

CONEXIÓN CONCEPTUAL DE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL POR ESTUDIANTES DE UN CURSO PROPEDÉUTICO DE FÍSICA PARA LA INTERPRETACIÓN DE PROBLEMAS CON GRÁFICA

SANTA TEJEDA TORRES/ÁNGELES DOMÍNGUEZ
CUENCA
Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey

RESUMEN: Este trabajo estudia el discurso de estudiantes de un curso propedéutico de física, con el objeto de identificar cómo conectan conceptos de cálculo para la interpretación de gráficas de cálculo y gráficas de cinemática. Realizamos entrevistas por pares de estudiantes, donde planteamos cuatro problemas isomórficos a los participantes, dos problemas de cálculo y dos problemas de cinemática, de los cuales dos eran sobre el concepto de derivada y dos sobre la integral. Examinamos las respuestas de los estudiantes mediante

análisis del discurso recolectado por pares, con base en la teoría de imagen-concepto y definición-concepto de Tall y Vinner (1981). Mediante este análisis encontramos evidencia de falta de coherencia conceptual en el uso de la derivada y la integral en problemas de cálculo y de cinemática. Presentamos estos hallazgos con la intención de acercarnos a la conexión conceptual de los estudiantes de cálculo de primer año al responder problemas de esta naturaleza.

PALABRAS CLAVE: Enseñanza de las ciencias, lenguaje científico, razonamiento matemático, investigación educativa, educación superior.

Introducción

Un recurso didáctico de los profesores de ciencias e ingeniería son las gráficas, utilizadas con frecuencia en la enseñanza de matemáticas, física, química y biología (Britton, New, Sharma, y Yardley, 2005; García-García y Perales-Palacios, 2006; García-García y Perales-Palacios, 2007; García-García, 2005; Habre y Abboud, 2006; Planinic, Milin-sipus, Katic, Susac y Ivanjek, 2012). Algunos investigadores de educación en física han reportado dificultades de los estudiantes en la interpretación de gráficas de cinemática (Beichner, 1994; McDermott, Rosenquist y vanZee, 1987; Testa, Monroy y Sassi, 2002). Igualmente, varios investigadores de educación de las matemáticas han reportado dificultades en la interpretación de gráficas de cálculo (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Pérez-Goytia, Domínguez y Zavala, 2010; Ubuz, 2007). Los conceptos de

indagación de estos trabajos han sido la derivada y la integral, en el contexto del cálculo y de la velocidad y aceleración, en el contexto de la cinemática.

En este trabajo se examina la interpretación de gráficas de la derivada y la integral en la resolución de dos problemas isomórficos de velocidad y aceleración mediante la teoría de imagen-concepto y definición-concepto de Tall y Vinner (1981). Se discute el contenido de las respuestas de las estudiantes y se mencionan hallazgos a la luz de los elementos conceptuales evidenciados en una argumentación matemática.

Marco teórico

La conexión de conceptos de cálculo a gráficas de cinemática es un problema de estudio que McDermott et al. (1987) estudiaron mediante entrevistas a estudiantes y que reportaron como una dificultad para la interpretación de gráficas de cinemática. Beichner (1994) diseñó un examen de opción múltiple y reportó dificultades de uso de la derivada y la integral en gráficas de cinemática y en la lectura de gráficas de fenómenos físicos. Posteriormente, Testa, Monroy y Sassi (2002) indagaron cómo los estudiantes comprenden las características gráficas y textuales de un problema de la vida real. Uno de sus hallazgos fue la falta de relación entre una intersección visible en la gráfica y un fenómeno físico, lo que sugiere una falta de asociación entre la representación matemática y el fenómeno cotidiano. Las conclusiones de Beichner (1994), McDermott, Rosenquist y vanZee (1987) y Testa, Monroy y Sassi (2002) coinciden en la necesidad de examinar la conexión de algunas relaciones entre magnitudes o conceptos.

La conexión de conceptos matemáticos a gráficas de fenómenos físicos y matemáticos implica procesos de mayor abstracción (Leinhardt et al., 1990 y Ubuz, 2007) que el entendimiento de conceptos del mismo contexto. El estudio de la abstracción puede ser abordado mediante una teoría que permite estudiar las imágenes mentales que posee un estudiante y lo que dice de este concepto. La teoría de definición-concepto e imagen-concepto de Tall y Vinner (1981) se aproxima a la estructura cognitiva que un estudiante posee de un concepto, ya que proporciona información sobre una tarea cognitiva y un comportamiento intelectual asociados o no entre sí, así como de los términos contenidos en su procesamiento. Esta teoría se basó en dos postulados: (a) el cerebro no es una entidad puramente lógica y (b) para entender los procesos internos del cerebro es necesario formular una distinción sobre la definición de un concepto y los procesos cognitivos que permiten generar una concepción.

Tall y Vinner (1981) esquematizaron el estudio de la estructura cognitiva de un individuo, mediante la inspección verbal o escrita de la definición-concepto y de la imagen-concepto, los cuales asumen como elementos de un concepto y se explican a continuación. La definición-concepto es el conjunto de palabras asociadas a este concepto o la reconstrucción personal de una definición formal, aceptadas por la comunidad matemática. En tanto, la imagen-concepto consiste en todas las imágenes, propiedades y procesos asociados externados por el individuo. Con esta teoría es factible obtener una aproximación a los procesos mentales asociados a la conexión de conceptos matemáticos en su contexto de aprendizaje –cálculo- y en un contexto distinto- cinemática - , con la finalidad de profundizar en la interpretación de gráficas de los estudiantes en estos contextos.

Este trabajo indaga la interpretación de la derivada y la integral en el contexto de cálculo y de la velocidad y la aceleración en el contexto de cinemática. Las perspectivas de interés en cálculo son: la derivada como razón de cambio y la integral como área bajo la curva o cambio acumulado de una función. Del mismo modo, para cinemática se indagan las perspectivas de velocidad como razón de cambio de la posición, de la aceleración como razón de cambio de la velocidad y del cambio de posición de un objeto como el cambio acumulado en una gráfica de velocidad.

Problema de investigación

La problemática de investigación gira en torno a dos preguntas de investigación: (a) ¿Cuáles son las imágenes-concepto y las definiciones-concepto de los estudiantes de cinemática de primer año en la resolución de problemas de cálculo con gráfica? , (b) ¿Cuáles son la imagen-concepto y la definición-concepto de los estudiantes de cinemática de primer año en la resolución de problemas isomórficos de cinemática con gráfica? y (c) ¿Cómo se relacionan las imágenes-concepto y definición-concepto de dos estudiantes para la interpretación en la resolución de problemas con gráfica? Este trabajo tiene como objetivo exponer elementos de la caracterización sobre la conexión de la derivada y la integral en gráficas de cálculo y de cinemática.

Metodología de investigación

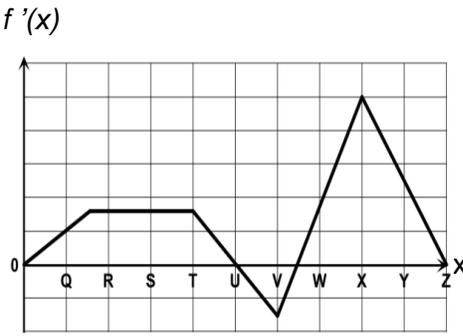
Para conocer las estructuras cognitivas de estudiantes de un curso propedéutico de física, así como la relación de estas estructuras con la resolución de problemas de cálculo, se

analizó el contenido de seis entrevistas, realizados por pares. Se convocó a estudiantes con promedios en el curso menores a 80 y mayores a 60, ya que constituyen una población con necesidad de estudio sobre la interpretación de gráficas de cálculo y de cinemática de acuerdo al estudio de Pérez-Goytia, Domínguez y Zavala (2010). Los estudiantes seleccionados participaron en un ciclo de entrevistas de profundidad, en las que se plantearon cuatro problemas, dos problemas de cálculo y dos problemas de cinemática. Los cuatro problemas contaron con la misma estructura y el mismo requisito de dominio conceptual matemático. Los problemas de esta naturaleza son conocidos como problemas isomórficos (Cui, Rebello, y Bennett, 2005 y Zavala y Barniol, 2012) y permiten explorar diferencias en entendimiento e interpretación de conceptos.

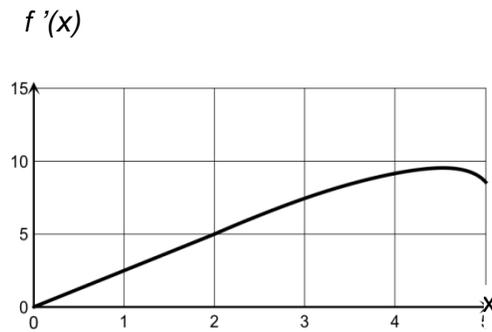
El diseño de los problemas de este estudio se basó en exámenes que evalúan la interpretación de gráficas de cinemática (Beichner, 1994) y la interpretación de gráficas de cálculo y cinemática (Pérez-Goytia, Domínguez y Zavala, 2010). Los problemas planteados en la entrevista a cada par de estudiantes se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Problemas isomórficos de derivada e integral en cálculo y en cinemática

Concepto	Problema gráfico	Problema en cálculo	Problema en cinemática	Distinción en problema gráficos
Derivada		<p>La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de una función. ¿Cuándo es la segunda derivada de la función negativa?</p>	<p>La siguiente figura muestra la gráfica de la velocidad de un objeto. ¿Cuándo es la aceleración del objeto más negativa?</p>	<p><i>Velocidad</i> (m/s) sustituye a $f'(x)$ y <i>tiempo</i> (s) a x</p>

Integral



La gráfica representa la primera derivada de una función durante el intervalo $x=0$ a $x=2$ usando la gráfica, deberías:

La gráfica representa la velocidad de un objeto. Si quisieras conocer el cambio de la posición del objeto durante el intervalo $t = 0$ s y $t = 2$ s usando la gráfica, deberías:

Velocidad (m/s) sustituye a y tiempo (s) sustituye a x.

Los participantes fueron agrupados por parejas. Para la examinación del discurso se elaboró una célula de estructura cognitiva compuesta, a partir del modelo de estructura cognitiva de Vinner (1983), quien propuso este modelo basado en la teoría de imagen-concepto y definición-concepto de Tall y Vinner (1981). En el modelo de Vinner se estudia un concepto mediante el análisis de dos células de formación conceptual, una célula para la definición-concepto y otra célula para imagen-concepto. Vinner (1983) llamó conflicto cognitivo a la contradicción de la definición-concepto de un individuo con su imagen-concepto.

En este estudio se considera que las respuestas de una pareja de estudiantes forman parte de la interacción de ideas y elementos disparadores del discurso, propios de su interpretación de un concepto en un problema. Con una célula de estructura cognitiva doble, diseñada a partir del modelo de Vinner (1983) (ver Figura 1) se clasificaron los elementos conceptuales de los estudiantes sobre cada uno de los cuatro problemas isomórficos con gráfica.

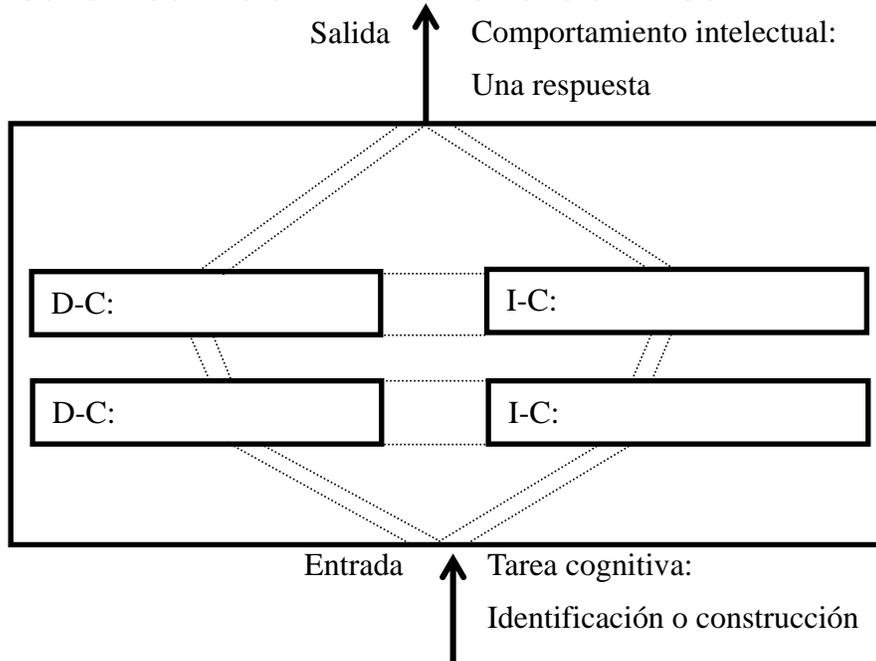


Figura 1. Célula de estructura cognitiva doble.

En la célula de la Figura 1 se esquematizan las imágenes-concepto y definición-concepto de cada participante en la entrevista. Estos elementos se obtienen a partir de las transcripciones de las entrevistas, las cuales se analizaron a detalle. La célula de estructura cognitiva doble muestra líneas punteadas en el exterior y en el interior. Las líneas externas conectan las interacciones discursivas de los estudiantes, mientras que las líneas internas conectan las imágenes-concepto y definiciones-concepto de cada participante. Considerando que estas interacciones pueden disparar ideas en la generación de la interpretación se permite el trazado de flechas entre los elementos principales.

A continuación se presentan los hallazgos de este ciclo de entrevistas, por contexto y por concepto matemático en la Tabla 2 y en la Tabla 3, respectivamente. Se reporta la imagen-concepto y definición-concepto predominantes en el discurso de cada pareja, en consideración a que fueron posibles elementos iniciales o disparadores de las respuestas de los dos estudiantes. Estos elementos fueron observados en estudiantes que manifestaron mayor elaboración matemática en sus respuestas.

Tabla 2
Imágenes-concepto y definiciones-concepto de los estudiantes en dos problemas isomórficos de derivada

Concepto	Pareja	Definición-concepto	Imagen-concepto	Conflicto cognitivo
Derivada en cálculo	Alfa	No	Aceleración decreciente	No
	Beta	No	Movimiento cambiante	No
	Gamma	Cambios en función	Velocidad de cambio	No
	Delta	No	Gráfica de posición	No
	Épsilon	No	Velocidad de función	No
	Omega	No	Derivada más negativa	No
Derivada en cinemática	Alfa	No	Velocidad positiva o negativa	No
	Beta	No	Cambios en velocidad	No
	Gamma	No	Cambios en velocidad y en tiempo	No
	Delta	Pendiente	Cambios en velocidad	No
	Épsilon	Razón de cambio	Aceleración	No
	Omega	No	Cambio en posición	No

El análisis de la recolección de imágenes-concepto y definiciones-concepto de la derivada se basa en los hallazgos de la Tabla 2 y se describe a continuación.

Cálculo – Derivada

De las seis entrevistas analizadas, se encontró que las parejas Gamma, Épsilon u Omega respondieron correctamente, mencionando a la velocidad de cambio, la velocidad o derivada más negativa, respectivamente. También se observó que estas tres parejas mostraron más elaboración e interacciones en sus respuestas que las otras tres parejas. Las interacciones de las respuestas se relacionaron o dirigieron hacia las imágenes-concepto de los estudiantes. Solamente la pareja gamma habló de la definición-concepto de derivada como cambios en la función, mientras que el resto de las parejas no mencionó ninguna definición-concepto.

Cinemática – Derivada

De las seis parejas, todas respondieron correctamente. Delta y Épsilon mostraron elaboración e interacciones en sus respuestas, mencionaron como definición-concepto a la pendiente y la razón de cambio, respectivamente. Debido a que el concepto matemático subyacente en este problema fue la derivada, las definiciones-concepto de Delta y Épsilon se consideraron así por formar parte de la perspectiva de estudio. Las imágenes-conceptos más recurrentes fueron: velocidad positiva o negativa y cambio en velocidad.

También se revisaron las imágenes-concepto y las definiciones-concepto de la integral (ver Tabla 3).

Tabla 3

Imágenes-concepto y definiciones-concepto de los estudiantes en dos problemas isomórficos de integral

Concepto	Pareja	Definición-concepto	Imagen-concepto	Conflicto cognitivo
Integral en cálculo	Alfa	No	Cambio en velocidad	No
	Beta	Pendiente	Velocidad media	No
	Gamma	No	Pendiente	No
	Delta	Pendiente	Integral	Sí
	Épsilon	Pendiente	Integral	Sí
	Omega	No	Cambio de posición	No
Integral en cinemática	Alfa	Aceleración media	Cambio de velocidad	No
	Beta	Cambio de posición	Pendiente	Sí
	Gamma	Velocidad	Razón de cambio	No
	Delta	No	Velocidad	No
	Épsilon	No	Pendiente	No
	Omega	No	Velocidad	No

El análisis de la recolección de imágenes-concepto y definiciones-concepto de la integral se basa en los hallazgos de la Tabla 3 y se describe a continuación.

Cálculo – Integral

De las seis parejas solamente las parejas Delta y Épsilon respondieron correctamente. Las imágenes-concepto más recurrentes fueron: cambio de función de posición o velocidad, pendiente e integral. Las parejas Beta, Delta y Épsilon mencionaron a la pendiente como definición-concepto y Delta y Épsilon hablaron de la integral como imagen-concepto, lo cual no se observó en beta, que habló de velocidad media como imagen-concepto. Dos parejas, Delta y Épsilon evidenciaron contar con un conflicto cognitivo, ya que mencionaron a la pendiente y a la integral como parte de la misma alineación conceptual.

Cinemática – Integral

De las seis parejas, ninguna respondió correctamente. Alfa, beta y gamma mostraron mayor interacción en sus respuestas. Las imágenes-concepto recurrentes fueron: pendiente y velocidad. En tanto, las definiciones-concepto recurrentes observadas fueron: velocidad y aceleración media.

Conclusiones

En el problema de la derivada en cálculo puede observarse que los estudiantes responden con las palabras *cambios* y *velocidad de una función* (ver Tabla 2). En tanto, en el problema de derivada en cinemática se encuentran más términos relacionados con el concepto, a saber velocidad y razón de cambio. Se observó que algunas parejas evidenciaron conocer algunas perspectivas de la derivada al resolver el problema de cinemática, lo que sugiere que estos estudiantes tienden a conectar adecuadamente estos términos en la interpretación de gráficas de cinemática, no así en gráficas de cálculo.

El problema de integral en cálculo muestra que los estudiantes expresan el concepto de pendiente al enfrentar problemas de integral (ver Tabla 3). Por otra parte, se observó que algunas parejas entran en conflicto cognitivo, ya que alinean los conceptos de razón de cambio e integral. En tanto, en el problema de integral en cinemática se muestra que ninguna de las seis parejas respondió correctamente y que ninguna manifestó contar de manera consistente con imágenes-concepto de área e integral, relacionadas con el problema. La falta de relación de estas imágenes-concepto habla de una carencia de conexión conceptual tanto en el contexto de aprendizaje como en un contexto de aplicación.

Con este trabajo se comprueba el postulado de Tall y Vinner (1981) que advierte sobre el manejo conceptual más inclinado hacia el uso de imágenes-concepto como una evidencia de dominio conceptual. Si bien los primeros tres problemas permitieron recolectar respuestas correctas, se encontraron elementos de interés en las estructuras cognitivas de las parejas, debido a que su razonamiento fue elaborado, con conceptos matemáticos y físicos que no fueron conectados adecuadamente. Las similitudes entre los problemas de derivada de ambos contextos son que los estudiantes cuentan con la imagen-concepto de pendiente y razón de cambio, donde en cálculo responden con conceptos de cinemática de manera indistinta, mientras que en cinemática responden en línea con términos físicos.

El estudio de la integral, en los contextos de cálculo y cinemática, muestra que los estudiantes evidencian imágenes-concepto predominantes de la pendiente y la razón de cambio en problemas que requieren el manejo conceptual de integral. Si bien los participantes demostraron tener en mente elementos de conceptos matemáticos que podrían orientarlos para resolver los problemas de cinemática su formación conceptual no empleó el concepto de área bajo la curva con el problema o de integral que se les presentó. La revisión de las estructuras cognitivas de los estudiantes permitió encontrar que los estudiantes pueden llegar a elaborar argumentos matemáticos con cierta complejidad más no se acercan a la conexión de integral en problemas con gráfica.

Bibliografía

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics*, 62, 750–762.

Britton, S., New, P. B., Sharma, M. D. y Yardley, D. (2005). A case study of the transfer of mathematics skills by university students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36, 1–13.

Cui, L., Rebello, N. S. y Bennett, A. G. (2005). College students' transfer from calculus to physics. En L. Cui, N. S. Rebello, y A. G. Bennett (Eds.), *Physics Education Research Conference* (Vol. 818, pp. 37–40). Salt Lake City, Utah: American Institute of Physics.

García-García, J. J. (2005). El uso y el volumen de información en las

representaciones gráficas cartesianas presentadas en los libros de texto de ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 23, 181–200.

García-García, J. J., y Perales-Palacios, F. J. (2006). ¿Cómo usan los profesores de química las representaciones semióticas? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 5, 247–259.

García-García, J. J., y Perales-Palacios, F. J. (2007). ¿Comprenden los estudiantes las gráficas cartesianas usadas en los textos de ciencias? *Enseñanza de las ciencias*, 25, 107–132.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1–64.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L. y Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503–513.

Pérez-Goytia, N. F., Domínguez, Á. y Zavala, G. (2010). Understanding and interpreting calculus graphs: refining an instrument. En S. Mel, C. Singh, y N. S. Rebello (Eds.), *Physics Education Research Conference Proceedings*. Portland, Oregon: American Institute of Physics.

Planinic, M., Milin-sipus, Z., Katic, H., Susac, A. e Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1393–1414.

Testa, I., Monroy, G., y Sassi, E. (2002). Students' reading images in kinematics: the case of real-time graphs. *International Journal of Science Education*, 24, 235–256.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38, 609–637.

Zavala, G. y Barniol, P. (2012). Students' understanding of dot product as a projection in no-context, work and electric flux Problems. En N. S. Rebello, P. Engelhardt y A. D. Churukian (Eds.), *Physics Education Research Conference*. Philadelphia, PA: American Institute of Physics.