¿QUÉ DIFICULTADES LES PRESENTA UN PROBLEMA MATEMÁTICO DEL CAMPO CONCEPTUAL DE LAS ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS A LOS ESTUDIANTES DE SEXTO Y TERCERO DE SECUNDARIA?

ALFONSO JAVIER BUSTAMANTE SANTOS
Instituto de Investigaciones en Educación, Universidad Veracruzana

RESUMEN: Este trabajo reporta el análisis de las respuestas de 329 estudiantes de sexto de primaria y tercero de secundaria del estado de Veracruz que dieron al enfrentar un problema matemático del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de los estudiantes que no lograron dar una respuesta correcta se debe a las dificultades experimentadas por no dominar cabalmente el algoritmo de la división y determinar las unidades de referencia del cociente.

PALABRAS CLAVE: **Educación básica, proporcionalidad, resolución de problemas.**

Introducción

Según el ACUERDO número 592 por el que se establece la Articulación de la Educación Básica se define la competencia como “la capacidad de responder a diferentes situaciones, e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (SEP, 2011, p. 22).

En esta reducción de la competencia como capacidad se enuncian las siguientes competencias como aquellas que integrarían la competencia matemática general:

En primaria y secundaria

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

En las evaluaciones estandarizadas del ámbito internacional (y algunas nacionales), los resultados obtenidos en el terreno educativo no han sido los ideales y es de esperarse debido a las diferencias contextuales entre los países. Por ejemplo la SEP (2012) informa que el promedio nacional en la prueba PISA 2009 es de 419 puntos en comparación con el promedio de la OCDE que es de 501 puntos.

Sabemos que los resultados de dichas pruebas, además de no evaluar lo que realmente saben los estudiantes, también podrían emplearse como una manera conocer las tendencias globales de lo valorado como importante por las instituciones financieras internacionales y que los jóvenes estudiantes deben conocer y dominar (Vaca, et al, 2010).

Este trabajo, reporta los resultados parciales de una investigación que busca entender, independientemente de los aspectos contextuales arriba mencionados, cuáles son las principales dificultades relacionadas con los sistemas de representación y las conceptualización matemática, que impiden a algunos estudiantes de primaria y secundaria resolver correctamente un problema matemático específico derivado de un reactivo liberado de la prueba PISA 2003 (INEE, 2013):

Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Referente teórico

La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (2009, 1990) “pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y aprendizaje de competencias complejas” (1990, p. 133). El aprendizaje de competencias según este autor requiere del enfrentamiento del sujeto a diferentes tipos de situaciones en función de las cuales el estudiante construirá esquemas para el tratamiento de las situaciones o, si ya cuenta con algunos en su repertorio, elegir los más pertinentes. Los conocimientos contenidos en los esquemas los denomina invariantes operatorios (teoremas y conceptos en acto) que son la base implícita de los conceptos. El concepto, en realidad, es una tripleta de tres conjuntos: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, el conjunto de invariantes (saber) sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas (el saber hacer) y el conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades las situaciones y los procedimientos de tratamiento. (1990, p. 139)

A partir de este marco referencial y de una investigación realizada donde se aplicó una versión de este problema (Vaca, et al, 21010) es que se generaron ls siguientes supuestos:

- La presencia de una información innecesaria en el texto del problema repercute en los resultados obtenidos.
- Es posible que los estudiantes establezcan con mayor facilidad la relación entre las magnitudes usadas en el problema 20 y 40 que entre 35 y 70.
- Los estudiantes identifican las relaciones implicadas en el problema pero no cuentan con las herramientas matemáticas necesarias para operar adecuadamente y llegar a un resultado convencional.
- El algoritmo de la división es una herramienta que algunos estudiantes no dominan cabalmente.
- Por lo anterior el uso de la calculadora favorece que más estudiantes resuelvan correctamente el problema.

Para comprobar lo anterior se diseñaron cuatros versiones del problema arriba mencionado, que mantienen su estructura relacional pero que varían ya sea en las magnitudes de las medidas o en la presencia o ausencia de información innecesaria. Las cuatro versiones se describen en el siguiente apartado.

Metodología

Instrumentos

Se trata de cuatro versiones de un problema, cada versión presenta alguna modificación que nos permite observar aspectos muy específicos y consideramos que cada versión tiene diferente nivel de dificultad: por los valores numéricos usados, por la presencia en dos versiones de información innecesaria o inútil que llamamos un “distractor”, aunque la estructura del problema es la misma.

Versiones del problema

Versión A. Con distractor (en un minuto) y con la relación 35/70.
En un minuto, Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Versión B. Sin distractor y con la relación 35/70.
Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Versión C. Con distractor (en un minuto) y con la relación 20/40.
En un minuto, Héctor camina 20 metros y da 40 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Versión D. Sin distractor y con la relación 20/40. (S/D, 20/40)
Héctor camina 20 metros y da 40 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Referente empírico

El número de estudiantes que enfrentaron estas versiones del problema son 329, 161 son mujeres y 168 son hombres. Estos estudiantes pertenecen al último grado escolar tanto de primaria como de secundaria de cinco escuelas públicas del estado de Veracruz, tres de primaria (una rural y dos urbanas) y dos de secundaria (una de contexto rural y la otra de contexto urbano). Las edades son entre 10 y 16 años.

Aplicación del instrumento

La aplicación de los instrumentos se realizó en sus salones de clase en un momento otorgado amablemente por los profesores. En total se trabajó con 13 grupos de las cinco escuelas, a la mitad de los grupos se les distribuyó una calculadora que tenían a su disposición para que libremente pudieran emplearla si así lo decidían. La otra mitad de los grupos no tuvieron acceso a la calculadora. Se asume que debido al contexto y situación de aplicación los estudiantes asumen un contrato didáctico e los términos de Brousseau (1997) que puede determinar varias de las respuestas producidas.

Resultados

Del total de 329 estudiantes, 113 (34%) dieron la respuesta que se considera correcta para los fines de la investigación, es decir, que indican la medida de un paso por medio de la magnitud y las unidades de referencia (medio metro o sus equivalentes).

Más hombres (49%) que llegan a la respuesta correcta que mujeres (41%) y la diferencia es significativa. Por nivel educativo los resultados, indican que los estudiantes de secundaria obtienen mejores resultados que los de primaria. En primaria la mayoría tuvo un resultado incorrecto (79%). En cambio, en la secundaria los porcentajes se emparejan; casi la mitad lo resolvió correctamente (49%). Los resultados obtenidos en las localidades rural y urbana son prácticamente los mismos no hay diferencias significativas (Prueba Chi^2 =.011 sig. = .917).

Las pruebas estadísticas también indican que sí hay diferencias significativas en los resultados obtenidos por estudiantes que enfrentaron las versiones con distractor y las los que no (con .008 de sig.) y esto sugiere que los estudiantes pueden enfrentar una situación problemática aplicando esquemas de resolución guiados por el teorema-en-acto "todos los datos que aparecen en el texto de un problema se deben usar en la resolución". En cambio, las modificaciones de los valores numéricos no provocaron diferencias significativas en los resultados (Chi^2= .029 con sig.=.865). Tampoco el uso de la calculadora propició diferencias significativas en los resultados (Chi^2 =1.684 sig. 194).

Descripción de las dificultades

Consideramos que llegar a una respuesta correcta, para estos problemas específicamente, está relacionado con muchos aspectos, sin embargo enunciamos a continuación los que a partir del análisis de las respuestas podemos mencionar como los más importantes.

a) Se requiere interpretar adecuadamente el enunciado del problema (lectura del problema). Comprender que lo que se pide es el promedio de cada paso de Héctor, puesto que puede haber pasos de diferentes tamaños cuando se camina y recorrer la misma distancia con el mismo número de pasos.

b) Contar con esquemas que a través de los invariantes operatorios identifique el problema como de isomorfismo de medidas, a partir de ello generar un procedimiento de resolución y controlar el desempeño.
c) Identificar, (en caso de que lo haya) que el dato del tiempo es irrelevante y no lo toma en cuenta en sus cálculos.
d) Establecer las relaciones pertinentes entre los datos, a través del cálculo relacional que a su vez permitirá a los estudiantes elegir una operación, generalmente una división, que puede estar operando bajo el reconocimiento de la propiedad de la función lineal en las relaciones de los datos del problema (por supuesto que al nivel de invariantes operatorios: teoremas y conceptos en acto):

$$f(nx1)=n\,f(1) \rightarrow f(1)= f(nx1)/n$$

Que en castellano significaría (retomando el análisis que Vergnaud 2001 hace de esta propiedad) “el tamaño de 70 veces un paso (35 metros) es igual a 70 veces el tamaño de un paso, por lo tanto, el tamaño de un paso es igual al tamaño de 70 veces un paso (35 metros) entre 70 veces. De ahí la división de 35/70.

e) Por lo tanto, una manera de resolverlo es a partir de los operadores escalares. Realizar los cálculos con el operador función es un procedimiento también correcto, que hasta ahora no se ha encontrado en los estudiantes que han resuelto este problema puesto que resulta de mayor complejidad como lo reporta Vergnaud (2004).
f) Hacer correctamente los cálculos numéricos a través del cálculo mental, por medio de alguna operación (con apoyo o no de la calculadora), en este caso la división es la operación más frecuentemente utilizada y con diferentes niveles de domino
g) Determinar la unidad de referencia adecuada para el resultado numérico.

Quienes llegan a una respuesta correcta (N= 113, 34.4%) realizaron algunos o varios de los puntos anteriores de la manera adecuada, por lo tanto quienes no lograron una respuesta correcta presentaron dificultades en uno o varios de ellos.

Las respuestas consideradas incorrectas se clasificaron de acuerdo al tipo de dificultad identificada. Por ejemplo en las que la asignación de unidades de referencia (punto g), impidió que el resultado sea considerado correcto. Ya sea que asignen alguna unidad incorrecta (N23, 6.9%) o que no agreguen unidades (N 24, 7.29%). Con relación a las primeras, se identifica un problema en la claridad conceptual de dos nociones: los números decimales y el sistema métrico decimal, que combinados producen respuestas como “5 cm”, “.5 cm” o “5 mm”.

Inferimos que, como seguramente los estudiantes identifican las unidades “metros y pasos”, algunos consideraran que la respuesta no pueden ser pasos, porque de eso se trata la incógnita, entonces sólo quedan metros. Pero por la experiencia que han tenido con los números decimales saben que representan una fracción de la unidad entonces posiblemente consideran que se trata de una contradicción escribir “.5 metros”. Algunos estudiantes expresan que los metros son enteros, como cantidades discretas (posiblemente se representan un metro como las reglas de madera que usan los maestros en el pizarrón que miden un metro y que así se les llama; “metro”) y por lo tanto no puede estar acompañado de un número decimal, entonces deducen que deben ser centímetros y eso explica las respuestas .5 cm o 5 cm.

Aceptar que sí es posible escribir .5 metros requiere conceptualizar el metro como cantidad continua y las características y lógica tanto del sistema métrico decimal, como del sistema de numeración.

Otro conjunto de respuestas está relacionado con los operadores de la división y con las unidades de referencia.

Aquí se agrupan los resultados de los estudiantes, en lugar de dividir 35/70 optan por la división 70/35 (N=87, 26.35%); inferimos que la dificultad principal estuvo en no tener claro qué corresponde dividir entre qué. Pueden operar bajo el teorema-en-acto “en la división el número mayor toma el rol de dividendo y el número menor el de divisor”. También se puede inferir que no hay dominio cabal del algoritmo y el significado de cada uno de sus elementos que les ayude a determinar cómo colocar los datos dentro de la división de acuerdo con las relaciones entre los datos.

De los anteriores, la mayoría asigna alguna unidad (N=64, 19.45%) y el resto no lo hace (N= 23, 6.9%).

Estos resultados son similares a los que obtenidos por el estudio de Fischbein, et. al. (1985) en donde muestran que efectivamente los estudiantes operan bajo el modelo tácito de las características de los números en la operación para decir su rol en la operación y por lo tanto explica este grupo de respuestas que en total forman un poco más de una cuarta parte de las respuestas.

Quien acepta un resultado de 2 metros como correcto, generalmente tampoco evalúa la viabilidad de dar pasos de dos metros en el mundo real y por lo tanto no le causa ningún problema.

Finalmente está el conjunto de respuestas que nos hacen inferir que los alumnos no comprendieron la relación entre las cantidades expresadas en el enunciado del problema (N=82, 25%). No pudieron establecer esa relación proporcional y por lo tanto sus procedimientos de resolución se orientan a realizar alguna o varias operaciones con los datos del problema, agregando o no unidades de medida, o deciden realizar alguna aproximación intuitiva del tamaño de los pasos. Es necesario destacar que una cuarta parte de los estudiantes son los que podríamos decir que no comprendieron el problema o que en esa situación específica no contaban con los esquemas necesarios para enfrentarlo adecuadamente. De ese 25 % más de la mitad son estudiantes de primaria (65.8%).

Los estudiantes que dieron su respuesta clasificada en esta categoría posiblemente no han enfrentado situaciones problemáticas diversas que les ayuden a construir las nociones involucradas en el problema y por lo tanto los procedimientos de resolución.

Conclusiones

Con estos datos se puede inferir que, para este problema en particular, representarse las relaciones entre los datos a fin de descartar los que no sean pertinentes para el cálculo es una actividad de mayor complejidad que el cálculo propiamente en función de las magnitudes empleadas. Sin embargo, también se sabe que las magnitudes pueden cambiar las condiciones del problema, si se emplean cantidades muy grandes o muy pequeñas, decimales o enteros y también en función del domino de la experiencia como lo reporta Vergnaud (1994).

Prácticamente un 40% de los estudiantes que lograron encontrar las relaciones entre los datos y proponer la operación adecuada no lograron contestar correctamente porque tuvieron dificultades con la asignación de las unidades de referencia o con la división (o con ambas).

A partir de los resultados analizados, las dificultades experimentadas se deben principalmente a la superficialidad con que han construido los diferentes conceptos implicados en dicho problema, por ejemplo el sistema métrico decimal, el sistema de numeración decimal y la representación escrita y resolución de los algoritmos, en específico la división. En el caso de los estudiantes que no asignan unidades o que no evalúan la factibilidad real de su resultado, puede estar mediando una concepción de las matemáticas como sólo aproximaciones, dejando de lado la rigurosidad y precisión.

Es importante preguntarse sobre el origen de esta fragilidad en la consolidación de tales conceptos. Consideramos que una posible respuesta es un prejuicio generalizado a la enseñanza de los algoritmos, producto de los cambios en la didáctica de las matemáticas a través de los años y las reformas educativas. Sin embargo con este trabajo vemos que efectivamente el no dominar la herramienta aritmética provoca que casi la mitad de los estudiantes, a pesar de comprender el problema y saber cómo resolverlo, no logren una respuesta correcta.

Sugerimos volver a poner la atención en la construcción de procedimientos sólidos para operar aritméticamente, sin caer nuevamente en el problema superado de la mendicidad descontextualizada en la enseñanza de los algoritmos de la aritmética elemental.

Referencias

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathemathics*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati, M. y Sciolis, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2013). "Reactivos Liberados PISA 2003." Recuperado 2013/04/24, de http://www.inee.edu.mx/index.php/servicios/pisa/reactivos-liberados-pisa-2003

Secretaría de Eucación Pública (2011). *Acuerdo número 592 por el que se establece la Articulación de la Educación Básica*. México, SEP

Secretaría de Educación Pública (2012). *Hacia PISA 2009*. Recuperado 29/01/13, 2013, de http://www.pisa.sep.gob.mx/pisa_en_mexico.html.

Vaca, J., Bustamante, A., Gutiérrez, F. y Tiburcio, C. (2010). *Los lectores y sus contextos*. Xalapa: Biblioteca Digital de Investigación Educativa del instituto de Investigaciones en Educación, Universidad Veracruzana.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en didactique des Mathématiques*. 10(2), 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why?. En *The Development in Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. Albany: State University of New York Press. pp. 41-61.

Vergnaud, G. (2001). Problemas aditivos y multiplicativos. Fernández, E. (Coord.); Chamorro, M. (dir.); Belmonte, J. (aut.) *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp. 189-228). España, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Vergnaud, G. (2004). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52(2), 83-94.