

# EL MODELO DE VAN HIELE APLICADO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA DE SECCIONES CÓNICAS APOYADO CON GEOGEBRA.

---

MARÍA DEL ROSARIO VELÁZQUEZ CAMACHO/ JAIME SALVADOR CASTELLANOS MALO  
Tecnológico de Monterrey, Campus Querétaro

**RESUMEN:** La Geometría Analítica abarca dos tipos de problemas: representar gráficamente una ecuación algebraica conocida (uso del pensamiento deductivo) y encontrar la ecuación que representa una cónica bajo condiciones dadas (uso del pensamiento inductivo). Estos dos tipos de problemas se estudian en los cursos de Preparatoria.

En esta investigación se realizó un cuasi-experimento en el cual se trabajó con un grupo control bajo el modelo educativo del Tec de Monterrey y un grupo experimental que usó el modelo de Van Hiele y el uso del

software GEOGEBRA. La investigación se realizó en un periodo de diez semanas. Al finalizar la investigación, se obtuvieron diferencias significativas en el nivel de razonamiento de los dos grupos.

**Palabras clave:** Secciones cónicas, modelo de Van Hiele, fases de aprendizaje, niveles de razonamiento, GEOGEBRA.

## Introducción

Las matemáticas son, junto con las demás ciencias, el resultado del intento del hombre por comprender y explicarse el universo y los fenómenos que en él ocurren. Su enseñanza, por lo tanto, “no debe consistir en la mera transmisión de un conocimiento fijo y acabado, sino que debe fomentar en el alumno la misma curiosidad y las actitudes que hicieron posible su aparición y que han permitido mantenerlas vigentes”. (Miguel, Ibañes y Ortega del Rincón, 1998, pág. 13)

Sin embargo, “las asignaturas que presentan mayor confusión pedagógica a los estudiantes, sobre todo en los niveles medio básico y medio son matemáticas y español, debido a que son asignaturas instrumentales, por lo que se debe estar atento a ambas” (Vázquez, 2005).

Además, dentro de las distintas áreas de la Matemática, hay diferentes situaciones a las cuales los estudiantes se tienen que enfrentar, sea cual sea el nivel educativo en el que se encuentran. En la Preparatoria, una de las áreas que presenta mayores dificultades es la Geometría Analítica.

Dentro de la Geometría Analítica, la enseñanza-aprendizaje de Secciones Cónicas es una de las áreas más destacadas, en esta área destacan dos problemas básicos:

- Problema Deductivo: Dada la ecuación de la Sección Cónica, representarla gráficamente y determinar cada elemento.
- Problema Inductivo: Dados algunos de los elementos de la Sección Cónica, determinar la ecuación de la misma.

Estos dos tipos de problemas que se presentan en el estudio de las Secciones Cónicas, son abordados en el curso de Matemáticas III de la Preparatoria del Tecnológico de Monterrey Campus Querétaro y es en el segundo tipo de problemas donde los alumnos presentan una problemática notoria en el aprendizaje de las Secciones Cónicas, esto se puede observar en los resultados obtenidos en los exámenes finales de semestres anteriores.

Por lo que se planteó el siguiente objetivo de investigación:

### **Objetivo**

Determinar el nivel de razonamiento al resolver problemas de secciones cónicas de tipo inductivo al que pueden llegar los alumnos que usan secuencias didácticas de enseñanza aprendizaje diseñadas a partir del Modelo de Van Hiele y el software GEOGEBRA, comparado con los alumnos que son tratados bajo el modelo Tec.

### **Hipótesis**

Los alumnos que usan secuencias didácticas de enseñanza-aprendizaje diseñadas a partir del Modelo de Van Hiele y el software GEOGEBRA, alcanzarán un nivel de razonamiento más alto al resolver problemas de secciones cónicas de tipo inductivo con respecto a aquellos que son tratados bajo el modelo Tec.

## Marco teórico

### El Modelo de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría

El modelo de Van Hiele tiene su origen en 1957, en el desarrollo de las tesis doctorales de Pierre y Dina Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998, pág. 26). El modelo consta de dos aspectos: los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. La instrucción y forma de trabajo de los alumnos en clase, las experiencias dentro del aula y las prácticas que diseñen los docentes son los principales factores que impactan directamente en su aprendizaje “creo que el desarrollo cognitivo no sólo depende de la edad o maduración biológica sino de la instrucción y los tipos de experiencias educativas pueden fomentar, o impedir, el desarrollo” (Van Hiele P. M., 1999, pág. 311). El paso de un nivel a otro debe ser gradual y afirma que un estudiante no puede pasar a un nivel superior sin haber dominado las habilidades de los niveles previos.

#### Niveles de razonamiento

**Nivel 1: Reconocimiento.** Se maneja solamente información visual, no considerada como matemática.

**Nivel 2: Análisis.** Se reconoce la presencia de propiedades matemáticas en los objetos geométricos, razonamiento a base de percepción.

**Nivel 3: Deducción informal.** Se comienza a desarrollar la capacidad de razonamiento, hay un manejo simple del razonamiento formal.

**Nivel 4: Deducción formal.** Se capacita al alumno para el razonamiento formal.

**Nivel 5: Rigor.** Se adquieren los conocimientos y se desarrolla toda la capacidad de razonamiento.

De acuerdo a la secuencia de las actividades que el profesor asigne a los estudiantes será el avance que ocurra de un nivel a otro.

#### Fases de aprendizaje

**Fase 1. Diagnóstico:** Su finalidad es la obtención de información del profesor y del alumno.

**Fase2. Orientación dirigida:** El profesor dirige a los alumnos para que descubran lo esencial. El alumno construye los elementos fundamentales de los conceptos.

**Fase3. Explicitación:** Su objetivo es el desarrollo de los contenidos propios del nivel.

**Fase 4. Orientación libre:** Es en esta fase donde se busca reforzar el contenido y llevarlo a diferentes situaciones cada vez más complejas.

**Fase 5. Integración:** Tiene como objetivo establecer y completar la red de relaciones conceptuales del nivel, la síntesis o la evaluación.

Al final de esta quinta fase en la que se logra alcanzar un nuevo nivel de razonamiento.

### **Descriptor de Nivel de Usiskin, Burger y Shaughnessy**

De acuerdo con López de Silanes (2012, págs. 48-52), algunos de los seguidores de Pierre Van Hiele, tales como Usiskin, Burger y Shaughnessy, han desarrollado la manera de evaluar el nivel de razonamiento al que un alumno llega.

Se entiende por “descriptor de nivel” las especificaciones necesarias que debe cumplir un alumno para avanzar de un nivel de razonamiento a otro. La tabla de descriptor de nivel elaborada por López de Silanes (2012) se encuentra en el Cuadro 1.

## **Metodología**

### **Tipo de diseño**

En el desarrollo de esta investigación, se utilizó un diseño cuasi-experimental donde se controló una variable dependiente (aplicación del Modelo de Van Hiele) sobre sus posibles efectos en la variable dependiente (nivel de razonamiento); los sujetos no fueron asignados al azar, se tomaron dos grupos preformados. Se aplicó una pre-prueba para garantizar que no había diferencias significativas al inicio de la intervención y se trabajó bajo hipótesis de diferencias de grupos (Hernández, Fernández y Baptista; 2006; pág. 203).

### **Muestra**

La presente investigación se realizó en la Preparatoria del Tecnológico de Monterrey Campus Querétaro, en el programa de Bachillerato Bilingüe, que cuenta con 700 alumnos,

delimitándose este estudio a la materia de Matemáticas III que forma parte del tercer semestre del Plan de Estudios.

Los alumnos que cursan esta materia son adolescentes de ambos sexos en un rango de edad entre 15 a 17 años, que por lo general están ya acostumbrados al uso de aparatos tecnológicos como teléfonos celulares, computadoras y tablets, aunque no necesariamente dentro de un contexto de una clase de matemáticas.

Para la presente investigación se tomaron tres grupos a manera de muestra:

**Grupo Control:** Un grupo de 31 alumnos.

**Grupo Experimental:** Un grupo de 29 alumnos.

Al **grupo Control** se le aplicaron técnicas bajo el Modelo educativo del Tecnológico de Monterrey, además de herramientas de trazo la regla y el compás.

Al **grupo experimental** se le aplicaron estrategias de enseñanza basadas en el Modelo de Van Hiele, además de herramientas de trazo la regla, el compás y el software GeoGebra.

### **Análisis de datos.**

Para el desarrollo de la investigación se aplicaron cuatro diferentes instrumentos de recolección de datos: un examen diagnóstico, dos exámenes parciales, un examen final. La presente investigación tiene como eje central el análisis cuantitativo de los datos, por lo que para verificar si existe o no diferencia significativa al final de la experimentación, se aplicó una prueba de hipótesis *t de student* en los resultados de diversas pruebas aplicadas a los dos grupos participantes. Estas pruebas se aplicaron a los resultados obtenidos en las evaluaciones de exámenes parciales y examen final a partir de la Tabla de descriptores de nivel de Burger, Shaughnessy y Usiskin.

## Resultados

En la presente investigación se aplicó la prueba de hipótesis *t de student* para verificar que los grupos participantes no mostraran diferencias significativas en la aplicación del **examen diagnóstico** que pudiesen ocasionar errores en la interpretación de los resultados obtenidos al aplicar el tratamiento experimental; posteriormente se aplicó la prueba a los resultados de cada examen aplicado para verificar si existió o no diferencia

significativa después de la intervención. Se aplicó la prueba con un nivel de confianza  $\alpha = 0.05$ .

En el examen diagnóstico se establecieron la hipótesis nula:  $H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$ . “No existe diferencia significativa en el nivel de razonamiento al resolver problemas de secciones cónicas de tipo inductivo al inicio de la investigación, entre los alumnos que trabajan bajo secuencias didácticas del modelo de Van Hiele y los que trabajan bajo el modelo Tec”. Y la hipótesis de investigación:  $H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$ . “Existe diferencia significativa en el nivel de razonamiento al resolver problemas de secciones cónicas de tipo inductivo al inicio de la investigación, entre los alumnos que trabajan bajo secuencias didácticas del modelo de Van Hiele y los que trabajan bajo el modelo Tec”.

En este caso se aplicó la prueba t de student para 55 grados de libertad (GDL), se obtuvo un valor T real de 0.2091 para un valor t crítico de 1.6733; de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006, pág. 384) “si el valor calculado es igual o mayor, se acepta la hipótesis de investigación”, por lo que en este caso, como  $T \text{ real} < T \text{ crítica}$  se rechaza la hipótesis de investigación y se acepta la hipótesis nula, por lo que No existe diferencia significativa en el nivel de razonamiento de ambos grupos al inicio de la investigación.

Posteriormente, se aplicaron los exámenes segundo parcial, tercer parcial y final, en cada caso se evaluó con la tabla de descriptores de nivel de Burger, Shaughnessy y Usiskin, encontrando los siguientes resultados en la prueba t de student que se muestran, en cada caso se consideró un nivel de significancia  $\alpha=0.05$  y se establecieron las hipótesis siguientes:

Hipótesis nula:  $H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$ . “No existe diferencia significativa en el nivel de razonamiento al resolver problemas de secciones cónicas de tipo inductivo entre los alumnos que trabajan bajo secuencias didácticas del modelo de Van Hiele y los que trabajan bajo el modelo Tec”.

Hipótesis de investigación:  $H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$ . “Existe diferencia significativa en el nivel de razonamiento al resolver problemas de secciones cónicas de tipo inductivo entre los alumnos que trabajan bajo secuencias didácticas del modelo de Van Hiele y los que trabajan bajo el modelo Tec”.

En el segundo examen parcial se analizaron 55 GDL, para un valor de T crítica de 1.6733 y con el valor obtenido de T real igual a 3.6901, se concluyó que se acepta la hipótesis de investigación.

Para el tercer examen parcial se tuvieron 54 GDL con un valor de T crítica de 1.6728, se obtuvo un valor de T real igual a 4.5298, por lo que se concluyó que se acepta la hipótesis de investigación.

En el examen final para 52 GDL y con un valor de T crítica de 1.6717, se obtuvo un valor de T real igual a 3.503, por lo que se concluyó que se acepta la hipótesis de investigación.

La tabla con los resultados de cada prueba aplicada se muestran en el cuadro 2.

Por lo anterior, para cualquiera de los exámenes aplicados al final de la intervención, se concluyó que “existe diferencia significativa en el nivel de razonamiento al resolver problemas de secciones cónicas de tipo inductivo entre los alumnos que trabajan bajo secuencias didácticas del modelo de Van Hiele y los que trabajan bajo el modelo Tec”.

Lo anterior indica que la aplicación del Modelo de Van Hiele apoyado con el uso del software GeoGebra apoya a los alumnos de la Prepa Tec, Campus Querétaro a incrementar su nivel de razonamiento a un nivel mayor que los alumnos que trabajan únicamente bajo el modelo educativo del Tec.

## Conclusiones

De acuerdo con los resultados obtenidos en el examen diagnóstico, los alumnos de los dos grupos se encontraban en el mismo nivel de reconocimiento, estando en el subnivel S.1.1, donde apenas lograban ubicar propiedades imprecisas para las secciones cónicas; después de la intervención, se encontró diferencia significativa en el nivel de razonamiento de los dos grupos, siendo el nivel más alto el presentado por los alumnos del grupo experimental.

A lo largo de la investigación los alumnos del grupo experimental fueron capaces de resolver problemas de tipo inductivo sin tantas complicaciones, lograron hacer uso de las

herramientas visuales que les proporciona GeoGebra para hacer el análisis correspondiente a las variables y parámetros de cada sección cónica. De acuerdo al modelo de Van Hiele, esto es gracias a que se les proporcionaron diversas herramientas y actividades para que su nivel de razonamiento aumentara, se utilizó el lenguaje adecuado a su nivel de razonamiento y esto ayudó a que los alumnos avanzaran a un nivel de razonamiento superior que si sólo hubieran trabajado bajo el modelo educativo del Tec de Monterrey.

## Referencias

- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31-48.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1984). English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. USA: NCTM.
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. *Revista EMA*, 2(1), 49-58.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). Metodología de la Investigación (Cuarta Edición ed.). México: Mc. Graw-Hill.
- López de Silanes Valgañón, F. J. (2012). Didáctica de las Matemáticas. Modelo de Van Hiele. Enseñanza de la Geometría en España. (Primera edición ed.). Barcelona, España: Editorial Da Vinci.
- Miguel, E., Ibañes, M., & Ortega del Rincón, T. (1998). Trigonometría. Educación Matemática en Secundaria. España: Síntesis.
- Van Hiele, P. (1959). The child's thought and Geometry. Netherland: ERIC.
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through activities that begin with play. National Council of Teachers of Mathematics.
- Vázquez Chagoyan, R. (Octubre de 2005). La escuela a examen (4a Entrega). Consideraciones generales acerca de la enseñanza de las matemáticas. Colaboraciones Libres. México.
- Velázquez Camacho, M. (2013). El Modelo de Van Hiele aplicado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas apoyado con trazos de regla-compás y GeoGebra. Universidad Marista de Querétaro. Querétaro, Qro.