CUANDO LOS DECIMALES CONTRADICEN LA EXPERIENCIA

ANA LAURA BARRIENDOS RODRÍGUEZ
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

RESUMEN: La resolución de problemas que implican multiplicaciones y divisiones con decimales empleando la calculadora podría parecer poco problemática para maestros de primaria, sin embargo, no fue necesariamente así para los maestros que participaron en este trabajo. En los procesos de resolución evidenciaron sus ideas sobre esas operaciones: en todos los casos, el producto es mayor que los factores y el cociente es siempre menor que el dividendo. El trabajo colectivo como dispositivo de formación permitió poner en juego las ideas de cada uno y cuestionarlas, generar acuerdos, probar hipótesis e intentar explicar los resultados obtenidos. Ante obstáculos (que pueden tener origen en ideas previas fuertemente arraigadas) como los que enfrentaron estos maestros, la solución en pequeños grupos parece aportar elementos que difícilmente estarían presentes si se hiciera de manera individual.

PALABRAS CLAVE: **Formación docente, Didácticas específicas, Enseñanza de las matemáticas.**

Introducción

Los números decimales suelen identificarse como aquellos "que llevan punto", sea cual sea la unidad de referencia el punto sirve para distinguir entre la parte entera (las cifras a la izquierda de éste) y la no entera (las cifras a su derecha). A pesar de que los usamos cotidianamente (en el comercio, las noticias, los deportes, la medición, la ciencia) y su estudio comienza desde la primaria, según datos de evaluaciones a gran escala los decimales resultan ser uno de los contenidos en los que los estudiantes alcanzan un desempeño más bajo (INEE, 2008a, 2008b y 2009), los adultos (incluidos maestros y futuros maestros) los comprenden parcialmente (Ávila 2008; Aguayo, 2005) y además, son percibidos por los maestros como poco problemáticos en lo referente a su enseñanza (Ávila, *op cit*).

En la enseñanza de la operatoria con decimales existen dificultades respecto a la colocación del punto, pero hay además hay un cambio de significado: si bien es cierto que con los números naturales la multiplicación siempre “agranda” (el producto es mayor que cualquiera de los factores) y la división siempre “achica” (el cociente siempre es menor que el dividendo), esto no se verifica en todos los casos cuando hay números decimales. Cuando uno o ambos factores se encuentran entre 0 y 1, el producto no es mayor que cualquiera de los dos factores, por lo que la multiplicación deja de ser una operación que siempre agranda y ya no tiene sentido pensarla como “tantas veces”.[i] Respecto a la división, las experiencias más numerosas tienen que ver con situaciones en las que ésta operación permite encontrar el resultado de un reparto, por ello tiene sentido que el cociente (resultado del reparto) sea siempre menor que el dividendo (cantidad que se va a repartir). No obstante, si el divisor es un número que se encuentra entre el 0 y 1 el cociente será mayor que el dividendo.

Estos resultados contradicen la amplia experiencia adquirida al operar con números naturales por lo que es frecuente que el resolutor pierda el control del rango en el que puede encontrarse el resultado, dudar del resultado obtenido atribuyéndolo a un error en el procedimiento de cálculo, o bien, aun cuando las operaciones se hayan hecho con calculadora y no se dude de su veracidad, carecer de medios para justificar el resultado.

Desde hace más de tres décadas se ha investigado sobre este fenómeno con alumnos de escolaridad básica, con maestros y con estudiantes de magisterio. En algunos de estos trabajos, los investigadores afirman que las dificultades se deben a concepciones erróneas *misconceptions*) atribuibles a modelos de conducta primitivos que permanecen implícitos (Bell, *et al*, 1981; Bell, *et al*, 1984; Fishbein, *et al*, 1985 y Hart, 1981 citados en Maza, 1991; Graeber, *et al*, 1989; Tirosh and Graeber, 1990):

– “El de la multiplicación sería la suma reiterada. A partir de él se puede comprender que el estudiante adjudique, inicialmente, un distinto papel a cada uno de los factores en juego, resultando que uno se repite y el otro marca el número de veces que el anterior se repite (multiplicando y multiplicador, respectivamente). Esto implica que la multiplicación signifique un aumento del multiplicando.

- El modelo intuitivo inicial de la división es el de 'partición': se tratará en él de repartir una cantidad en un número dado de partes iguales, siendo la incógnita el tamaño de cada parte. Por este motivo, el dividendo tendría que ser mayor que el divisor (no se podría repartir 10 caramelos entre 24 partes) y el cociente sería menor que el dividendo (ya que la parte deberá ser menor que el todo que se reparte).

- El modelo más elaborado de división se denomina de 'agrupamiento' (o cuotición)[ii]: en este modelo se conoce la cantidad a repartir y el tamaño de cada parte, pero se ignora el número de partes o grupos que se pueden formar. Los preconceptos que se originan son análogos a los del modelo anterior." (Maza, 1991, p. 94).

En Maza (*op cit*); Gairín (1998); De Castro, *et al*, (2008); Simon (1993); y Graeber, (*op cit*) se encontró que maestros y estudiantes de magisterio manifestaron ideas en alguna medida acordes a los modelos anteriormente descritos.

Contenido

El trabajo aquí referido forma parte de una investigación más amplia que tiene como propósito aportar conocimientos sobre la problemática de la formación de maestros de primaria para la enseñanza de las matemáticas, específicamente para la enseñanza de los números decimales.[iii]

En la actividad del laberinto[iv] (que es la que se discute en este trabajo) la consigna fue: *Trabajar en equipos de 4 o 5 integrantes. Se comienza con 100 puntos en la parte superior del laberinto y hay que elegir el camino que consideren más favorable para que al llegar a la meta tengan los más puntos posibles. Trazar el camino que seguirán en el laberinto. Sólo se puede pasar por cada lugar una vez. Una vez trazado, realizar las operaciones con una calculadora y anotar el total de puntos obtenido al llegar a la meta.*

IMAGEN 1

La estrategia ganadora consiste en anticipar el resultado o el rango en el que se encontrará el resultado al realizar una u otra operación, así se elige el camino más favorable. Es importante resaltar que antes de hacer las operaciones los maestros debían trazar el camino, de esta manera el cálculo fungió como una verificación de sus hipótesis.

También es importante el hecho de que las operaciones se hicieran con calculadora por dos razones, la primera es que el propósito de la actividad era poner en juego las ideas de los maestros acerca de las multiplicaciones y divisiones con decimales, y no sus habilidades de cálculo con papel y lápiz; y la segunda es que partimos del supuesto de que los resultados que arroja una calculadora son lo suficientemente confiables como para no ponerlos en duda, a diferencia de lo que podría ocurrir si se hicieran con papel y lápiz. Otra cuestión es que en la hoja que se les repartió la imagen del laberinto aparecía cuatro veces, por lo que ellos podían hacer más de un intento para hallar caminos favorables y obtener mejores puntajes.

La actividad del laberinto tuvo lugar en la primera sesión del taller, los maestros Efraín, Isela, Carina y Fátima se juntaron para conformar un equipo.[v]

Su primera hipótesis consistió en elegir caminos en los que pasaran por sumas y multiplicaciones, y evitar las restas y divisiones independientemente de los números involucrados. Su primer camino fue *100+0.7×1.2+1.9×1.9×1.99×0.97=META.* Carina explicó “bueno, yo aquí deduje porque vamos sumando, sumamos y multiplicar, porque ‘entre’ pues nos va a dividir, va a salir menos”. La conductora del taller se acercó al equipo en cuestión y les comentó que era posible alcanzar un puntaje mucho mayor. Carina cuestionó esta afirmación, después de todo, habían elegido sumas y multiplicaciones, operaciones que como ella bien sabía, aumentan.

En su siguiente intento incluyeron otro criterio, elegir operaciones por las que “vale la pena pasar” con la idea de que acrecentarían el puntaje. Por eso, cuando llegaron a un punto en el que debían optar entre +2.1 y ×1.2 (ambas consideradas operaciones favorables) discutieron lo siguiente:

Carina: ¿cuánto te da más, multiplicar o sumar?

Efraín: sumar.

Carina: no, multiplicado (…) porque sumado nada más le sumas.

Completaron entonces el segundo laberinto de la siguiente manera: *100+0.7×1.2×0.99÷0.8×1.09 ×1.01=META*. Sin embargo, cuando Efraín hizo las operaciones con la calculadora se dio cuenta de que algo había salido mal con su estrategia, dijo “bajamos” y entre risas responsabilizaron a la operación ÷0.8 explicando que lo que podrían haber ganado con las multiplicaciones lo perdieron con esa división.

Para su tercer intento Isela fue señalando un camino en el que hubiera solamente multiplicaciones, *100×0.9×1.89×0.5×1.99×0.97=META.*

Carina: pero ve cuánto multiplicas, el valor. Acá vale más, un entero…

En este punto Carina parece haber notado que en función de los números involucrados hay diferencias entre una multiplicación y otra, pero no es clara su hipótesis.

La conductora del taller comentó a todo el grupo que un equipo llegó a 10 mil puntos. En el equipo consideran que quizá se trata de hacer más operaciones, o sea, trazar un recorrido mayor. Isela propuso “tenemos que buscar los caminos que sumen y multipliquen, si tenemos que arriesgar, arriesgamos en menos (en las restas) no en división”.

A pesar de haber estado realizando las operaciones en la calculadora no habían reparado en resultados como 100÷0.6 > 100×0.9, sin embargo, al comenzar el tercer laberinto Fátima dividió 100÷0.6 obteniendo 166.6… Al ver su expresión, la conductora del taller preguntó si estaba mal el resultado obtenido, Efraín respondió sin vacilar “la calculadora está mal” haciendo reír al resto del equipo.

Efraín: cómo es posible que me dé una numeración más alta que multiplicarle (se refiere a cómo es posible que 100÷0.6 > 100×0.9).

Conductora: entonces la calculadora…

Efraín: está mal la calculadora.

Conductora: a ver, otra (calculadora).

Efraín: 100×0.9 me da 90 si me voy por acá, y si me voy por acá (100÷0.6) ¡166!

Conductora: ¿cuál conviene?

Fátima: la división.

Efraín: es que… no queríamos dividir nunca.

Isela: tiene que ser con décimos, si vamos a dividir tiene que ser con décimos.

Si bien en este punto Isela notó un aspecto importante (que el divisor deber tener cifras decimales) no es posible afirmar que esté pensando en que para obtener un cociente mayor el divisor tiene que ser un número entre 0 y 1.

Efraín volvió a teclear 100÷0.6 en la calculadora y dividió el resultado entre 0.4 (que es otra posibilidad del laberinto en ese punto) diciendo “no creo que salga la misma belleza” (cociente mayor que el dividendo), sin embargo, se sorprendió junto con el resto del equipo al ver el resultado. Entonces se pusieron a buscar otras divisiones en el laberinto, la siguiente que probaron fue ÷2.01.

Efraín: ahí sí bajó.

Isela: no deben de ser decimales.

Efraín: mientras menos personitas hay, entre más se divide el pastel hay más personas.

Carina: no, tienen que ser… enteros no.

Isela: decimales nada más.

Carina parece intuir que les convienen las divisiones entre números menores que 1, pero también es atractiva la multiplicación ×0.99 porque casi es el entero. Cuando llegaron a ese punto del laberinto hicieron dicha multiplicación y aunque no repararon en que su puntaje disminuyó, sí estaban conscientes de que su estrategia había producido un mejor resultado que los anteriores. En cierto punto, Fátima propuso elegir ÷0.7 mientras Carina prefería ×1.09. Siguieron confiando en la multiplicación aunque en este caso la división era mejor opción.

El camino trazado en su tercer laberinto fue *100÷0.6÷0.4×1.9÷0.09×0.9+0.7×1.2×0.99+2.1÷0.5÷0.8–0.8×1.09÷0.7=META*.

Como pudo verse, las estrategias elegidas fueron cambiando:

a) Elegir solamente sumas y multiplicaciones sin considerar los números involucrados.

b) Elegir aquellas multiplicaciones y sumas que resultaran más ventajosas, lo que se tradujo en preferir a las primeras sobre las segundas (bajo el supuesto de que cualquier multiplicación aumentaría más el puntaje que una suma).

c) Hacer caminos más largos (más operaciones) como método para aumentar el puntaje.

d) Con el propósito de atender el criterio del inciso b), es posible que en algún punto del laberinto exista la necesidad de elegir entre una resta y una división, debiendo preferir a la primera sobre la segunda.

e) Ante la evidencia de que existen divisiones que agrandan, se consideraron elegibles siempre y cuando el divisor tuviera cifras a la derecha del punto decimal.

f) Las divisiones en las que el divisor tenía cifras a la derecha del punto decimal pero era mayor que 1, fueron descartadas.

g) Con las multiplicaciones no hubo un criterio claro (quizá por falta de tiempo para seguir explorando los distintos casos), para algunos seguían siendo las operaciones preferidas al considerarlas como las más favorables, mientras que casos como ×0.97 hicieron que otros maestros empezaran a preferir a las divisiones con divisor entre 0 y 1.

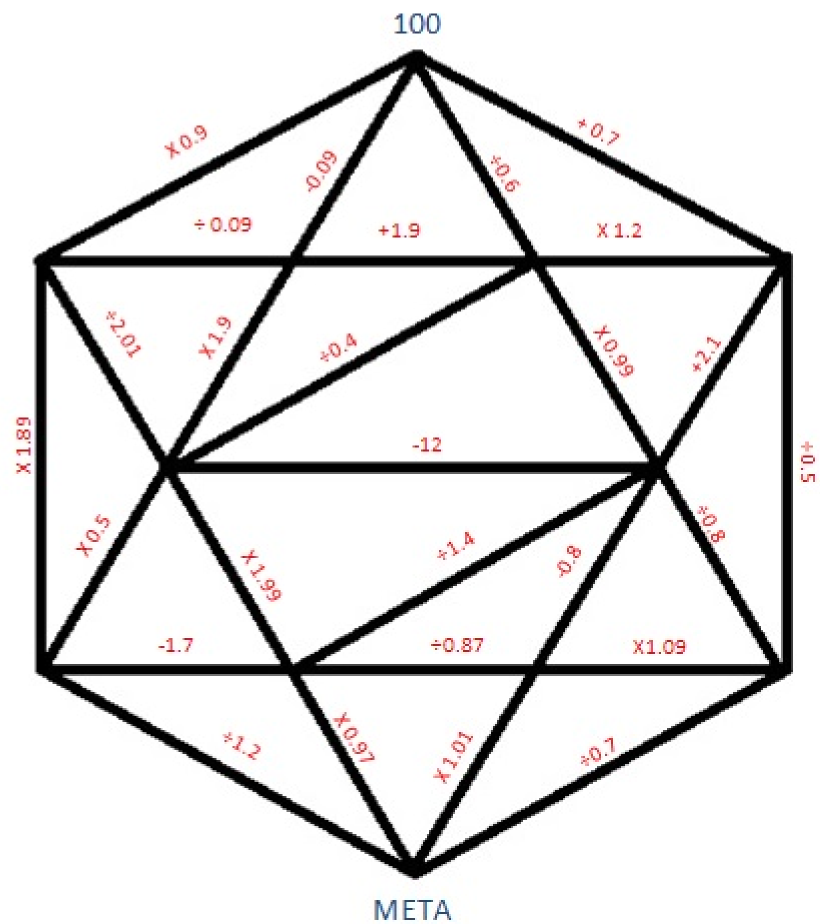
Algunos de los criterios que fueron dándose invalidan total o parcialmente a uno o más criterios previos. Desde nuestra mirada, hubo un movimiento dialéctico entre los cambios en los criterios y los cambios de estrategia, el cambio en uno tenía influencia sobre el otro.

Conclusiones

¿Cómo es que un significado más amplio del campo multiplicativo permanece oculto para los maestros a pesar de que continuaron su educación más allá de la primaria y de ser ellos mismos educadores? Hacen falta más datos para pretender dar respuesta, sin embargo, dada la consistencia de los resultados con investigaciones previas, es posible aventurar algunas ideas. Por un lado, es evidente que la ampliación del significado de estas operaciones es compleja para los estudiantes de educación básica y lo sigue siendo para los adultos que ejercen la docencia. Por otro, cabe preguntarse si las estrategias didácticas que hemos estado empleando para abordar el campo multiplicativo son las únicas y las más favorecedoras para los estudiantes. La actividad del laberinto, si bien mostró un buen potencial didáctico, no es suficiente para lograr de una vez y para siempre la ampliación de significados, surgieron ideas iniciales sobre divisiones que agrandan y algunas menos sólidas sobre multiplicaciones que achican, así como de sus causas, pero en expresiones como la de Efraín (“mientras menos personitas hay, entre más se divide el pastel hay más personas”) y la de una maestra de otro equipo (“entre más partes divida el entero más cachitos tengo ¿no?”) se percibe un conocimiento en construcción.

Vale la pena destacar que el trabajo colectivo en la resolución de este problema resultó fundamental. El hecho de que fuera posible discutir las ideas, probar estrategias con el apoyo de los compañeros, dudar e hipotetizar de manera conjunta sobre los resultados obtenidos, fue sumamente importante. Además de lo anterior, hubo dos cuestiones centrales que también se relacionan con el trabajo colectivo: 1) Conocer los puntajes de otros equipos permitió “salir” de las ideas propias y cuestionarlas ante la evidencia de su falta de validez en el dominio que suponen las divisiones y multiplicaciones que involucran números entre 0 y 1. Si otros equipos no hubieran obtenido resultados mayores, es posible que el camino trazado en el primer laberinto figurara como el más favorable; y 2) El apoyo del grupo posibilitó que hubiera un clima de confianza para mostrar las ideas propias aun cuando resultaran incorrectas o sin validez en el dominio de los decimales. Esto es particularmente delicado tratándose de maestros en servicio que se espera (y ellos mismos lo esperan también) sepan con cierto grado de profundidad, aquello que han de enseñar en la primaria.

Tablas y figuras



Bibliografía

Aguayo (2005). *La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el contexto de los números racionales.* Tesis para obtener el grado de Doctor en Educación, Universidad Pedagógica Nacional. Directora Alicia Ávila.

Ávila, Alicia (2008). "Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias de un contenido de saber cuasi invisible." *Educación Matemática*, Volumen 20, Número 2, pp. 5-33.

De Castro, Carlos; Castro, Enrique y Segovia, Isidoro (2008). "Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: estudio con maestros en formación" *Actas del VIII Simposio de la SEIEM,* pp. 1-9.

Gairín, José María (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral, Departamento de

Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Director Luis Rico Romero.

Graeber, Ana; Tirosh, Dina and Glover, Rosseane (1989). "Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division", *Journal for Research in Mathematics Education*, Volume 20, Number 1, pp. 95-102.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2008). *Estudio comparativo del aprendizaje en Sexto de Primaria en México 2005-2006: Español y Matemáticas*. INEE, Ciudad de México.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2008). *Los decimales: más que una escritura.* Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa. INEE, Ciudad de México.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2009). *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Español, Matemáticas, Biología y Formación cívica y ética*. INEE, Ciudad de México.

Maza, Carlos (1991). "Preconceptos erróneos en multiplicación y división entre futuros profesores", *Infancia y aprendizaje*, 56, pp. 93-103.

Tirosh, Dina and Graeber, Ana (1990). "Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division", *Journal for Research in Mathematics Education*, Volume 21, Number 2, pp. 98-108

Moreno Luz María, Antonio Villa, Nora Ibarra, Eduardo Vaquero, Mauricio Castillo, Nelly Alvarado, Laura Nájera y Elsa Guevara (2012). "Violencia de género hacia el estudiantado de medicina. Estudio exploratorio" ponencia presentada en la modalidad de cartel en la *LXVI Reunión anual de Salud Pública*, Pachuca Hidalgo, 21 al 24 de noviembre.

Ortíz Gómez, Teresa (2006) *Medicina, historia y género: 130 años de investigación feminista*. Oviedo: Ediciones KRK

Parviainen, Mia (2008), "The Experiences of Women in Computer Science. The Importance of Awareness and Communication". *Journal of the Sociology of Self-Knowledge*, I (4), 87-94.

Tisdell, E. J. (2000), "Feminist pedagogies" in E. R. Hayes & D. D. Flannery (Eds.), *Women as learners. The Significance of Gender in Adult Learning.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Referencias

[i] En la escuela primaria se enseña el significado de la multiplicación como "tantas veces", en lugar de sumar 4 + 4 + 4 se escribe 3 × 4 que puede leerse "tres veces 4".

[ii] También se conocen como "tasativos".

[iii] En esta parte del trabajo participaron el Dr. David Block Sevilla (DIE-CINVESTAV) (diseño y puesta en marcha del taller) y la Maestra Silvia García Peña (independiente) (conducción del taller).

[iv] Actividad adaptada de Castro, E. (2001), "Números decimales", en Castro, E. (ed.), Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria, Síntesis, Madrid.

[v] Todos ellos maestros de primaria en activo con grupos de 4° a 6° grados. Se han cambiado sus nombres.