



ACERCA DE LA INTERPRETACIÓN GLOBAL Y PUNTUAL EN EL ANÁLISIS DE GRÁFICAS. UN ESTUDIO EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

ALMA ALICIA BENÍTEZ PÉREZ

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, CECYT 11 "WILFRIDO MASSIEU"
albenper@gmail.com

MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, ESIME-ZACATENCO
martha.garcia@gmail.com

RESUMEN

El presente trabajo es el resultado de una investigación para evaluar la interpretación del contenido en la representación gráfica por estudiantes de cuarto semestre de Nivel Medio Superior. Este trabajo se funda en la necesidad de conocer el análisis de funciones a través de la gráfica cuando se emplean tratamientos globales y/o puntuales. La base teórica tanto de la investigación como de la formulación de las preguntas del cuestionario, se basan en una visión cognitiva desde un punto de vista semiótico en el sentido que establece Raymund Duval. La muestra estuvo constituida por 81 alumnos del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos número 11, a quienes se les aplicó el cuestionario después de haber concluido la unidad de aprendizaje de cálculo diferencial. Las tareas planteadas se refirieron a determinar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, puntos sobre el plano, pendiente, propiedades de ubicación y comportamiento de la gráfica. El cuestionario permitió identificar la inclinación de los estudiantes para emplear el punteo como único tratamiento, detectándose la confusión que se tiene entre las abscisas y las ordenadas, así como entre la función creciente con las imágenes positivas. La graficación que se apoya en el punteo no es suficiente para explorar el contenido de la gráfica desde una visión global, pues oculta información que contribuye a enriquecer su interpretación.

Palabras clave: Interpretación, global, puntual, variacional.





INTRODUCCIÓN

Los programas de estudios de nivel bachillerato y particularmente los programas de los CECyT's (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos), aluden la importancia de explorar e interpretar diversas representaciones, por ejemplo: la expresión algebraica, representación numérica y la representación gráfica. Particularmente la representación gráfica se aborda desde dos acercamientos: vía el puntual, que consiste en la elección de parejas de números para identificar un punto en el plano cartesiano, y vía la interpretación global, donde se señala el estudio del comportamiento del trazo a través de tratamientos de tipo cualitativo.

Desde esta visión de los programas de estudio, es importante hacer un alto en el camino, para analizar el impacto que ha tenido éste acercamiento en la exploración del contenido que encierra la representación gráfica en el Nivel Medio Superior (NMS).

El presente trabajo explora el análisis global y/o puntual en el estudio de las funciones, particularmente el enfoque se realizará considerando un acercamiento de tipo variacional, por alumnos de NMS. Para lo cual se ha considerado los conocimientos previos del alumno en situaciones que involucren el pensamiento variacional.

MARCO TEÓRICO

La interpretación de gráficas es una actividad fundamental en el procesos de construcción de conceptos y procedimientos matemáticos, en cuyo acto el estudiante adquiere sentido de una situación, a través de una gráfica, una ecuación o bien un dibujo.

La interpretación de una gráfica requiere de procesos agudos de visualización, los cuales implican procesos cognitivos superiores, desde esta perspectiva, Eisenberg y Dreyfus (1991) y Duval (2000) consideran que la visualización consiste en la producción de representaciones que, en ausencia de los objetos representados, concede la posibilidad de ser observados como si estuvieran delante de los ojos.

Debido a ello y de acuerdo con Duval (2000) la visualización es la producción de una representación semiótica, donde se identifique de manera explícita el objeto representado. Por





otro lado, la visualización matemática no es un acto de aprehensión simultáneo en el campo de la percepción, es una actividad cognitiva intencionada que origina una representación en una superficie de dos dimensiones, la cual expone los vínculos entre las unidades que componen a las figuras, eso quiere decir que la visualización matemática expone únicamente objetos, los cuales se hacen “ver” a través de las organizaciones de las relaciones que tienen las unidades de las figuras. Por lo cual, “ver” en matemáticas implica discriminar las relaciones o la organización de relaciones entre las unidades representacionales que constituyen a una representación semiótica.

Para reconocer las unidades representacionales, es ineludible la identificación y exploración detallada que contribuya en su producción, las cuales deberán respetar las propiedades o reglas de la representación. Duval (1988) menciona la importancia de la interpretación global, para analizar el contenido de las representaciones, puntualizando la aprehensión global de los valores visuales de la figura forma, lo que otorga un poder intuitivo o heurístico a la representación gráfica.

En este sentido, Even (1998) afirma que quienes emplean el análisis global de los cambios de la representación gráfica adquieren una poderosa comprensión de las relaciones del contenido que la constituye, que aquellos que restringen su análisis a las características locales y específicas.

No obstante, Mosclikovich, Shoenfeld y Arcabi (1993) mencionan la necesidad de coordinar la aprehensión local y global para desarrollar habilidades de análisis que contribuyan en la identificación del contenido en las representaciones gráficas.

Por nuestra parte (Benítez, 2010), se ha identificado las tendencias de los alumnos para explorar tratamientos cualitativos como cuantitativos en el análisis de funciones, a través de la representación gráfica empleando el análisis global, así como el local. Nemirovsky (1992) considera la importancia de incluir en el trabajo de los estudiantes un análisis local y global de las funciones, lo que posibilita que un sujeto empiece a recurrir a acercamientos alternativos que le permitan conocer la información que proporciona la gráfica de una función y relacionarla con la gráfica de su derivada.

METODOLOGÍA





La presente investigación tuvo un carácter exploratorio, para lo cual se diseñó y aplicó un cuestionario en el sentido que indica Amérigo (1993), atendiendo principalmente la identificación, interpretación y análisis del comportamiento local y global de funciones, así como la variación proporcional, a través de preguntas específicas sobre el comportamiento de las gráficas en el plano cartesiano.

Tal planteamiento se basa en lo expuesto por Duval (1998), para establecer la correspondencia de las diferentes variables en la representaciones, beneficiando la articulación entre dichas variables, cuyo punto central y decisivo en el aprendizaje de las representaciones gráficas es la discriminación de los valores visuales y su coordinación con los valores correspondientes con otros representaciones, atendiendo la discriminación de los valores visuales con relación a la figura-fondo. Para ello las actividades diseñadas deben permitir explorar las variaciones de una sola variable y mantener constantes los valores de las otras variables, con la finalidad de que los valores de las distintas variables visuales se unifiquen para ser exploradas como única figura forma/fondo.

El cuestionario de exploración favoreció al empleo de diversos registros de representación, como son la representación gráfica y el verbal-escrito para describir su comportamiento o para identificar sus propiedades. La primera sección del cuestionario correspondió a la ubicación de las propiedades y comportamiento de una función, así como el concepto de pendiente, la segunda sección se destinó para disertar sobre el comportamiento y propiedades de una gráfica y el concepto de derivada, desde el análisis de la variación. Considerando las propiedades como aquellas referidas a los signos de las coordenadas en el plano cartesiano, mientras que el comportamiento al crecimiento o decrecimiento de la función.

El cuestionario estuvo constituido por preguntas de opción múltiple, las alternativas expusieron las propiedades de las funciones. Así como preguntas abiertas para evidenciar los diferentes tratamientos que los alumnos consideraron en la justificación de sus respuestas.

El estudio se llevó a cabo con 81 alumnos de entre 17 y 18 años, que culminaron el curso de Cálculo Diferencial de NMS en el CECyT 11, orientados hacia las ciencias exactas (Físico Matemático), cuyo objetivos conciernen al cálculo diferencial: identificar los puntos críticos de una gráfica, así como una representación aproximada con base a una ecuación proporcionada, aplicar el límite como herramienta para indicar si una función es simple o compuesta, evaluar la





continuidad de una función, derivar las expresiones con base a las reglas correspondientes, y aplicar el concepto de derivada a la vida cotidiana.

La aplicación del instrumento se realizó al término del curso, a juzgar por las notas en sus cuadernos de trabajo, los estudiantes abordaron los temas indicados en el programa de estudio, principalmente se analizó lo referente a la graficación de funciones (procedimientos tabulares) y el análisis de las gráficas. Los investigadores no participaron en la planeación y evaluación del curso, en los que estaban involucrados los estudiantes. La valoración de las respuestas a las diferentes preguntas que constituyó el cuestionario exploratorio, fue de tipo cualitativo.

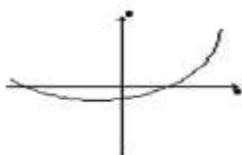
SIGNOS DE LAS COORDENADAS

La graficación, a diferencia de la figura geométrica, está relacionada con un marco referencial, el cual está conformado por dos ejes coordenados, donde la gráfica está determinada por una ecuación.

La graficación es una tarea que puede ser llevada a cabo por diversos procedimientos, uno de ellos requiere la distinción de dos entradas en la pareja ordenada $(x, f(x))$ y de dos orientaciones en la gráfica, la primera entrada referida al eje horizontal y la segunda al eje vertical, posteriormente la contabilización de los valores sobre los ejes respectivos.

En el plano coordenado si las parejas ordenadas de la gráfica se localizan en el primer y segundo cuadrante, entonces se cumple que las ordenadas son positivas ($\square(\square) > 0$), por el contrario si se localizan en el tercer y cuarto cuadrante entonces la ordenadas son negativas ($\square(\square) < 0$).

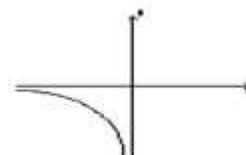
A fin de explorar la orientación de las parejas ordenadas en el plano cartesiano (análisis puntual) se presentaron las gráficas A1, A2 y A3, con la finalidad de que el estudiante seleccione la gráfica que cumpla las condiciones para identificar la ordenada al origen mayor que la unidad.



Gráfica A1



Gráfica A2

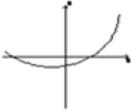
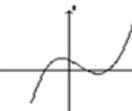
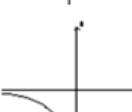


Gráfica A3

Los resultados se exponen en la Tabla 1.





PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Qué función determina aquellas que cumplen con la ordenada al origen negativa y mayor que la unidad?		36	44.44 %
		22	27.16 %
		22	27.16 %
	d) Ninguna	1	1.23 %

Los respuestas indican que el 44.44 % eligieron la gráfica A1, la cual cumple con las condiciones para identificar la ordenada origen negativa y mayor que la unidad. No obstante el 27.16% seleccionó la gráfica A2, en la cual la ordenada al origen es positiva, mientras que el otro 27.16 % restante eligió la gráfica A3, cuya trazo se localiza en el tercer cuadrante ($f(x) < 0$), por lo que consideraron negativa a la ordenada origen, sin embargo éste trazo no esta presente la ordenada al origen, ya que el comportamiento de la gráfica tiende a infinito negativo.

Una visión de conjunto permite considerar que menos de la mitad de los estudiantes identificaron la ordenada origen, atendiendo su orientación en el plano cartesiano. El resto de los participantes presentaron imprecisión referente a la definición de la ordenada al origen $(0, b)$, ya que es una pareja ordenada y no un trazo como lo exponen algunos estudiantes.

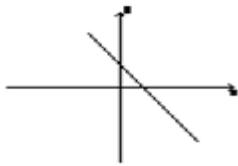
PENDIENTE DE UNA RECTA



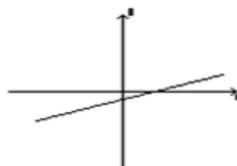


En el bachillerato la variación se explora y analiza considerando dos cantidades x y y relacionándose de esta forma, lo que permite la construcción de valores y se estudia si el cociente $\frac{y}{x}$ toma siempre el mismo valor o valores muy próximos entre sí. También se puede construir una gráfica para ver si se obtiene una recta que pasa por el origen. Ocurre con frecuencia que dos cantidades x y y no son proporcionales, pero sí lo son sus incrementos. En este caso se tienen la relación; $y - y_0 = k(x - x_0)$ donde $x - x_0$ y $y - y_0$ denotan los incrementos de x y y respecto a x_0 y y_0 respectivamente. Esta relación define las funciones lineales, cuya gráfica es una recta en el plano cartesiano.

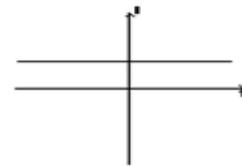
A fin de explorar el tratamiento de la pendiente desde un análisis global (tratamiento cualitativo) en la representación gráfica, se presentaron las gráficas A4, A5 y A6, como apoyo para emitir respuesta al siguiente cuestionamiento: Determina la pendiente que es menor que la unidad y positiva. Justifica tu respuesta



Gráfica A4



Gráfica A5

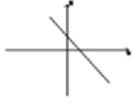
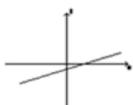
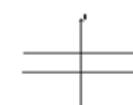


Gráfica A6

Las respuestas de los estudiantes se aprecian en la Tabla 2.





PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
Determina la pendiente que es menor que la unidad y positiva.		47	58.33 %
		27	33.33%
		0	0.00%
	d) Ninguna	7	8.33 %

Prácticamente más de la mitad de los participantes (58.33%) seleccionaron la gráfica A4. Este dato muestra la inclinación de los estudiantes para considerar la positividad de la pendiente, con base en la ubicación del trazo en el plano cartesiano (segundo y tercer cuadrante). Por otro lado si la pendiente es menor que la unidad, lo relaciona cuando el trazo desciende.

Respecto al 33.33 % de los estudiantes su elección se orientó a la gráfica A5, la cual expone que el trazo asciende, traduciéndolo en la positividad de la pendiente, mientras que el texto “menor que la unidad” lo relaciona con la aproximación del trazo al eje de las abscisas. Y finalmente el 8.33 % de los estudiante desconocen el comportamiento cualitativo de la pendiente en la gráfica.

De estas respuestas se percibe una relación que construyeron los estudiante entre el sentido de la inclinación, el ángulo y la posición del trazo respecto al origen del eje vertical, para analizar la pendiente. No obstante algunos alumnos presentaron confusión entre la inclinación de la pendiente y el ángulo formado con el eje de las abscisas, así como la posición de trazo.





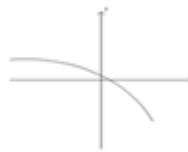
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Desde la matemática, se considera que una función es creciente si $f(x_2) > f(x_1)$, entonces la función es creciente en el intervalo (x_1, x_2) . Por el contrario si $f(x_2) < f(x_1)$, entonces la función es decreciente en el mismo intervalo. Intuitivamente se dice que una función es creciente si a medida que x aumenta, la gráfica crece, por el contrario una función decrece a medida que x aumenta, la gráfica decrece.

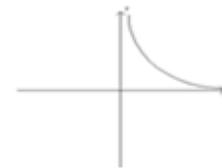
Con el propósito de explorar el tratamiento del alumno acerca de las funciones cuyas imágenes son negativas o positivas y además son crecientes, se presentaron dos preguntas: la primera se enfocó al estudio de funciones cuyas imágenes son positivas y, además crecientes (Gráficas A7, A8 y A9). La segunda pregunta se orientó a funciones cuyas abscisas son negativas y, además creciente (Gráficas A10, A11 y A12).



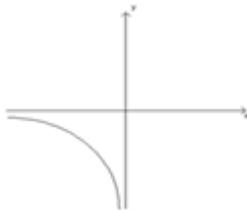
Gráfica A7



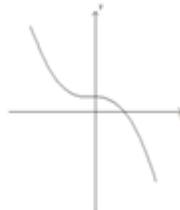
Gráfica A8



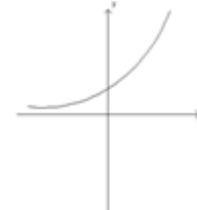
Gráfica A9



Gráfica A10



Gráfica A11



Gráfica A12

La Tabla 3 expone las respuestas que el alumno emitió a la primera pregunta. Como se aprecia el 49.38% de los estudiantes eligen la gráfica A9 cuyas imágenes son positivas pero el comportamiento del trazo decrece. No obstante el 45.67 % seleccionó la gráfica A7, cuyas características cumplen con tener imágenes positivas y el trazo es creciente.





PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Qué gráfica corresponde a funciones de imágenes positivas y además crecientes?		37	45.67%
		2	2.46 %
		40	49.38 %
	d) Ninguna	2	2.46 %

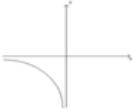
En esta pregunta subyacen tendencias a relacionar las funciones crecientes con imágenes abscisas positivas (primer cuadrante) y, aquellas gráficas que en realidad decrecen pero cumplen con las imágenes positivas, debido a la lectura de la gráfica pues se realiza de izquierda a derecha. Finalmente el 2.46 % de los alumnos se inclinaron por la gráfica A8, la cual no cumple con ninguna de las condiciones que indica la pregunta, los alumnos presentaron confusiones respecto a la ubicación de las ordenadas positivas, así como el comportamiento y lectura del trazo.

Para exponer las posturas que el alumno considera respecto a las funciones de abscisas negativas y además creciente, se solicitó a los estudiantes que eligieran la gráfica que cumpliera tales requisitos (Gráficas A10, A11 y A12).





La Tabla 4 comprende las respuestas que el alumno emitió

TABLA 4			
PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Qué funciones corresponden a abscisas negativas y además crecientes?		17	20.98 %
		21	25.92%
		40	53.08 %

El 53.08% de los estudiante se inclinan por la gráfica A12, ya que presenta abscisas negativas y positivas y, además el trazo crece; en segunda posición se seleccionó la gráfica A11 con el 25.92% , en la cual se muestra las abscisas negativas y positivas, pero el trazo decrece en el segundo cuadrante donde las abscisas cumplen con ser negativas. Finalmente la gráfica A10, solo 17 alumnos se inclinaron por esta opción, donde se cumple que las abscisas son negativas, pero el trazo es descendiente.

De las respuestas que los alumnos expusieron se privilegia la asociación de las condiciones de funciones con abscisas negativas y además decrecientes con aquellas gráficas que tienen coordenadas negativas tanto en x como en y , por lo que su elección se basa en el signo de las abscisas de la gráfica y se deja de lado el comportamiento del trazo.

CONCLUSIONES

La interpretación de gráficas presumen la coordinación entre las coordenadas en x y y para establecer la aproximación covariacional, describiendo la situación en términos de razón de cambio; es decir la covariación ofrece una comparación alternativa al concepto de función, por tener la aproximación de correspondencia. Los estudiantes consideraron que una función tiene imágenes negativas o positivas (Gráficas A1, A2 y A3), pero no relacionan la coordinación que





presentan con las abscisas, evidenciando la falta de coordinación que ocurre en la gráfica con las dos variables de manera conjunta.

Cuando a los estudiantes se les plantearon preguntas que exigían el cumplimiento de dos condiciones a la vez, como el caso de las Gráficas A4, A5 y A6, donde la pendiente debía ser menor que la unidad y positiva. La mayoría de los estudiantes relacionaron la condición “menor que la unidad” con el sentido de la inclinación del trazo, es decir, si el trazo desciende se traduce que es menor que la unidad. La confusión que los estudiante presentan, es debido al análisis puntual en la representación gráfica, ello revela la necesidad de tratamientos de orden cualitativo que permita fortalecer el análisis global en el trazo.

Los estudiantes en general consideraron que el trazo asciende si se encuentra por arriba del eje de las abscisas, así mismo el hecho de que las imágenes y abscisas sean positivas (primer cuadrante) es suficiente para determinar que el trazo es creciente. En cualquiera de estas situaciones resulta eminente la ubicación de los puntos en la gráfica por sobre el comportamiento variacional que presente el trazo.





BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Benítez, A. (2010). Estudio de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Revista Educación Matemática* 22(1), 5-30.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del Pensamiento. En F. Hitt, F. (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. En T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of PME*, (pp. 55–69), Hiroshima.
- Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En Zimmerman, W. y Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington DC: Mathematical Association of America.
- Even, R. (1998). Factor involved in linking representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior* 17 (1), 105-121.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A. y Arcabi. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of lineal relations, and connecting among them. En T. Romberg, E. Fennema y T. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69-100). Hillsdale:LEA.
- Nemirovsky, R. (1992). Students' Tendency to assume resemblances between a function and its derivative. Recuperado el 16 de mayo de 2010, de <http://edres.org/eric/ED351193.htm>

