



MODELAJE MATEMÁTICO EN LIBROS DE TEXTO: DEL EJERCICIO AL PROBLEMA DE MODELAJE HAY MUCHO TRECHO

ADRIANA BERENICE VALENCIA ÁLVAREZ/ JAIME RICARDO VALENZUELA GONZÁLEZ

TECNOLÓGICO DE MONTERREY
avalenciaalvarez@gmail.com
jrvq@itesm.mx

RESUMEN

Ante la importancia de la resolución de problemas matemáticos situados en contextos reales, y dada la influencia del libro de texto en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se cuestiona a qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los alumnos en sus libros de Cálculo. Para responder a dicho cuestionamiento, se presenta una distinción entre dos tipos de problemas matemáticos: los problemas convencionales (ejercicios) y los problemas de modelaje matemático. Como referente teórico se retoma la propuesta de Green y Allen (2010), quienes distinguen a ambos problemas en nueve aspectos: (1) naturaleza de la evidencia disponible en el planteamiento, (2) conexión del planteamiento con los procedimientos matemáticos, (3) tipo de supuestos necesarios para su solución, (4) complejidad del problema, (5) singularidad de la respuesta, (6) evaluación de la solución, (7) robustez del problema, (8) transferencia de las técnicas utilizadas a problemas similares y (9) el tipo de revisión. Utilizando estos nueve criterios, se analizaron y clasificaron, de manera cualitativa y cuantitativa, un total de 188 ejemplos y 1,114 ejercicios encontrados en la unidad de funciones en cinco libros de texto de Cálculo de una variable. Como resultado, se encontró que el 85.1% de todos los ejemplos y ejercicios en los libros estudiados ($n=1302$) fueron clasificados como “problemas convencionales”, el 13.7% tuvieron características intermedias y se catalogaron como “problemas situados o aplicaciones” y solo el 1.2% de los ejemplos y ejercicios de la unidad cumplieron con siete o más de las características definidas para los “problemas de modelaje”.

Palabras clave: modelaje matemático, solución de problemas, libros de texto.





INTRODUCCIÓN

Es de esperarse que los estudiantes no sólo cuenten con los conocimientos matemáticos suficientes para acreditar sus cursos, sino que también sean capaces de utilizarlos para resolver los problemas que pudieran encontrar fuera del entorno escolar (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2013; Secretaría de Educación Pública [SEP], 2008). La mayoría de las veces, este tipo de problemas diferirá de aquellos vistos en el salón de clases pues estarán situados en un contexto real, no estarán planteados de manera directa y permitirán una mayor variedad de aproximaciones y soluciones (International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA], 2011; SEP, 2013). En este estudio se explora en qué medida los estudiantes están expuestos a problemas convencionales situados en un contexto completamente matemático en comparación con aquellos problemas situados en un contexto real.

El objetivo del estudio es responder la pregunta de investigación: ¿qué proporción de los ejemplos y ejercicios planteados en los libros de texto de Cálculo se clasifican como problemas de modelaje matemático en contraste con aquellos identificados como problemas convencionales o tradicionales? Los resultados obtenidos buscan llevar a los profesores, investigadores y autores de libros de texto a reflexionar sobre la clase de problemas con los que los alumnos estudian y practican el Cálculo.

Diferenciación entre problemas convencionales y problemas de modelaje. Cuando un estudiante carece del conocimiento suficiente para producir una estrategia inmediata para su solución, se considera que tiene un problema (Finney, 2003).

Green y Allen (2010) establecen que existen por lo menos nueve aspectos que diferencian los problemas matemáticos convencionales de los problemas de modelaje matemático.





Tabla 1. Diferencias entre problemas (Green & Allen, 2010)

<i>Tema</i>	<i>Aspecto</i>	<i>Problema matemático convencional</i>	<i>Problema de modelaje matemático</i>
Planteamiento del problema	1. Naturaleza de la evidencia disponible	Toda la evidencia o datos necesarios para resolver el problema son proporcionados en el planteamiento.	La evidencia que se provee es insuficiente y posiblemente contradictoria, llevando a la necesidad de que el estudiante realice supuestos, investigue a fondo o introduzca nuevas variables al problema.
	2. Conexión con los procedimientos matemáticos	Los procedimientos matemáticos necesarios para su solución son dados directa o indirectamente en la formulación del problema.	No se prescriben los procedimientos matemáticos necesarios o no quedan claros.
	3. Tipo de supuestos necesarios	Los supuestos necesarios son principalmente matemáticos.	Los supuestos están basados tanto en el mundo matemático como en el mundo real. No se puede llegar a una solución sin establecer una conexión entre ambos mundos.
	4. Complejidad del problema	La complejidad está dada por la cantidad de etapas en los procedimientos matemáticos.	La complejidad surge de la interacción entre el mundo matemático y el real.
Solución del problema	5. Singularidad	Solo hay una solución correcta posible.	Hay múltiples soluciones que pueden accederse a través de múltiples caminos y que pueden justificarse de diversas maneras.
	6. Evaluación	Se evalúa si se efectuaron correctamente las técnicas matemáticas y si se llegó a la solución correcta.	Se evalúa si la solución tiene sentido en el contexto del problema, si está justificada y si los pasos están respaldados.
	7. Robustez	El problema es poco sensible a las estrategias para resolver el problema por su naturaleza “de molde o plantilla”.	El problema es sensible a cambios en los datos o al contexto, resultando en que pueda resolverse por estrategias completamente distintas.





<i>Tema</i>	<i>Aspecto</i>	<i>Problema matemático convencional</i>	<i>Problema de modelaje matemático</i>
	8. Transferencia de las técnicas utilizadas	Hay una transferencia baja en el método y en las técnicas. Es decir que lo aprendido para resolver el problema solo sirve para ejercicios o problemas muy similares.	Hay una transferencia alta en el método general de dar solución a un problema pero no necesariamente en las técnicas de solución específicas.
	9. Tipo de revisión	La revisión consiste en corregir los errores.	La revisión permite una mayor comprensión del contexto y aprendizaje.

Dadas estas diferencias, para resolver un problema de modelaje se ponen en juego habilidades matemáticas superiores como razonamiento, creatividad, comunicación y la capacidad para plantear problemas (Mevarech & Kramarski, 2014). A pesar de ello, la mayoría de los problemas planteados en los libros de texto suelen ser problemas rutinarios (Yan & Lianghuo, 2006).

Influencia de los libros de texto en la enseñanza matemática. Los libros de texto constituyen uno de los principales recursos didácticos del profesor para apoyar su trabajo en el aula (Cabero, Duarte & Barroso, 1989; García & Caballero, 2005). En la enseñanza del Cálculo, los libros de texto constituyen la principal fuente para los ejercicios y problemas vistos en clase, las tareas escolares y los problemas planteados en los exámenes (Bergqvist, 2012). Asimismo, los estudiantes de Cálculo dedican gran parte del tiempo de sus tareas a realizar los ejercicios de los libros, se basan en sus ejemplos o en ejercicios similares para imitar los procedimientos utilizados y se apoyan en ellos para estudiar para los exámenes (Lithner, 2003a; 2003b). En pocas palabras, el libro de texto determina en gran medida el tipo de problemas a los que estarán expuestos los alumnos en el aula.

MÉTODO

La metodología de investigación empleada fue de naturaleza mixta. En la primera fase, se realizó un análisis cualitativo del contenido (los ejemplos y los ejercicios de una muestra de cinco libros de texto de Cálculo) de acuerdo con los nueve criterios propuestos por Green y Allen (2010). En una segunda fase se categorizaron y contabilizaron los ejemplos y ejercicios para posteriormente calcular la proporción de ejemplos y ejercicios, por libro, ubicados en cada categoría.





Disciplina de interés. Se optó por el Cálculo diferencial e integral de una variable por tres factores. En primer lugar, por su importancia para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, para la solución de problemas en diversos ámbitos y para el éxito académico y profesional (Grattan-Guinness, 1991). En segundo lugar, por los elevados índices de reprobación y deserción escolar en la educación media superior y superior (Sistema Nacional de Información Estadística Educativa [SNIEE], 2011) así como los altos índices de reprobación y rezago en los cursos de Cálculo (Aparicio, Jarero & Ávila, 2007; Riego, 2013; Rubí, Moreno, Pou & Jordán, 2010). Finalmente, porque el Cálculo es considerado por algunos estudiantes como una serie de conceptos y reglas abstractos que no tienen vinculación con la realidad (Moreno & Ríos, 2006).

Muestra. Los datos analizados provienen de los ejemplos y ejercicios matemáticos hallados en las unidades didácticas que versan sobre las funciones al ser un tópico esencial para el estudio del Cálculo, por ser un contenido común en los cinco libros analizados y dada la posibilidad del tema para el uso de problemas de modelaje.

Los libros se seleccionaron con la intención de obtener una gran variabilidad. Los más antiguos fueron publicados en 1998 y el más reciente, en el 2010. Dos libros están destinados a estudiantes a nivel medio superior y tres para alumnos a nivel superior o universitario; dos libros son de editoriales mexicanas y tres libros son traducciones del inglés. Los libros analizados fueron:

1. *Calculus of a single variable* (Larson, Hostetler & Edwards, 1998), un libro por más de un millón y medio de estudiantes a nivel medio superior.
2. *Cálculo diferencial e integral* (De la Borbolla & De la Borbolla, 1998)
3. *Cálculo diferencial: programa de complementación de estudios para el ingreso a la educación superior* (Astey, 1999)
4. *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (Stewart, 2002)
5. *Cálculo. Una variable* (Thomas, 2010)

Se clasificaron 19 ejemplos y 279 ejercicios del primer libro; 48 ejemplos y 12 ejercicios del segundo; 49 ejemplos y 110 ejercicios del tercero; 53 ejemplos y 328 ejercicios del cuarto y





19 ejemplos y 385 ejercicios del quinto. La muestra de los cinco libros consistió en un total de 188 ejemplos y 1,114 ejercicios.

Instrumento. Se utilizó la tabla 1 a manera de lista de verificación. Los ejemplos y ejercicios fueron leídos cuidadosamente y evaluados en cada aspecto. En caso de que el problema cumpliera con la descripción de un problema matemático convencional (primera columna de la tabla I), se le asignaban cero puntos en dicho aspecto. En caso de que cumpliera con la descripción de un problema de modelaje matemático (segunda columna de la tabla 1), se le asignaba un punto. Así, la puntuación obtenida por el ejemplo o ejercicio indicaba el número de características que compartía con un problema de modelaje.

Considerando que el instrumento utilizado para el análisis es cualitativo y que siempre habrá un grado de subjetividad en la evaluación, se determinó la confiabilidad entre jueces. Para las valoraciones dadas por dos evaluadores se obtuvo una Kappa de Cohen ponderada de $\kappa = 0.66$.

RESULTADOS

Clasificación de los ejercicios y ejemplos analizados: análisis cualitativo. Del análisis cualitativo emergieron tres clasificaciones de problemas: problemas convencionales, problemas situados o de aplicación y problemas de modelaje.

1. Problemas convencionales (0 y 1 puntos). Estos ejemplos y ejercicios cumplieron con una o ninguna característica de los problemas de modelaje y se encontraban situados en un contexto puramente matemático. Para su solución, no requerían más que de la aplicación directa de procedimientos y, en su planteamiento, daban indicaciones explícitas al alumno sobre cuáles procedimientos matemáticos seguir como “encuentre el dominio y rango de la función”, “relacione las ecuaciones listadas con las gráficas que aparecen abajo” y “conviértanse las siguientes funciones implícitas en explícitas, tanto de x como de y ”.

2. Problemas situados o aplicaciones (2 a 6 puntos). Este tipo de ejemplos y ejercicios se distinguieron de los problemas convencionales por estar situados en un contexto real. Debido a





ello, requerían que el estudiante estableciera conexiones entre el mundo real y el matemático y que verificara que su respuesta tuviera sentido en la realidad. Por ejemplo:

Trescientos libros se venden en \$40 cada uno, lo que da por resultado un ingreso de $(300)(\$40) = \$12,000$. Por cada aumento de \$5 en el precio, se venden 25 libros menos. Exprese el ingreso R como una función del número x de incrementos de \$5. (Thomas, 2010, p. 13).

3. Problemas de modelaje (7 a 9 puntos). Además de estar situados en la realidad, estos ejercicios solicitaban al alumno la construcción, selección, análisis, interpretación, evaluación, mejora y/o uso de modelos matemáticos. Por ejemplo, en un problema propuesto por Larson et al (1998) se presentan datos reales sobre el aumento del dióxido de carbono en la atmósfera y los estudiantes deben elegir cuál modelo representa “mejor” los datos (si un modelo lineal o un modelo cuadrático) y justificar su respuesta.

Categorización de los ejercicios y ejemplos analizados: análisis cuantitativo. Del análisis cuantitativo se obtuvieron diez categorías de problemas (del 0 al 9) de acuerdo con el número de características que compartían con un problema de modelaje. En la tabla 2 se muestran la proporción de ejemplos y ejercicios en cada categoría y clasificación, por cada libro.





Tabla 2. Porcentaje de ejemplos y ejercicios en los cinco libros de Cálculo que corresponden a cada clasificación (PC, PS o PM) y a cada categoría (del 0 al 9)

Clasificación	Categoría	Larson et al. (1998)			De la Borbolla y De la Borbolla (1998)			Astey (1999)			Stewart (2002)			Thomas (2010)		
		E1	E2	Tot.	E1	E2	Tot.	E1	E2	Tot.	E1	E2	Tot.	E1	E2	Tot.
		n= 19	n= 279	n= 298	n= 48	n= 12	n= 60	n= 49	n= 110	n= 159	n= 53	n= 328	n= 381	n= 19	n= 385	n= 404
PC	0	47%	67%	65%	71%	100%	77%	76%	93%	87%	62%	70%	69%	58%	70%	70%
	1	16%	13%	13%	4%	0%	3%	8%	5%	6%	13%	13%	13%	37%	20%	21%
	2	5%	5%	5%	25%	0%	20%	12%	3%	6%	11%	9%	9%	5%	6%	6%
	3	5%	8%	7%	0%	0%	0%	4%	0%	1%	4%	4%	4%	0%	1%	1%
PS	4	0%	4%	4%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	2%	2%	0%	0%	0%
	5	5%	2%	2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	1%	1%	0%	0%	0%
	6	0%	1%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	4%	1%	2%	0%	0%	0%
PM	7	5%	0%	0% ^a	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	1%
	8	11%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	0%	0% ^a	0%	1%	1%
	9	5%	0% ^a	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Notas: PC= Problemas convencionales; PS= Problemas situados o aplicaciones; PM= Problemas de modelaje; E1= Ejemplos; E2= Ejercicios; Tot= Total.

^a Los valores realmente corresponden a un 0.3%. Todos los demás valores de 0% no se vieron afectados por el redondeo a valores enteros.

La mayoría de los ejemplos y ejercicios encontrados en los cinco libros de texto (entre un 79% y 93%) corresponden a “problemas convencionales” situados en un contexto puramente matemático, un porcentaje menor de problemas (entre un 7% y 20%) son “problemas situados en un contexto real o aplicaciones” y un porcentaje aún menor (de 0% a 2%) se consideran “problemas de modelaje matemático”. Los resultados indican que hay una carencia de problemas de aplicación y de problemas de modelaje en los libros de texto analizados.





CONCLUSIÓN

La resolución de problemas en los libros de texto. Se espera que los estudiantes sean capaces de resolver problemas dentro y fuera del aula. A pesar de ello, los libros de texto analizados dedicaron la mayoría de sus ejemplos y ejercicios a la práctica de procedimientos directos en contextos puramente matemáticos.

Si bien los problemas convencionales deben formar parte del currículo para practicar, reforzar y posteriormente dominar los conocimientos matemáticos, este tipo de problemas no debe constituir todo el material. La educación matemática debe ir más allá e incluir ejercicios que permitan reforzar el tema, aterrizar el Cálculo en situaciones reales, aumentar el interés de los estudiantes y desarrollar habilidades de orden superior. Lo anterior, pone de manifiesto la necesidad de incorporar una mayor cantidad de problemas de modelaje en la educación matemática (Cordero et al., 2009; Dundar, Gokkurt & Soylu, 2012).

Alcances y limitaciones del estudio. Este estudio aporta información sobre los diferentes tipos de problemas encontrados en la unidad didáctica de funciones en cinco libros de texto de Cálculo. Con la información obtenida se puede tomar decisiones sobre la concepción matemática de cada libro y el enfoque que se le da a los problemas de Cálculo en el aula. No obstante, la selección de la muestra obedeció a fines exploratorios; se buscó que los libros analizados tuvieran una gran mayor variación y no necesariamente son representativos de la población de libros de texto de Cálculo.

Propuestas para estudios futuros. El estudio podría ampliarse mediante el análisis de una muestra representativa de libros y, de ser posible, analizando los ejemplos y ejercicios de otras unidades temáticas. También valdría la pena contrastar el tipo de problemas propuestos en libros de nivel medio superior en comparación con los de nivel superior, o contrastar libros de acuerdo con la editorial o el país de procedencia.





BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Aparicio, E., Jarero, M., & Ávila, E. (2007). La reprobación y rezago en Cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, 9(5), 3-12.

Astey, L. (1999). Cálculo diferencial. Programa de complementación de estudios para el ingreso a la educación superior. México: Limusa Noriega Editores, Secretaría de Educación Pública, Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica.

Bergqvist, E. (2012). University mathematics teachers' views on the required reasoning in Calculus exams. The Mathematics Enthusiast, 9(3), 371-408.

Cabero, Duarte y Barroso (1989). La formación del profesorado en nuevas tecnologías: retos hacia el futuro. En J. Ferrés y P. Marqués (Coords.): Comunicación educativa y nuevas tecnologías. Barcelona: Praxis

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana [CANIEM]. (2009). XLV Asamblea General Ordinaria. Informe anual 2008-2009. Resumen ejecutivo. Recuperado de: http://www.conlatingraf.org/novedades/de_interes/09_04_06/Resumen_ASAMBLEA09.pdf

Cengage Learning. (2013). Cálculo: Trascendentes tempranas. 7a ed. eBook. James Stewart. Recuperado de: http://issuu.com/cengagelatam/docs/calculo_7ed._trascendentes_tempranas_stewart_ebook

Cengage Learning. (s.f.). James Stewart. Biografía. Recuperado de: <http://www.cengage.com.mx/autores/james-stewart/>

Cordero, F., Suárez, L., Mena, J., Arrieta, J., Rodríguez, R., Romo, A., Cârsteanu, A., & Solís, M. (2009). La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. En Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 22: 1717-1726.





De la Borbolla, F., & De la Borbolla, L. (1998). Cálculo diferencial e integral. (4a ed.) México: Esfinge.

Dundar, S., Gokkurt, B., & Soylu, Y. (2012). Mathematical modeling at a glance: a theoretical study. *Procedia- Social and Behavioral Sciences* 46, 3465-3470.

Becerril, I. (10 de marzo de 2014). Industria editorial mexicana: postrada en el estancamiento. *El Financiero*. Recuperado de: <http://www.elfinanciero.com.mx/economia/industria-editorial-mexicana-postrada-en-el-estancamiento.html>

Finney, R. (2003). Research in problem-solving: Improving the progression from novice to expert. Recuperado de http://www.colorado.edu/physics/phys4810/phys4810_fa06/4810_readings/finney.pdf

García, A. y Caballero, P.A. (2005). La tecnología digital en el aula: un instrumento al servicio de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Diploma de Estudios Avanzados. Madrid: Universidad Camilo José Cela.

Green, K., & Allen, E. (2010). Mathematical reasoning in service courses: Why students need mathematical modeling problems. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 7(1), 113-140.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA]. (2011). TIMSS 2011: Marcos de la evaluación. Chestnut Hill, MA, E.U.A.: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Recuperado de http://www.iea.nl/fileadmin/user_upload/Publications/Electronic_versions/TIMSS_2011_Frameworks_Spanish.pdf

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (1994). Calculus of a single variable. (5a ed.) Boston: Houghton Mifflin.





- Lithner, J. (2003a). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 19-55.
- Lithner, J. (2003b). The role of exercises in calculus textbooks. *Research Reports in Mathematics education* 5. Department of Mathematics, Umea University.
- Mevarech, Z. & Kramarski, B. (2014). *Critical Maths for innovative societies: the role of metacognitive pedagogies*. OECD Publishing.
- Moreno, C., & Ríos, P. (2006). Concepciones en la enseñanza del Cálculo. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 7(2), 25-39.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE]. (2013). *PISA 2012 Results in focus: What 15-year-old know and what they can do with what they know*. Recuperado de <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>
- Oficina Comercial de la Embajada de España en México. (2006). *Estudios de mercado: el sector editorial en México*. Recuperado de: http://www.imedicinas.com/pfw_files/cma/anexos_nueva/26072007153416_03.ElSectorEditorial-Mexico_2006_.pdf
- Riego, M. (2013). Factores académicos que explican la reprobación en Cálculo diferencial. *Conciencia Tecnológica*, 46(2), 29-35. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=94429298006>
- Rubí, G., Moreno, M., Pou, S., & Jordán, A. (2010). Problemática persistente en el aprendizaje de Cálculo. Caso de la Facultad de Ciencias, UABC. *El Cálculo y su Enseñanza*, 2. (pp. 1-10). Distrito Federal, México: Cinvestav-IPN.
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2008). Acuerdo Secretarial 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de





Bachillerato. Recuperado de
<http://www.stunam.org.mx/sa/seccionacad/prepas/acuerdo444.pdf>

Secretaría de Educación Pública. [SEP]. (2013). Resultado prueba ENLACE 2013 nacional: último grado del bachillerato. Recuperado de
http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2013/ENLACE_Media_2013_nacionales_e_historicos.pdf

Sistema Nacional de Información Estadística Educativa [SNIEE]. (2011). Principales cifras del sistema educativo de República Mexicana. Recuperado de
http://www.snie.sep.gob.mx/Estad_E_Indic_2011/Cifras_REPMEX_2011.pdf

Stewart, J. (2002) Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. (4 ed.) México: Cengage Learning/ Thompson Internacional.

Thomas, G. (2010). Cálculo, una variable. (12 ed.) México: Addison-Wesley.

Yan, Z. & Lianghuo, F. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-629.

