

DISEÑO DE UN CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ALREDEDOR DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

RUTH RODRÍGUEZ GALLEGOS
Tecnológico de Monterrey

RESUMEN: El presente trabajo tiene como objetivo el mostrar la fundamentación del diseño de un curso de Ecuaciones Diferenciales el cual está dirigido a futuros ingenieros y algunas implicaciones que tiene esta base teórica en el diseño del mismo; la implementación y posterior evaluación. La experiencia tiene lugar en una universidad privada del norte de México y esta reflexión surge de un trabajo colegiado de profesores que imparten la materia. En este reporte del diseño se han considerado cuatro dimensiones en la enseñanza y aprendizaje de las ED: la histórica-epistemológica, considerando algunos estudios previos que se han desarrollado alrededor de las ED; la psicológica, al tomar en cuenta algunas investigaciones que toman en cuenta las dificultades asociadas con el aprendizaje de esta materia; la pedagógica, en donde damos cuenta de la importancia del uso de técnicas didácticas como lo es el

aprendizaje activo así como de herramientas tecnológicas varias como lo son la simulación computacional pero también software matemático especializado y finalmente hemos considerado la dimensión profesional donde hemos considerado las prácticas de ingenieros en materias de especialidad así como de su ámbito laboral. Se concluye mostrando de manera general los hallazgos para el curso de ED.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales, modelación, simulación, aprendizaje activo.

Introducción

El curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) corresponde para una gran parte de los estudiantes de ingeniería en el último curso formal de matemáticas básicas y a la culminación de una serie de cursos de Cálculo Integral y Diferencial. Se pretende que el alumno sea capaz de poder aplicar sus conocimientos a las materias de especialidad en

curso posteriores (Tecnológico de Monterrey, 2005). Actualmente, se promueve que el alumno desarrolle competencias que le permitan la adquisición de conocimientos matemáticos pero aunado a éstos en el desarrollo de competencias de índole social, de comunicación, de colaboración por lo que el diseño de currícula de cursos básicos como ED se pone de nuevo en la mesa de debate pero además por el uso exponencial de tecnología varia en el salón de clases de los últimos años así como la gran importancia de replantear una vez más el papel activo del alumno en su aprendizaje sobre todo en Ciencias. Esta propuesta de diseño de curso de ED está encaminada en esa dirección.

Antecedentes institucionales

Un primer antecedente a esta propuesta es el Rediseño Curricular en las Matemáticas del sector de Ingeniería en Campus Monterrey iniciado en el año 1999 (Salinas y Alanís; 2009) en donde se cuestiona no solo el cómo enseña) sino sobre todo el qué enseñar y para qué enseñarlo. Derivado de este esfuerzo se desarrollaron 4 propuestas de curso y sus respectivos libros de texto que proponen y presentan esta nueva forma de aprender Cálculo Integral y Diferencial de una y varias variables y que constituyen para los alumnos que llevan el curso de ED parte de sus conocimientos previos.

La propuesta del curso ED pretende retomar el camino ya avanzado y además propone que en el curso se presenten y estudien los temas alrededor del eje transversal de un enfoque de modelación matemática enfatizando el que los objetos matemáticos sean vistos no solo como objetos matemáticos sino además en su faceta de herramientas para modelar fenómenos diversos en contextos varios (físicos, químicos, biológicos, sociales, etc.). Para la acepción de modelación matemática en el ámbito escolar universitario tomamos como base el trabajo realizado por Rodríguez (2010a) donde se justifica la importancia de estudiar al objeto ED como una herramienta idónea para modelar fenómenos de naturaleza varia y que a través de los usos de esta noción matemática permite al alumno construir significados.

Sobre el diseño curricular del curso

Desde 2008, un grupo de profesores de la Academia de ED ha reflexionado y discutido sobre un diseño e implementación de un curso innovador de Ecuaciones

Diferenciales (ED) que tome en cuenta varias componentes. Hemos decidido retomar como una primera referencia el trabajo de diseño curricular de Cassarini (1997) para organizar la revisión de literatura sobre la Enseñanza y Aprendizaje (EyA) de las ED enfocando el diseño a venir a apoyar la formación de futuros ingenieros. Una primer propuesta de este trabajo está en Rodríguez (2010b). De acuerdo a Cassarini (1997), el diseño alude a un boceto, esquema, plano para representar ideas, acciones de modo que éstas guíen y orienten al momento de llevar el proyecto curricular a la práctica. Se pretende entonces que el modelo curricular que subyace a este trabajo provoque una reflexión anticipada sobre la práctica de enseñanza. Se pretende que el diseño nos conduzca a un análisis de las variables del contexto (tener en cuenta dónde se aplica y en qué condiciones reales o potenciales). Se espera propiciar una reflexión sobre los propios conocimientos y modalidades de ese conocimiento, así como de la forma de su organización. Se enfatiza que el diseño deberá considerar las características de los aprendices y del aprendizaje en sí. Hemos decidido enfocar este diseño de curso en un modelo de investigación en el sentido de Stenhouse (citado por Cassarini, 1997) quien establece que se busca comprometer más al profesorado, el desarrollo se constituye como una investigación de la cual emanan propuestas de innovación favoreciendo el diseño curricular. Algunas características a resaltar en este modelo son:

- El profesor se percibe como un investigador
- El currículum ...
 - está pensado en término hipotéticos, no acabados
 - se plantea desde una perspectiva evolutiva
 - debe recoger las variables contextuales de la escuela y su ambiente
- La participación del profesor es fundamental para mejorar la enseñanza

Existen algunos estudios enfocados en el diseño de currículo en Matemáticas y resaltamos en este rubro los trabajos de Rico (1998) y Camarena (2001). Rico propone en el diseño de currículum la consideración de cuatro dimensiones las cuales se ejemplifica en la siguiente tabla:

Componentes por nivel	1ª dimensión	2ª dimensión	3ª dimensión	4ª dimensión
<i>Niveles</i>	Conceptual Cultural	Cognitiva o de desarrollo	Ética formativa	o Social
<i>Planificación por profesor</i>	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
<i>Sistema Educativo</i>	Conocimiento	Alumnos	Profesor	Aula
<i>Disciplina Académica</i>	Epistemología e Historia de las Matemáticas	Teorías del Aprendizaje	Pedagogía	Sociología
<i>Finalidades</i>	Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales

Se trabaja en 4 dimensiones sobre las cuales se comentan los aportes de éstas en el conocimiento de la problemática de la EyA de las ED.

La dimensión histórico-epistemológica en la ella de las ED

Es una de las dimensiones menos trabajada en este proyecto docente pero se ha retomado investigaciones previas realizadas en Matemática Educativa sobre las ED, su desarrollo histórico y sobre todo su nacimiento como modelos para representar y estudiar fenómenos físicos sobre todo en el contexto de cinemático y/o problemas geométricos (Nápoles y Negrón, 2002). Existen trabajos de investigación que toman en cuenta el desarrollo histórico de conceptos matemáticos para dar cuenta de dificultades actuales de los alumnos en la actualidad. Incluso proponen secuencias didácticas completas para la enseñanza de ciertos temas como lo son la Transformada de Laplace (Cordero y Miranda; 2002) y Funciones Generalizadas (Camarena, 2001). Estas propuestas toman en consideración además dificultades de naturaleza cognitiva que implica el nacimiento mismo de ciertos conceptos en ED, en la siguiente sección se detallará algunos hallazgos reportados en esta dirección.

La dimensión cognitiva en la EyA de las Ed

De las grandes dificultades reportadas previamente encontramos las que tiene que ver con el poco significado construido por curso “tradicionales” de ED debido al gran énfasis en la algoritmización más que en las ideas detrás. Los alumnos son capaces de poder resolver ciertas ED bajo métodos analíticos precisos pero sin tener claro la aplicación de éstas en contextos reales o dar explicaciones sobre las soluciones encontradas (Sabella y Redish, 1994). Aparece en la década de los 90’s una reforma en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en la cual se da cuenta de la importancia de disminuir la preponderancia de métodos analíticos sobre los métodos cualitativos y numéricos (Artigue 1989, 1996; Arslan, Chaachoua y Laborde, 2004; Moreno y Laborde, 2003). En parte esta cuestión sucedía por la falta de herramientas tecnológicas de cálculo y de visualización como lo son las computadoras o calculadoras graficadoras accesibles hoy en día para un gran número de estudiantes y sobre todo que permiten poner en juego otro tipo de propuestas curriculares en el sistema educativo. Ejemplo de estas propuestas son Boyce (1994); Kallaher (1999); Rasmussen (2001); y Blanchard, Devaney y Hall (2006). Si bien es cierto existen casos de éxito documentados en México en los últimos años y propuestas innovadoras sobre su enseñanza a nivel internacional (Rodríguez, 2010b), se necesita un mayor cambio en lo que se vive en las aulas, en el día a día, sobre todo en la formación de futuros ingenieros.

La dimensión pedagógica: técnicas didácticas, aprendizaje activo y tecnología

Ahora se retoma el papel del profesor y del alumno en ambientes diferentes al tradicional donde el profesor comparte el conocimiento y el alumno es un receptor del mismo. Por ello la importancia del uso de técnicas didácticas varias como lo son el Aprendizaje Colaborativo (AC), Aprendizaje Basado en Problemas, Aprendizaje Basado en Proyectos o Aprendizaje basado en Investigación. Molina et al. (2012) resumen los esfuerzos de la institución donde se realiza esta propuesta por alinear el desarrollo de competencias de los alumnos con esta modalidad de aprendizaje activo. Otros estudios han visualizado la enseñanza a través de la modelación matemática por lo que lo podemos considerar en este rubro este enfoque de enseñar las ED en tanto modelos de diversos

fenómenos. La importancia de la modelación matemática en la ella de las ED ya había surgido desde el análisis de algunos trabajos de corte histórico pero resaltamos que desde el punto de vista de una técnica de enseñanza, modelación surge nuevamente como una opción idónea para enseñar ED.

Se tienen experiencias con el uso de ambientes de aprendizaje activo es el hecho de que desde agosto del 2010 se ha implementado parte de estas ideas aquí plasmadas en un ambiente de aprendizaje activo (sala ACE, Aprendizaje Centrado en el Estudiante; Zavala, Alarcón, Domínguez y Rodríguez, 2010; Alvarado, Domínguez, Rodríguez y Zavala, 2011) en el cual se reestructura el discurso matemático escolar y se potencia la autonomía del estudiante para modelar a través de experiencias físicas en aula y/o simular. Propuestas similares en E.U. han sido SCALE-UP (Student Center Active Learning Environment with Upside Down pedagogies); TEAL (Technology Enabled Active Learning) y *Flipping the classroom* donde se proponen ambientes de aprendizaje donde se potencializa al máximo la interacción del estudiante con sus compañeros de clase manteniendo la comunicación con su profesor tanto en la sesión presencial como fuera del aula mientras que existe trabajo importante que realiza el alumno de manera previa (lecturas, video lecturas, ejercicios) o posterior a la sesión siendo este trabajo autónomo realizado de manera virtual con apoyo de recursos multimedia en plataformas tecnológicas varias.

El uso de tecnología aparece entonces como fundamental tanto dentro como fuera del aula realizando esto de manera oficial (o no).

Ejemplo de estos recursos que ya se han venido usando en la EyA de las ED son:

Uso de software especializado. Maple; Mathematica; Matlab o variantes en formato de acceso libre como Wolfram Alpha ó Maxima.

Uso de calculadoras graficadoras. TI Nspire CX CAS (Rodríguez y Quiroz, 2012).

Uso de sensores promoviendo el aprendizaje experiencial dentro de la clase. Experimentación en clase con el uso de sensores que se adaptan a calculadoras graficadoras o a la PC gracias a software específico (ejemplo Data Studio, Vernier).

Uso de simuladores promoviendo el aprendizaje experiencial dentro y fuera de la clase como PhET de la Universidad de Colorado, Portal IDEA de la Editorial Pearson y EDTools de la Editorial de Cengage.

Uso de Recursos Educativos Abiertos (REA) como lo son applets libres en la web, recursos multimedia como Khan Academy, aplicaciones (Apps) en iTunes U ó Apps para iPad. Integramos la opción de dos cursos en línea completos de ED en iniciativas como OCW (Open Course Ware) del Tecnológico de Massachusset (MIT).

Uso de redes sociales y plataformas en la *nube*. Facebook, Twitter o Google Circles para crear comunidades dentro y fuera del aula de clases; plataformas de trabajo oficial como Blackboard, Google Docs/Sites y espacios en la *nube* como Dropbox o Google Drive.

Uso de dispositivos portátiles. Clickers, smarthphones y tablets promoviendo el uso de tecnología portable de fácil o libre acceso.

La dimensión profesional en la ella de las ED

Otra vertiente del diseño del curso ha sido el ir identificando el uso específico que se le daba a las ED en otras áreas ingenieriles. Fruto de este trabajo iniciado en el 2009 ha sido las entrevistas con profesores de otras áreas; visitas a clases y/o observaciones de todo el semestre (48 horas al semestre) en particular en materias de Ingeniería como Análisis de Señales y Sistemas, Circuitos Eléctricos I, Dinámica de Sistemas, Balance de Materia y Teoría de Control.

La materia se imparte a 22 carreras de cuatro áreas distintas repartidas de la siguiente forma:

<i>No. de carreras</i>	<i>Área</i>	<i>Carreras que llevan el curso de ED</i>
15	Ingeniería	IBN, IBT, IC, IDA, IDS, IFI, IID, IIS, IMA, IME, IMI, IMT, IQA, IQP, LCQ
4	Tecnologías de Información	INT, ISD, ITC, ITE
2	Agricultura y Alimentos	IA, IIA
1	Salud	IMD

Un esfuerzo importante previamente comentado es Blanchard et al. (2006) quienes desarrollan una propuesta de enseñanza de las ED desde Sistemas Dinámicos enfatizando

el análisis cualitativo de las ED a través de gráficas de soluciones y uso de simuladores. Otros esfuerzos a resaltar en este rubro son Fisher (2001) y Bourguet (2005). En la materia de Dinámica de sistemas se ha visto como un área importante de desarrollo de materiales el incorporar algunos elementos básicos de software de simulación computacional como iThink/Stella; Arena; AnyLogic; ProModel o software educativo gratuito como Vensim.

Otro esfuerzo está en material educativo que se ha generado para enseñar ED a través de simulaciones en Simulink (MatLab) para la enseñanza de este tópico en Teoría de Control (Smith & Campbell, 2011). Otros software que pueden ser utilizados en esta materia son Mathematica/System Modeller ó SciLab (acceso libre).

Se pretende en el curso tener un hilo conductor a través de la modelación de fenómenos y de la simulación de ellos por medio de software específicos. Aunque existen diversos recursos disponibles de apoyo para un curso de ED existen contadas propuestas que propongan una serie de estos recursos usando tecnología variada que puedan apoyar en la introducción de futuros ingenieros para el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales asociando esto con las prácticas ingenieriles en otras áreas de especialidad y sobre todo con formas de trabajo diversas y enriquecedoras en cuanto modelar y simular en sus respectivos campos disciplinares. Nuestra propuesta tiene el interés de solventar ese espacio que aún no se ha explorado.

Conclusiones preliminares

Se pretende presentar justificaciones para el diseño de un curso de ED con base a hallazgos que se tengan para el aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales, tomando como eje rector la modelación y simulación de fenómenos diversos. Lo anterior creemos debe sentar las bases para creación de recursos para presentar a las ED como modelos y posteriormente su resolución a través de los tres métodos de resolución: análisis cualitativo (campos pendientes), análisis algebraico (métodos clásicos) y numéricos (Euler y Runge Kutta). A medida que los problemas del curso surjan realmente de problemáticas reales de otras materias de especialidad y el alumno sea capaz de apreciar el potencial de las ED para modelar, comprender, explicar, simular o predecir el sistema en cuestión, se espera lograr en el alumno una mayor motivación e interés pero sobretodo un aprendizaje significativo en el uso y resolución de las Ecuaciones Diferenciales no solo en su

especialidad sino en diversas áreas de la ingeniería logrando así el apoyar en la formación de un ingeniero con visión holística para el mundo globalizado en que se vive hoy en día.

Referencias

- Alvarado, C., Domínguez, A., Rodríguez, R. y Zavala, G. (2011). *Expectancy Violation in Physics and Mathematics Classes in a Student-Centered Classroom*. American Institute of Physics Conference Proceedings. Estados Unidos.
- Arslan, S., Chaachoua, H. y Laborde, C. (2004). *Reflections on the teaching of differential equations. What effects of the teaching of algebraic dominance?* Memorias del X Congreso Internacional de Matemática Educativa. Dinamarca.
- Artigue, M. (1989). *Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire*. Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble, 183-209. Grenoble, Francia.
- Artigue M. (1996). *Teaching and learning Elementary Analysis*. Memorias del VIII Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME VII), Selected Lectures, 15-29. Sevilla, España.
- Bourguet, R. (2005). *Desarrollo de pensamiento sistémico usando ecuaciones diferenciales y dinámica de sistemas*. Ponencia en Reunión de Intercambio de Experiencias. ITESM.
- Boyce, W. (1994). *New Directions for Differential Equations*. The Mathematical Journal.
- Cassarini, M. (1997). *Diseño y Desarrollo del Currículo*. En Teoría y diseño curricular. Editorial Trillas.
- Camarena, P. (2001). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería*. Premio Anuies a Mejor Tesis de Doctorado. ANUIES.
- Cordero, F. Y Miranda, E. (2002). *El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 5 (2): 133-168. México.
- Fisher, D. (2001). *Lessons in Mathematics: A Dynamic Approach*. ISEE Systems.
- Kallaher, M. (1999). *Revolutions in Differential Equations*, exploring ODES with modern technology, en MAA Notes 50, Washington, D.C: MAA.
- Molina, A., Bérístain, L., Tamés, E., Moska, D., Ramírez, R. y Romo, M. (2012). *Un modelo innovador para el aprendizaje activo*. Tenth LACCEI Latin American and Caribbean Conference. Panama City, Panama.
- Moreno J. y Laborde C. (2003). *Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique*. Memorias del

- Congreso Europeo. Reims, Francia.
- Nápoles, J. y Negrón, C. (2002). La historia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias contadas por sus libros de texto. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas Xixim*, 3(2), 33-57.
- Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, (20, 1): 55-87.
- Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1 (1): 22-39. México.
- Rodríguez, R. (2010a). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4-I): 191-210. México.
- Rodríguez, R. (2010b). Diseñando un curso de Ecuaciones Diferenciales a través del Trabajo Colegiado: una experiencia docente. *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Red CIMATES: Monterrey.
- Rodríguez, R. (2012). Modelación y uso de tecnología TI Nspire CX CAS en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Innovaciones Educativas de la Texas Instruments*, Duodécima Edición, pp. 24-26. México.
- Sabella, M. y Redish, E. (1994). Reporte en línea del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Física.
- Salinas, P. y Alanís, J.A. (2009). Hacia un paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELIME, 2010). 12 (3): 355-382. México.
- Smith, C. y Campbell, S. (2011). *A first course of Differential Equations, Modeling and Simulation*. Taylor and Francis Editors.
- Tecnológico de Monterrey. (2005). *Visión Misión 2015*. Documentos del Sistema Tecnológico de Monterrey.
- Zavala, G., Alarcón, H., Domínguez, A. y Rodríguez, R. (2010). Sala ACE: Aprendizaje al servicio de la Educación. *Revista Ciencia Conocimiento Tecnología*. Pp. 36-40. Gobierno de Nuevo León.