

ENTENDIENDO LA COMPLEMENTARIEDAD DE LAS REPRESENTACIONES UTILIZADAS POR ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ/ ALMA ALICIA BENÍTEZ PÉREZ
Instituto Politécnico Nacional

RESUMEN: En este documento se analiza la forma en que los antecedentes de los estudiantes influyen para elegir una representación durante la solución de un problema así como el trabajo de los estudiantes con las representaciones elegidas. Los datos se obtienen de la aplicación de seis problemas a un grupo de nueve estudiantes del primer semestre de una carrera de ingeniería, que habían iniciado un curso de cálculo diferencial e integral. Los elementos teóricos utilizados para el análisis se refieren a la efectividad de una representación y a la distribución de la información para conseguir representaciones complementarias que se comuniquen entre sí. Los resultados obtenidos aportan evidencia de la estrecha relación que existe entre la representación

elegida por un estudiante, la información que identifica del enunciado del problema y los conocimientos previos con que cuenta; también se encontró evidencia para afirmar que una vez que los estudiantes eligen la representación que consideran más adecuada, una parte de la información puede quedar oculta para ellos, en esa representación, lo que impide que puedan resolver con éxito un problema.

PALABRAS CLAVE: Estudiantes, representaciones simbólicas, solución de problemas.

Introducción

Para atender las demandas de las sociedades del siglo XXI se reconoce lo importante que es promover en el estudiante el desarrollo de competencias genéricas y específicas de cada área temática, en el caso de la Matemática se enfatiza que: a) en el bachillerato las matemáticas deben contribuir para que el estudiante conciba esta disciplina: como una herramienta para entender e interpretar un fenómeno; como una forma de identificar patrones, realizar conjeturas y verificarlas, y de comunicar el conocimiento matemático a sus compañeros y profesores utilizando el lenguaje formal y el escrito (ICAS, 2010); b) en la universidad, se mencionan tres destrezas que los graduados en matemáticas o áreas

afines deben poseer, la capacidad de idear demostraciones, la capacidad de modelizar matemáticamente una situación, y la capacidad de resolver problemas con técnicas matemáticas (Tuning Educational, 2003, p. 182).

La resolución de problemas juega un papel fundamental en el desarrollo de estas habilidades, y las representaciones a su vez, hacen visibles los procesos que sigue un estudiante al trabajar con un problema. En la literatura es posible encontrar diferentes investigaciones para conocer el papel que juegan las representaciones cuando los estudiantes resuelven problemas de matemáticas. Por una parte Parnafes y diSessa, (2004) señalan que el razonamiento de los estudiantes está estrechamente relacionado con la representación que emplean cuando resuelven un problema y que algunas representaciones resaltan aspectos de un concepto, mientras que otras los ocultan, concluyen que cuando los estudiantes utilizan varias representaciones, desarrollan una comprensión más flexible de un concepto. Ainsworth (2006) refuerza estas ideas al señalar que cuando los estudiantes utilizan una representación apropiada su desempeño mejora. Otros autores que se refieren al papel de las representaciones son Goldin y Kaput (1996), quienes señalan que una persona relaciona representaciones cuando es capaz de integrar sus estructuras cognitivas de tal forma que dada una representación externa, el individuo es capaz de predecir o identificar su contraparte (p. 416), Duval (1993) destaca la relación entre representaciones como un elemento importante para estimular la reflexión de los estudiantes. Debido a que las representaciones son el eje de la investigación que aquí se reporta, es conveniente aclarar que en este documento se utilizará este término en el sentido que lo hace Ainsworth (2006).

Lo que se ha explicado en los párrafos anteriores fue el punto de partida de dos investigaciones que se llevaron a cabo en el IPN (Números de Registro 20111060 y 20110397) y una de las preguntas que guiaron las investigaciones fue ¿Cuál es el papel de las representaciones en la resolución de problemas de matemáticas? Para dar respuesta a esta pregunta de la investigación se establecieron los siguientes objetivos específicos: a) Analizar la forma en que los antecedentes de los estudiantes influyen para elegir una representación durante la solución de un problema; b) Analizar el trabajo de los estudiantes con las representaciones elegidas. En este documento se analiza el trabajo de los estudiantes en dos problemas.

Referentes Teóricos

Ainsworth, (2006) explica que las representaciones difieren en su contenido, en el objetivo de los usuarios de la representación y en las estrategias de enseñanza utilizadas. Indica también que para conocer la efectividad de una representación, se deben considerar la información incluida en la representación y la forma en que esta es representada. Para esta autora, en un sistema multi-representacional se emplean al menos dos representaciones; el sistema permite flexibilidad en la forma en que la información está distribuida en las representaciones; puede incluir figuras, texto, animaciones, gráficas etc. también debe tomar en cuenta la secuencia en la que cada representación es presentada o construida. Los trabajos de Ainsworth (2006) explican con detalle el importante papel que juegan las representaciones utilizadas por los estudiantes para su aprendizaje.

Participantes

El estudio se llevó a cabo en un plantel que pertenece al nivel superior en una escuela de Ingeniería del Instituto Politécnico Nacional. Los profesores–investigadores forman parte de la planta docente, como profesores de matemáticas en el mismo plantel en que se efectuó el estudio.

En el estudio participaron nueve estudiantes con una edad promedio de 18 a 19 años, que provenían de un bachillerato tecnológico y habían tomado cursos de álgebra, trigonometría, y geometría analítica.

Los estudiantes que participaron en el estudio se encontraban inscritos en un curso de cálculo diferencial e integral. El criterio de selección de los estudiantes fue que elegir aquellos estudiantes que externaran sus dudas y mostraran interés por comunicar a sus compañeros los procedimientos utilizados para resolver los problemas, aun cuando sus respuestas no fueran correctas o estuvieran incompletas.

Materiales y procedimientos

Los estudiantes trabajaron en seis problemas durante dos sesiones y en dos etapas; en la primera, interactuaron en equipos de tres estudiantes, y en la segunda, cuatro de los nueve estudiantes expusieron al resto del grupo el trabajo que habían realizado en los equipos. En este documento analizaremos el trabajo de estos cuatro estudiantes en dos problemas y haremos referencia a ellos como estudiantes A, B, C y D.

Los materiales empleados para la recolección de datos incluyeron lápiz y papel, calculadora científica y pizarrón; las sesiones fueron grabadas con equipos de audio y video.

Los problemas

Para la selección de los problemas se tomaron en cuenta los objetivos: a) Analizar la forma en que los antecedentes de los estudiantes influyen en la representación que utilizan durante la solución de un problema; b) Analizar el trabajo de los estudiantes con las representaciones elegidas.

Para alcanzar el primer objetivo se seleccionaron tres problemas que favoreciera el que los estudiantes pusieran en juego son conocimientos previos. En este documento se analiza uno de estos problemas, el problema incluye ideas matemáticas que se considera forman parte de los antecedentes de los estudiantes: teorema de Pitágoras; congruencia de triángulos, concepto de simetría, sistema de coordenadas rectangulares y propiedades del cuadrado.

Para lograr el segundo objetivo se realizó un análisis del programa de la asignatura de cálculo diferencial e integral. En la unidad I se incluyen los temas: el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros, el conjunto de números racionales y el campo de los números reales. El objetivo de esta unidad es que el alumno utilice las propiedades de los números reales en la resolución de desigualdades y sea capaz de expresar la solución de las desigualdades en términos de intervalos. También se menciona que es importante que los estudiantes utilicen a los números naturales, enteros, racionales y reales en la resolución de problemas.

El contenido matemático de los tres problemas seleccionados para alcanzar el segundo objetivo incluyó el uso de las propiedades de los números naturales y de los números reales. En este documento se presentan los resultados del trabajo de los estudiantes en uno de estos problemas.

Resultados y discusión

Los elementos que se consideraron para realizar en el análisis son: a) identificar lo que toman en cuenta los estudiantes para seleccionar una representación; b) identificar cómo el estudiante decodifica la información de la representación utilizada; c) analizar la forma en que los estudiantes relacionan las representaciones que usan con el dominio que

representan. Estas acciones corresponden a lo que Ainsworth (2006) llama tareas cognitivas que representan retos para el estudiante pero que dan cuenta del aprendizaje que lleva a cabo. En los siguientes párrafos los paréntesis rectangulares, corresponden a comentarios del profesor-investigador.

Problema 1. Las diagonales de un cuadrado

Las diagonales de un cuadrado que mide ocho unidades de cada lado se encuentran sobre los ejes coordenados, determine las coordenadas de los vértices del cuadrado.

El problema se presentó a los estudiantes en lenguaje verbal, el estudiante C eligió una representación gráfica para explorar la información del problema; identificó la información clave del enunciado: la posición de la figura, los cuatro ángulos rectos del cuadrado, la medida del lado y la posición de las diagonales sobre los ejes, estos elementos se presentan en la Figura 1. El estudiante D también eligió una representación gráfica; identificó del enunciado, la posición de la figura y la medida del lado (Figura 2).

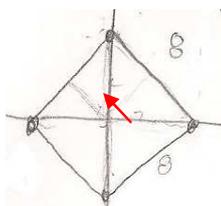


Figura 1: Trabajo exploratorio del estudiante C

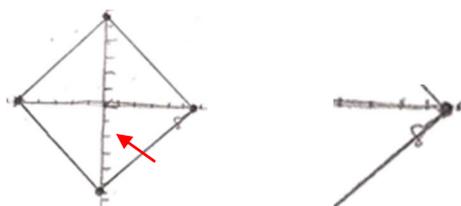


Figura 2: Trabajo exploratorio del estudiante D

La representación y la explicación iniciales utilizadas por el estudiante C, son la evidencia para afirmar que utilizó la simetría de la figura para aplicar el Teorema de Pitágoras (conocimientos previos) a uno de los triángulos rectángulos, como se explica en el siguiente extracto.

Estudiante C: ...las diagonales coinciden con los ejes coordenados, tenemos que estos son los lados [señala en la Figura 1, el triángulo superior que forma el cuadrado con el eje X]... entonces lo que nos piden es determinar las coordenadas de los vértices. Para eso, podemos formar un triángulo así, donde por teorema de Pitágoras tenemos catetos y tenemos una hipotenusa y el resultado iría así [determina en forma algebraica la longitud de la hipotenusa del triángulo], Con el valor que determinó y retomando de nuevo la simetría de la figura escribió en forma correcta las coordenadas de los vértices del cuadrado.

Por otra parte el estudiante D también utilizó la simetría de la figura, pero a diferencia del estudiante C, le pareció más conveniente modificar la posición de la misma (Figura 3). Una vez identificadas las propiedades del cuadrado, realizó una nueva construcción y a partir de ella determinó la longitud de una diagonal del cuadrado.

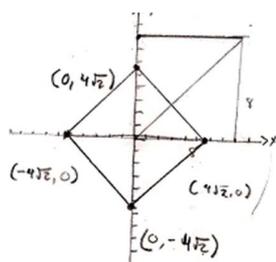


Figura 3: Segunda figura trazada por el estudiante D

Estudiante D: vi que el cuadrado tiene ocho de lado y sus vértices están en los ejes, entonces lo moví [señala el cuadrado de la Figura 3] y lo puse sobre el eje x, de tal manera que tuviera ocho de largo y ocho de ancho y los ángulo rectos quedarán sobre los ejes. Y así puedo usar el teorema de Pitágoras [escribe el desarrollo] para obtener la medida de la hipotenusa que mide (Figura 3). Finalmente escribió en forma correcta las coordenadas de los vértices del cuadrado original.

Al analizar el trabajo de los estudiantes es posible identificar que la representación gráfica elegida por los estudiante C y D, favoreció no sólo el que llegaran a la solución, sino que recordaran las propiedades del cuadrado lo que permitió que el estudiante D incluso girara la figura sin perder información. El uso de la escala en la figura 6 es evidencia de la

efectividad de esta representación para el estudiante D. Tanto el estudiante C como el estudiante D emplean un sistema multi-representacional (representaciones verbal, gráfica y algebraica), la información que manejan queda distribuida en estas representaciones. En la representación gráfica manejan la medida de los ángulos rectos y de los lados del cuadrado y en la representación algebraica relacionan estos datos para llegar a la solución.

Los números naturales que satisfacen una condición

Determine los números naturales que cumplen que dos tercios del número sean menores que cinco y cuatro octavos del número sean mayores que uno.

El enunciado se presentó a los estudiantes en forma verbal, ellos tenían que establecer cuáles eran los números naturales que cumplían con las dos condiciones en forma simultánea, debían utilizar las propiedades de los números reales relacionadas con las desigualdades.

Al inicio, el estudiante A mostró dificultad para escribir, utilizando una representación algebraica, la información clave del enunciado del problema (Figura 4). Identificó los números mencionados en el enunciado y estableció una relación entre ellos [tercer renglón de la Figura 4), aunque no reflexionó en que la segunda relación [cuarto renglón de la Figura 4) era falsa y que lo que escribió no correspondía a la información del enunciado.

El estudiante B recordó cuáles eran los números naturales y utilizó al concepto de fracción, como la relación de la parte con el todo, como se identificó en su explicación (Figura 5).

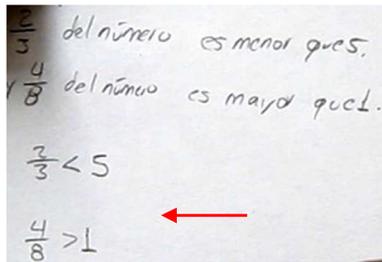


Figura 4: Representación algebraica utilizada por el estudiante A

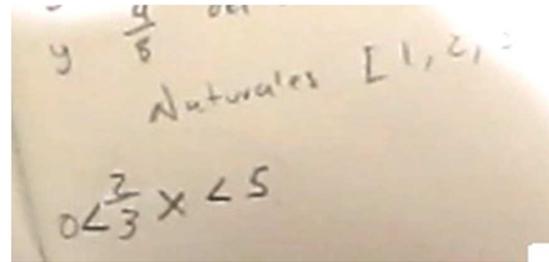


Figura 5: Representación algebraica y numérica utilizada por el estudiante B

por el estudiante A

En una etapa posterior, el estudiante A trabajó con el concepto de fracción como la relación de la parte con el todo y logró establecer las dos desigualdades que representan las condiciones del problema.

Estudiante A: El número natural debe de cumplir que dos terceras partes de ese número sean menor que cinco y cuatro octavos del número natural debe de ser mayor a uno. Entonces ya tenemos dos inecuaciones para resolver.

Es importante mencionar que cuando los estudiantes escribieron las desigualdades, mencionaron la necesidad de utilizar las propiedades de los números reales -que fueron estudiadas en clase- para determinar el conjunto solución para cada desigualdad.

La dificultad que se identificó en el trabajo de los estudiantes A y B, y en general en el resto del grupo, fue que una vez obtenido el conjunto solución que satisfacía las dos desigualdades, no pudieron relacionar la solución con el contexto del problema, que pedía determinar los números naturales que cumplían las condiciones. Los estudiantes asumieron que la solución se encontraba en el conjunto de los números reales. Una posible razón es que en el curso de cálculo diferencial e integral, se enfatiza el trabajo con los números reales y no así con los números naturales o enteros ya que se considera que los estudiantes han estudiado estos conjuntos en sus cursos previos por lo que fue necesaria la intervención del

profesor-investigador para que los estudiantes llegaran a que los números naturales que cumplen las dos condiciones son 3, 4, 5, 6 y 7.

Los estudiantes tuvieron un mejor desempeño en el primer problema, lo que hace suponer que la representación gráfica les permitió poner en juego sus conocimientos previos y explorar otras formas de resolverlo. En el segundo problema se observó que intentaron utilizar lo que recordaban de sus clases, que para ellos fue más complicado trabajar en forma algebraica y que el profesor es quién tiene que dirigir la reflexión de los estudiantes para reforzar sus conocimientos previos en nuevos contextos, en este caso después de resolver las desigualdades utilizando las propiedades de los número reales regresar al enunciado del problema y identificar los números naturales que satisfacían la condición.

Conclusiones

En el trabajo de los estudiantes se encontró evidencia de la estrecha relación que existe entre la representación utilizada por el estudiante, la información que identifica del enunciado del problema y sus conocimientos previos, como lo muestra el trabajo de los estudiantes C y D.

Del análisis de los datos es posible inferir que una vez que los estudiantes eligen una representación para trabajar, es posible que una parte de la información puede quedar oculta para ellos, en esa representación. La evidencia que sustenta esta afirmación se encuentra en el trabajo de los estudiantes C y D quienes pudieron determinar el conjunto de números reales que satisfacen las dos condiciones pero omitieron que los números solicitados en el enunciado del problema eran naturales.

Bibliografía

- Ainsworth, S. (2006). A conceptual framework for considering learning with multiple representations, *Learning and Instruction*: 16 183-198.
- Duval, R. (1993), Semiotic representation registers and cognitive functioning thinking. *Annals of Didactics and Cognitive Science* 5, Strasbourg: IREM: 37-65.
- Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En Steffe, L. & Neshier, P. (Eds.) del libro. *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- ICAS, Intersegmental Committee of the Academic Senates (2010). Statement of competencies in mathematics expected of entering college students, (en línea), California State University and University of California. Acceso 11 de noviembre de 2011 en: <http://icas-ca.org/competencies-in-mathematics>.
- Parnafes, O. y diSessa, A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning* 9, 251-280.
- Tuning Educational Structures in Europe, Informe Final Fase Uno (2003). Universidad de Deusto, España, Ed. J. González.