

MEJORAS EN EL APRENDIZAJE DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES UNIVARIADAS MEDIANTE EL USO DE SOFTWARE ESPECIALIZADO.

SILVIA KARINA LÓPEZ VALDEZ/ LORENZA ILLANES DÍAZ/ ÁNGELES DOMÍNGUEZ CUENCA
Universidad Nacional Autónoma de México, Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey

RESUMEN: La enseñanza de la matemática ha sido difícil e influenciada por las diferentes épocas que ha vivido la humanidad (Tirado, 1992). Los objetivos de la presente investigación fueron comprobar si el uso del *applet* de la Balanza, del proyecto Gauss, ofrece ventajas de aprendizaje algorítmico que dé solución a ecuaciones lineales univariadas (ELU); así como ofrecer información relevante relacionada con el *applet* de la Balanza que permita al docente tener elementos para replantear o reafirmar sus instrumentos de enseñanza-aprendizaje. La investigación se realizó en una institución educativa de nivel preparatoria con un grupo experimental (GE) y uno de control (GC), la selección del GE y GC fue por sorteo, la diferencia relevante entre los grupos fue el uso de una balanza virtual y el uso de papel y lápiz para resolver ELU. Usando una metodología mixta, se retomó información cualitativa de

las respuestas a un cuestionario medido con escala Likert y un diario de campo. Los datos cuantitativos se obtuvieron a partir de la aplicación de un pre y post-test. Los estudiantes que usaron el *applet* de la Balanza, lograron mejores aprendizajes que sus contrapartes, resultando conveniente que en las escuelas que cuentan con salas de cómputo e internet, hagan uso del *applet* de la Balanza para abordar la solución de ELU.

Palabras clave: aprendizaje, matemáticas, algoritmo, álgebra y software educativo.

Introducción

En los procesos de razonamiento, generalización y discernimiento matemático, se necesita que el estudiante ejecute algoritmos de forma eficaz, requiriendo de práctica repetitiva que conlleve a la rapidez y precisión de los mismos (Flores, 2005). Cabe señalar que su ejercicio aislado y repetitivo no favorece su uso en diversos contextos (Tirado, 1992).

Con el avance de las nuevas tecnologías educativas, se pueden desarrollar aprendizajes algorítmicos haciendo uso de software educativo. En relación con los procesos de aprendizaje, las Tecnología de Información y Comunicaciones (TICs) hacen más sencilla la comprensión de conceptos claves en matemáticas, permitiendo compenetrarse con la lógica de esta disciplina mediante formas que permiten una asimilación más profunda e inmediata (Hopenhay, 2002).

Por lo anterior, es necesario conocer el impacto de las TICs en los aprendizajes de algoritmos matemáticos del nivel preparatoria bachillerato y considerar redirigir las estrategias didácticas con el uso de software (Bautista, Martínez y Sainza, 2001) que promuevan un aprendizaje eficaz en el área (Díaz-Barriga y Hernández, 2002).

El objetivo primordial de esta investigación fue comprobar si es posible lograr mejoras en el aprendizaje de algoritmos para la solución de ELU usando imágenes de una balanza, por medio del uso del software matemático. La hipótesis planteada es que existen mejoras en el aprendizaje en la solución de ELU, con imágenes de una balanza mediante el uso de software especializado.

La investigación se llevó a cabo en una situación didáctica que retoma elementos cognitivistas y constructivistas para abordar el aprendizaje de algoritmos que permitan la solución de ELU con el uso de software especializado, *applet* de la Balanza. Para establecer el logro de aprendizajes se utilizó una metodología mixta de investigación.

Para presentar los resultados de la investigación, a continuación se presenta el marco teórico en el que se menciona la perspectiva bajo la cual se lleva a cabo la investigación, así como el método de recolección de datos y su análisis, los resultados obtenidos, la discusión en donde se da respuesta a la pregunta de investigación y, por último, las conclusiones y recomendaciones planteadas a partir de los hallazgos de la presente investigación.

Contenido

I. Marco Teórico

La principal demanda a la educación del siglo XXI es que esté dirigida a promover capacidades y competencias, no sólo conocimientos cerrados o técnicas programadas (Pozo y Monereo, 1999). Los requerimientos educativos se centran en educar a la gente, entre otras cosas, para resolver problemas complejos de ciencias y matemáticas. (Bransford, Cocking, Donovan y Pellegrino, 1999).

Las ecuaciones lineales univariadas (ELU) se estudian dentro del álgebra, en donde los números se expresan con letras. Los signos utilizados son de operación, relación y agrupación (Baldor, 2010). Una ecuación algebraica establece la igualdad entre dos expresiones algebraicas, nombradas miembros, que a su vez pueden conformarse por términos. La solución es el número que hace verdadera la ecuación (Baldor, 2007). Resolver una ELU es un proceso con el que se encuentra la cantidad desconocida representada con una literal (Kaufmann y Schwitters, 2003).

En la escuela, el dominio de las técnicas de solución de expresiones algebraicas, por parte del alumno, puede perderse si no encuentran un significado de aquello que trabaja (Papini, 2003). De ahí la importancia de que el alumno otorgue significado a las operaciones algebraicas que hace en su búsqueda de solucionar una ELU. Las etapas que sugiere Polya (1965) para dar solución a un problema, se llevan a cabo al hacer uso de la balanza virtual que forma parte del proyecto Gauss (Gauss, 2010). Este proyecto es de acceso libre y está dirigido por el Ministerio de Educación del Gobierno de España. El objetivo principal del proyecto Gauss (2010) es ofrecer a profesores y alumnos una nueva forma de enfocar el aprendizaje, promoviendo metodologías de trabajo en el aula más activas, participativas, motivadoras y personalizadas, con el fin de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El desarrollo de la investigación se llevó a cabo poniendo en práctica las actividades balanza con enteros del proyecto Gauss, enfocada a la solución de ELU.

Con base en lo anteriormente expuesto, en el siguiente apartado, se establece la metodología con la que se llevó a cabo la investigación.

II. Método

La investigación se aborda con una metodología mixta, con observaciones cualitativas que retoman información de las respuestas a un cuestionario con el que se recolectó información acerca de aspectos actitudinales que reflejaron si el ambiente de trabajo durante las sesiones fue cómodo y agradable para los estudiantes, por ende, propicio para su aprendizaje. El cuestionario, medido con escala Likert, fue contestado por cada integrante del GE y GC en cada una de las sesiones de trabajo. También se recolectó información cualitativa por medio de un diario de campo en el que se registró cuál fue el desenvolvimiento y comportamiento del GE y GC, en cada una de las sesiones de trabajo durante toda la experimentación. Para la parte cuantitativa se llevó a cabo una prueba pre-test y una post-test. Con la prueba pre-test se obtuvo información acerca de los conocimientos que tenían los estudiantes del GE y GC acerca de la solución de ELU, antes de iniciar la fase experimental. La prueba post-test se lleva a cabo después de haber abordado la temática de solución de ELU durante cuatro sesiones, arrojando información acerca de los aprendizajes logrados por los integrantes de cada grupo. Con el resultado del pre-test y post-test se hizo un comparativo de los aprendizajes logrados en la solución de ELU, por cada uno de los integrantes de cada grupo, y cuyas respuestas fueron analizadas estadísticamente.

Los integrantes de cada uno de los grupos, GE y GC, fueron veinte adolescentes de entre 15 y 17 años, pertenecientes al turno matutino de la institución educativa en donde se llevó a cabo la investigación. La selección del GE y GC fue aleatoria, la única diferencia relevante entre el GE y GC fue el uso imágenes de una balanza virtual y el uso de papel y lápiz para resolver ELU. Los integrantes del GE y del GC trabajaron en diadas que se conformaron de forma aleatoria.

Los integrantes de los grupos trabajaron previamente, durante un semestre, de forma colaborativa, en donde el rol del profesor fue el de observar, orientar y dirigir las actividades dentro del grupo y el rol de los alumnos fue el de trabajar colaborativa y autorreguladamente la construcción de sus aprendizajes. Durante la investigación el rol del profesor y de los alumnos del GE y GC permaneció igual.

El GE y el GC recibieron, previo al inicio de la fase experimental, una sesión expositiva introductoria al principio de equidad para dar solución a ELU, en la que se presentó un registro gráfico de una balanza y un registro algorítmico congruente al registro gráfico con el que se dio solución a ELU.

Las diadas del GE y GC, en las primeras dos sesiones, dieron solución a quince ecuaciones con números naturales, en la tercera y cuarta sesión trabajaron veinte ecuaciones con números enteros. En cada sesión hicieron registros gráficos de las ELU a las que darían solución, así como de cada ecuación equivalente que se obtiene al hacer uso del principio de equidad.

En cada una de las sesiones de trabajo el GC solamente usó papel y lápiz para mover elementos de un lado a otro de la balanza hasta lograr despejar la incógnita y poder dar solución a la ELU inicial. Por el contrario, el GE hizo uso de software especializado para mover elementos de un lado a otro de la balanza hasta lograr despejar la incógnita y poder dar solución a la ecuación inicial. Al finalizar cada sesión de trabajo los integrantes de ambos grupos contestaron un cuestionario autoadministrado, en donde cada alumno tomó un cuestionario para responderlo y con el que se rescató información de aspecto actitudinal del desarrollo de las sesiones. También al final entregaron el registro gráfico y algebraico de los algoritmos que cada uno fue desarrollando para llegar a la solución de la ELU inicialmente planteada.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la metodología de investigación que se siguió para probar la hipótesis de esta investigación, la cual fue: Si existían mejoras en el aprendizaje de los algoritmos para dar solución a ELU mediante el uso de software especializado.

III. Resultados

La prueba de la hipótesis se hizo comparando los resultados de una prueba pre y post-test, aplicados al GE y GC. Cada integrante de los grupos contestó el cuestionario autoadministrado, que es una forma de obtener información puntual, medido con escala Likert con el que se recabó información de aspectos actitudinales con los que los alumnos abordan el aprendizaje de ELU usando imágenes de una balanza, ya sea virtual o no.

El promedio del pre-test del GE fue de 13.9 aciertos, 66.19%, y del GC fue de 14.12, 67.24%, de 21 reactivos. En el post-test el promedio de aciertos del GE fue de 16.62 aciertos, 79.4%, y del GC fue de 16.15 aciertos, 76.9%, de 21 reactivos. En la gráfica de la figura 1, se observa el contraste de las medias de aciertos en el pre y post-test del GC. La gráfica de la figura 2, muestra el contraste de varianzas de los aciertos obtenidos en el pre y post-test del GC. Los alumnos 6, 12, 13 y 15 presentan mayor varianza en la prueba post-test, el alumno 18 no presenta movimiento en las varianzas y el resto de los alumnos presentan mayor varianza en la prueba pre-test.

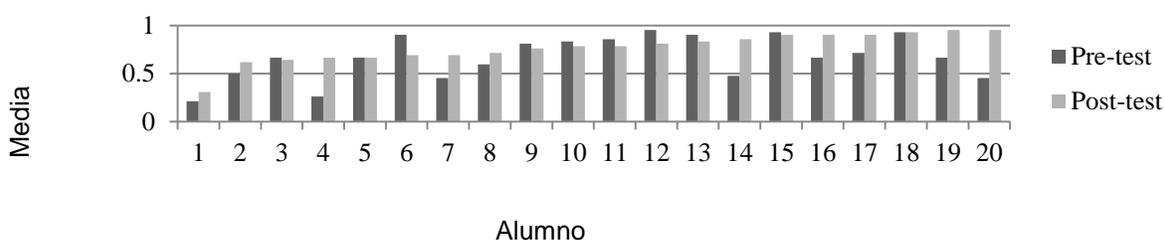


Figura 1. Medias que presentaron los alumnos del grupo control en el pre-test y post-test.

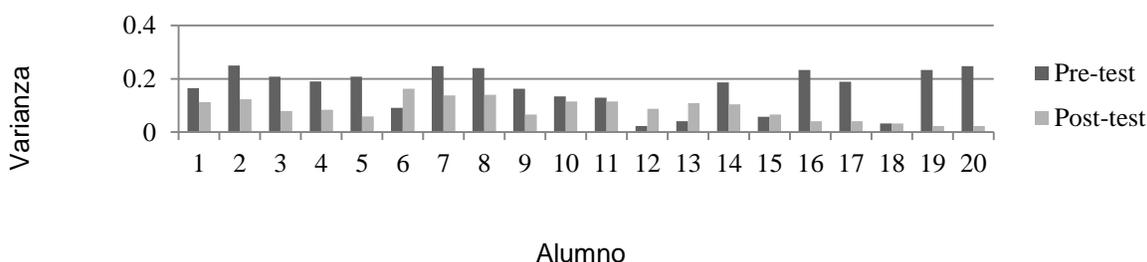


Figura 2. Varianza que presentaron los alumnos del grupo control en el pre y post-test.

La gráfica de la figura 3, muestra el contraste de las medias de aciertos obtenidos en los exámenes pre y post-test del GE. Los alumnos 1, 4, 6, y 20, presentan un decremento en la media de aciertos obtenidos en el post-test. El alumno 19 no presenta movimiento en las medias y el resto de los alumnos aumentaron la media de aciertos del post-test. En la gráfica de la figura 4, se observa el contraste de varianzas de los aciertos obtenidos por los alumnos del GE en el pre y post-test. Los alumnos 1, 3 y 20 presentan mayor varianza en el post-test. El alumno 19 no presenta movimiento en las varianzas y el resto de los alumnos presentan mayor varianza en el pre-test.

Las pruebas de hipótesis de la diferencia de medias del pre-test del GE y GC, arrojaron hipótesis alternativa para los reactivos **b** y **j**, indicando que al utilizar el software en la solución de ELU el GC aprendió a despejar ecuaciones de la forma $ax + b = c$, en donde **a** y **b** son números enteros negativos y **c** es un número entero positivo; así como que aprendieron a despejar ecuaciones de la forma $a(x + b) = c(x + d)$, en donde **a**, **b**, y **c** son números enteros positivos.

La prueba de hipótesis de la diferencia de medias del pre-test del GC, arrojó hipótesis alternativa para el reactivo **b**, **r**, **s** y **t**. Significa que al utilizar el software especializado en la solución de ELU los alumnos del GC aprendieron a despejar ecuaciones de la forma $ax + b = c$, en donde **a** y **b** son números enteros negativos y **c** es un número entero positivo; así como ecuaciones de la forma $ax = c$, en donde **a** y **c**, son números racionales positivos o de signo opuesto.

El resultado que arrojó la prueba de hipótesis de la diferencia de medias del pre y post-test del GE fue que se presenta hipótesis alternativa para los reactivos **j**, **q** y **s**, indicando que hubo consolidación del aprendizaje haciendo uso de software especializado en la solución de ELU. Los cuales, respectivamente, son de la forma $a(x + b) = c(x + d)$, en donde **a**, **b**, **c** y **d** son números enteros positivos; del tipo $\frac{ax}{b} + c = \frac{dx}{e}$, en donde **a**, **b**, **c**, **d** y **e** son números enteros positivos y de la forma $ax = c$, en donde **a** es racional positivo, y **c** es un número racional negativo.

La prueba de hipótesis de la diferencia de medias del post-test del GE y GC, presenta hipótesis alternativa para el reactivo **b**, ELU de la forma $ax + b = c$ en donde **a** y **b** son enteros negativos y **c** es entero positivo. En el análisis de medias se dieron más aprendizajes en el GC comparado con GE; sin embargo, en el análisis de varianza se observó que hay mucho más movimiento hacia el aprendizaje en el GE que en el GC.

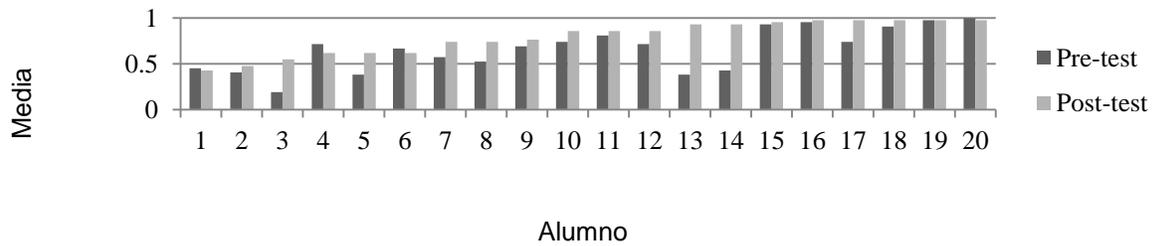


Figura 3. Medias de alumnos del grupo experimental en el pre y post-test.

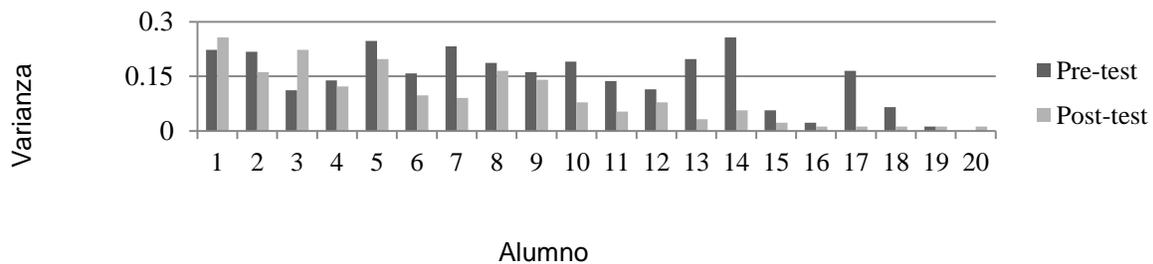


Figura 4. Varianza de alumnos en el pre y post-test del grupo experimental.

Los resultados del cuestionario arrojaron que en las sesiones 1 y 2 ambos grupos se sintieron confiados en dar solución a las ELU con las que trabajaron, que podrían dar solución al total de ecuaciones destinadas para la sesión, que resolver ecuaciones haciendo operaciones usando el principio de equidad es fácil y que las sesiones les resultaron agradables. Se asume que lo anterior se debe a que las ELU que resolvieron los alumnos durante las dos primeras sesiones solamente fueron quince y a que las cantidades que conformaron las ecuaciones y a su solución fueron números naturales.

En las sesiones 3 y 4, en ambos grupos, se sintieron confiados en dar solución a las veinte ELU destinadas a dichas sesiones. Los alumnos de ambos grupos se inclinaron hacia estar completamente de acuerdo y de acuerdo en podrían dar solución al total de ecuaciones conforme iban avanzando en su solución. Ambos grupos consideraron agradable trabajar durante las sesiones y una minoría del GC consideró que no fue agradable. También consideraron, en ambos grupos, que fue fácil resolver ELU haciendo operaciones inversas en ambos lados de la ecuación, pero una minoría del GC no lo consideró fácil. Respecto al tiempo destinado para dar solución a las veinte ELU destinadas para la sesión, la mayoría del GE y GC se manifiesta de acuerdo en que el tiempo fue

suficiente y una minoría, de ambos grupos, consideró insuficiente el tiempo destinado para dar solución al total de ELU.

Por las observaciones anotadas en el diario de campo, se considera que dar solución a ELU con enteros negativos resulta conflictivo porque los algoritmos se tienen que hacer sin “pasar” términos o factores de un lado al otro de la igualdad. En el siguiente apartado se presenta la respuesta a la pregunta de investigación y los objetivos alcanzados con la investigación.

IV. Discusión

Con el uso de software especializado proyecto Gauss, para el aprendizaje de algoritmos que dan solución a ELU, el alumno obtiene retroalimentación en tiempo real acerca de si los algoritmos que utiliza para dar solución a las ELU son correctos o no, aunado a que es en un ambiente virtual agradable para el estudiante.

Comparando el pre y post-test del GE hubo diferencia de medias en los reactivos **j**, **q** y **s** y cambio en la varianza de **b**, **c**, **f**, **h**, **j**, **k** y **s**. Se observó mejoras en el aprendizaje de ELU pero solo hubo consolidación en los reactivos **j**, **q** y **s**. La hipótesis se cumple para los reactivos **b**, **c**, **f**, **h**, **j**, **k**, **q** y **s**, pero no así en **a**, **d**, **e**, **g**, **i**, **l**, **m**, **n**, **o**, **p**, **r**, **t** y **u**.

El primer objetivo de la presente investigación, comprobar si el uso de software especializado ofrece ventajas en el aprendizaje de ELU, se cumplió parcialmente arrojando los resultados señalados anteriormente. De igual forma para el segundo objetivo, ofrecer al docente información relevante que le permita considerar el uso del software especializado para la enseñanza de solución de ELU, particularmente para aquellas de la forma antes mencionadas en las que sí se cumplió la prueba de hipótesis. A continuación se presentan las conclusiones de la investigación, implicaciones y alcances, así como las recomendaciones para futuras investigaciones.

Conclusiones

Considerando los resultados obtenidos, se puede concluir que la hipótesis planteada para la presente investigación, existen mejoras en el aprendizaje al usar imágenes de una balanza para resolver ELU, mediante el uso de software especializado, en los estudiantes de nivel medio superior, se acepta para ecuaciones de la forma:

• $ax + b = c$, en donde a y b son números enteros negativos y c es entero positivo.

• $ax + b = c$, a y c son números enteros negativos y b es entero positivo.

• $ax + bx + c = d$; a , b y d son números enteros negativos y c es entero positivo.

• $a(x + b) = c(x + d)$, en donde a , b , c y d son números enteros positivos.

• $a(x + b) = c(x + d)$, a y c son racionales negativos, b entero positivo y d entero negativo.

• $\frac{ax}{b} + c = \frac{dx}{e}$, en donde a , b , c , d y e son números enteros positivos.

• $ax = b$, en donde a es un número racional positivo, y b es racional negativo.

Para futuras investigaciones se deja la posibilidad investigar los aprendizajes de solución de ELU cuando el estudiante recién se enfrenta a este tipo de aprendizaje, abordando la solución de ELU como el proceso algorítmico con el que se obtienen ecuaciones equivalentes que permiten llegar a la ecuación solución. También queda la posibilidad de abordar la investigación ampliando el tiempo de las sesiones de trabajo.

Se concluye que los estudiantes que usaron el software especializado proyecto Gauss, lograron mejores aprendizajes de los algoritmos necesarios para dar solución a ELU que los que no hicieron uso de él, por tanto es conveniente que en las escuelas que cuentan con salas de cómputo e internet, hagan uso del software antes mencionado.

Referencias

Baldor, A. (2007). *Álgebra*. (2a. ed.). México: Patria.

Bautista, J. R., Martínez, R. y Sainza, M. (2001). La evaluación de materiales didácticos para la educación a distancia. *Revista Iberoamericana de educación a distancia*, 4. Recuperado de http://www.utpl.edu.ec/ried/index.php?option=com_content&task=view&id=106&Itemid=53

Bransford, J., Brown, A., Cocking, R., Donovan, S. y Pellegrino, W.

(1999). *How People Learn Brain, Mind, Experience, and School*. Washintong, D. C.: Commission on Behavioral and Social Sciences and Education, National Research Council y National Academy Press.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: Mc Graw Hill.

- Kaufmann, J. E. y Schwitters, K. (2003). *Álgebra Intermedia*. (6a. ed.). México: Thomson.
- Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa*, 6(1), 41-71. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Pozo, J.I. y Monereo, C. (1999). *El aprendizaje estratégico*. Madrid: Aula XXI Santillana.
- Proyecto Gauss. (2010). Recuperado de: <http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>
- Tirado, F. (1992). *La enseñanza de las matemáticas básicas, la historia como estructura curricular*. Ponencia presentada en el III Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas, UNAM, Distrito Federal, México.