



MODELACIÓN Y APRENDIZAJE LÚDICO EN UN CURSO DE CÁLCULO PARA INGENIERÍA

ELVIRA G. RINCÓN FLORES

TECNOLÓGICO DE MONTERREY, CAMPUS MONTERREY
elvira.rincon@itesm.mx

LORENZA ILLANES DÍAZ RIVERA

TECNOLÓGICO DE MONTERREY, CAMPUS MONTERREY
lillanes@itesm.mx

RESUMEN

Esta investigación describe como el Aprendizaje Lúdico y la Modelación se utilizan para que los estudiantes de un Curso de Cálculo de las carreras de Ingeniería puedan determinar los volúmenes de diversos objetos que se generan al rotar su función en torno al eje de la x para luego llegar a una generalización de un modelo matemático empleando diferenciales. La propuesta didáctica surge a partir del interés que se tiene sobre la comprensión del estudiante, del papel que juegan los diferenciales, más allá de una mera notación simbólica, en el estudio del Cálculo. Se muestran los antecedentes tanto del Aprendizaje Lúdico en las Matemáticas como de la Modelación Matemática. En el estudio se desarrolló una combinación de estas dos corrientes para el diseño de la estrategia didáctica y de las actividades, así como para la valoración del desempeño en las diferentes etapas de cada actividad y de las evaluaciones parciales y finales. La investigación muestra cualitativamente y cuantitativamente las ventajas de utilizar la Modelación Lúdica en el proceso enseñanza-aprendizaje del tema de sólidos de revolución. También se establece una metodología aplicable en otro tipo de problemas del Cálculo.

Palabras clave: Juegos Educativos, Modelos Matemáticos, Cálculo

INTRODUCCIÓN

La investigación tiene como objetivo mostrar como mejora el aprendizaje de los volúmenes de revolución al introducir el Aprendizaje Lúdico y la Modelación Matemática. Se investigaron los antecedentes de la Lúdica en la enseñanza de las matemáticas (Amaya y Gulfo, 2009; Chamoso, Durán, García, Martín, Rodríguez, 2004; Martínez, Rincón, y Domínguez, 2011; Torres, Rincón y





Domínguez, 2012; Rosas, Illanes, y Domínguez, 2012; Kebritchi, Hirumi y Bai, 2010; Lopez-Morteo y López, 2007) .

La Modelación Matemática está fundamentada en los trabajos de Blum y Niss (1991) y Niss, Blum y Galbraith (2007) quienes establecen a la modelación como la relación entre las matemáticas y la “realidad”. Por otro lado, Henry (2001) muestra más etapas y sus transiciones, acuña el término “modelo pseudo-concreto” para referirse básicamente a la etapa intermedia entre la realidad o situación real y el modelo matemático. El estudio también se fundamenta en las investigaciones sobre Modelación Matemática de Kaiser y Sriraman (2006), Henning y Keune (2007), Niss, Blum y Galbraith (2007), Blomhoj y Carreira (2008), Blum y Leiß (2007) y Borromeo y Blum (2009).

El estudio muestra las ventajas de utilizar la Modelación Lúdica en el tema de volúmenes de revolución, se establece una metodología aplicable en otro tipo de problemas de Cálculo y se presentan algunas recomendaciones para futuras investigaciones.

MARCO TEÓRICO

El juego ha estado presente en la historia de la humanidad y en muchos aspectos culturales, tales como el arte, el deporte y la ciencia, especialmente en las Matemáticas, donde en disciplinas como la teoría de juegos, la teoría de probabilidades o la teoría combinatoria, por citar algunas, iniciaron por la mera recreación humana (Chamoso et al, 2004). Etimológicamente, la palabra lúdica proviene del sustantivo latín ludus que significa juego, Chamoso et al (2004) define al juego como una actividad humana lúdica y competitiva, que pueden ser aplicadas en el aula.

Lopez-Morteo y López (2007) comentan que el uso de la lúdica en la enseñanza de las matemáticas está muy bien documentado, prueba de ello es el estudio de Kebritch, Hirumi y Bai (2010) quienes se dieron a la tarea de buscar estudios empíricos donde se utilizó el aprendizaje lúdico como estrategia de aprendizaje de las Matemáticas, encontraron al menos 16 investigaciones, del 2003 al 2007, de las cuales 11 tuvieron resultados positivos y 5 tuvieron tanto resultados positivos como negativos. Por ejemplo en el estudio desarrollado por Lopez-Morteo y López (2007), encontraron que más del 70% de los estudiantes mostraron una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas una vez terminado el estudio. Otros estudios como los





de Torres et al (2012) y Martínez et al (2010) encontraron que el ambiente de competencia que se vive en el aula lleva a que los estudiantes se concentren en la actividad gracias al deseo de ganar y que en el juego se dan las condiciones propicias para desarrollar habilidades como la expresión oral matemática, el pensamiento crítico, la creatividad y se fomentan valores como la responsabilidad, la solidaridad y el respeto. Chamoso et al (2004) advierte algunas ventajas de utilizar la lúdica en el aula, de las cuales se pueden destacar: despiertan la curiosidad, favorecen el desarrollo social, es un medio para lograr un objetivo didáctico, estimulan la imaginación y pueden ser generadores de aprendizajes duraderos. Nisbet y Williams (2009) encontraron evidencia de mejoras significativas en el corto plazo al emplear juegos al detectar una disminución significativa en la ansiedad y una percepción más positiva a la que tenían sobre la utilidad de aprender matemáticas, por su parte, Ke y Grabowski (2007) aseguran que el juego es más efectivo para promover actitudes positivas con respecto a las Matemáticas, para Hanus y Fox (2014) es un importante aliado ya que puede ser aplicado en la educación como medio para motivar y utilizar nuevos caminos para disfrutar de actividades que suelen ser tediosas.

Corbalán (citado en Chamoso et al 2004) agrupa los tipos de juegos en tres: juegos de conocimiento, de estrategia y de azar, los de conocimiento son los comúnmente utilizados en el aprendizaje de las Matemáticas. En el estudio de Torres et al (2012) se aplicaron actividades lúdicas de tipo reglados, de estrategia y de estructura adaptable, un resultado destacable fue que el grupo experimental (con actividades lúdicas) tuvieron un desempeño mejor en el post-test que el grupo de control (sin actividades lúdicas). Es importante subrayar que una actividad lúdica educativa debe tener un propósito y una estructura, como señala Chamoso et al (2004), el objetivo es utilizar el juego como una herramienta para alcanzar un objetivo didáctico, para la presente investigación se diseñaron actividades lúdicas de conocimiento que motivaron el aprendizaje por descubrimiento.

Los antecedentes básicos que respaldan la visión sobre la modelación matemática están fundamentados en los trabajos de Blum y Niss (1991) y Niss, Blum y Galbraith (2007) quienes postulan en un primer momento a la modelación como la relación entre las matemáticas y la “realidad”. Por otro lado, autores como Henry (2001) dividen aún más esta primera acepción sobre modelación mostrando más etapas y particularmente enfatizan la importancia de las transiciones entre las etapas. Además, a diferencia de los estudios anglosajones que lo denomina “*real model*”





(modelo real en español), Henry (2001) acuña el término “modelo pseudo-concreto” para referirse básicamente a la etapa intermedia entre la realidad o situación real y el modelo matemático.

Finalmente y posterior a un estudio más detallado de otros autores que proponen visualizar la modelación matemática desde otro punto de vista, se decide continuar en este estudio adoptando la descripción de las rutas de aprendizaje desarrolladas por Blum y Borromeo (2009) sobre el ciclo de modelación de Blum y Leiß (2007) en término de 7 etapas (Figura 1).

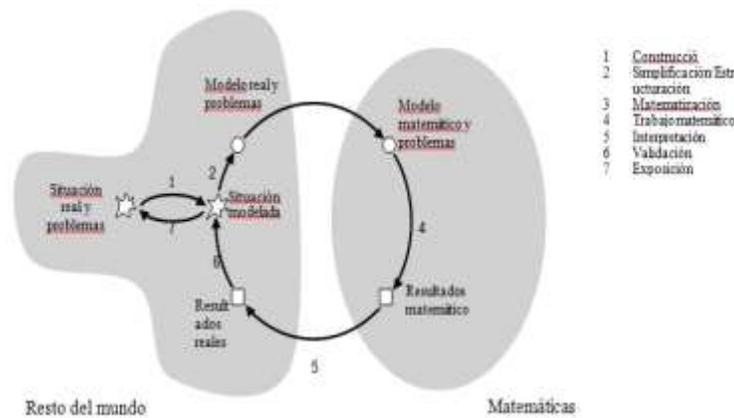


Figura 1. Etapas del ciclo de modelación. (Blum y Leiß 2007)

La situación problema real debe de ser entendida por el estudiante, esto es la situación modelada tiene que ser construida (etapa 1). Esta situación problema tiene que ser más precisa es decir tiene que ser simplificada (etapa 2) a un modelo real. El proceso de matemización (etapa 3) transforma el modelo real en un modelo matemático que en general es una o un conjunto de ecuaciones de diferentes tipos, por ejemplo algebraicas y diferenciales. La solución del modelo matemático se logra mediante la etapa del trabajo matemático (etapa 4), la solución obtenida nos permite interpretar (etapa 5) la situación real, los resultados son verificados (etapa 6) con la situación real del problema y entonces el estudiante puede exponer (etapa 7) el problema y su solución.

Blum y Borromeo (2009) crean las rutas del aprendizaje que siguen un estudiantes al seguir las etapas de modelación (Blum y Leiß, 2007), en donde establecen que no son lineales (Figura 2).



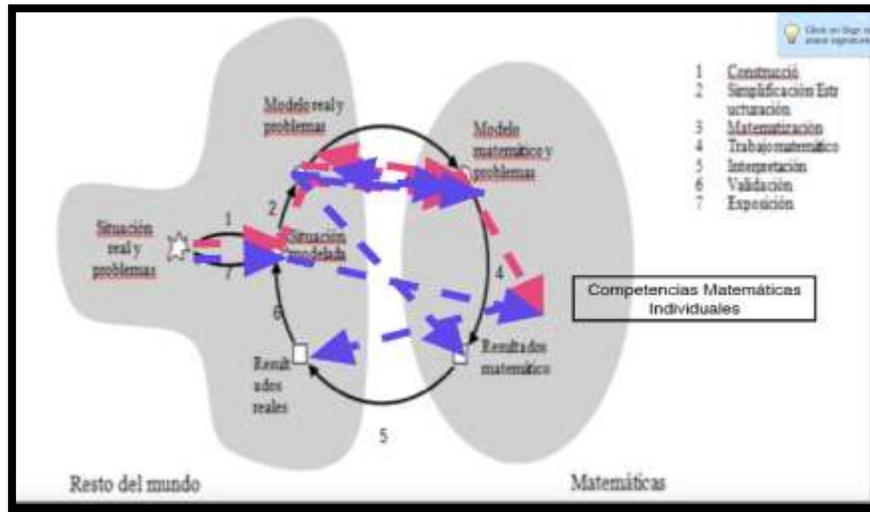


Figura 2. Ejemplo de rutas. (Blum y Borromeo, 2009; Blum y Leiß 2007)

METODOLOGÍA

Es una investigación mixta, ya que se estudia el desarrollo de los alumnos en las actividades diseñadas con modelación lúdica a través de las 7 etapas del ciclo de Modelación de (Blum y Leiß, 2007) y sus rutas (Blum y Borromeo, 2009): 1) Construcción, 2) Simplificación y estructuración, 3) Matematización, 4) Trabajo matemático 5) Interpretación, 6) Validación y 7) Exposición. También se estudiaron las frecuencias de logro utilizando la Estadística Descriptiva. La muestra estuvo representada por un grupo de 30 estudiantes de Cálculo Integral de las carreras de Ingeniería, que se agruparon en equipos de 4 y 5 estudiantes. La investigación se llevó a cabo a lo largo del semestre de enero a mayo del 2014 en 4 etapas principales:

- 1ª Etapa: Se trabajó conjuntamente con los estudiantes una situación problema cuyo tema fue el de Sólidos de Revolución a través de la Modelación Lúdica en el salón de clases. El objetivo de la actividad consistió en usar plastilina para modelar la parte superior de una copa, cortar un diferencial de volumen y plantearlo por escrito simbólicamente, para luego, determinar la integral que proporciona el volumen de cualquier sólido generado cuando la gráfica de una función rota en torno al eje x. (Figura 3)



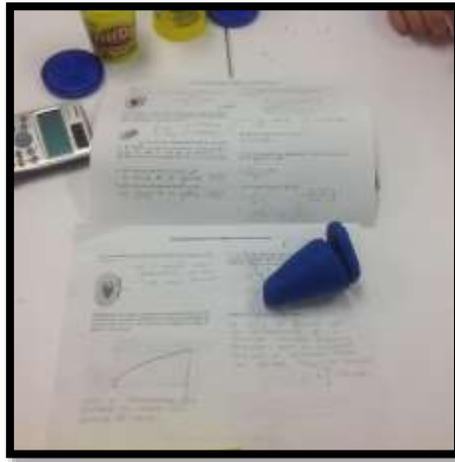


Figura 3. Actividad 1 con modelación lúdica elaborada por los alumnos. (Imagen recabada por las autoras).

- 2ª Etapa: Una vez que los equipos iban terminando la etapa 1 (nivel 1) se les proporcionaba la siguiente actividad correspondiente al nivel 2, esto con la idea de generar un ambiente de competencia y que los estudiantes reafirmaran su aprendizaje. Esta segunda actividad consistió en determinar el volumen de una perilla y fue de mayor reto que la primera. (Figura 4)

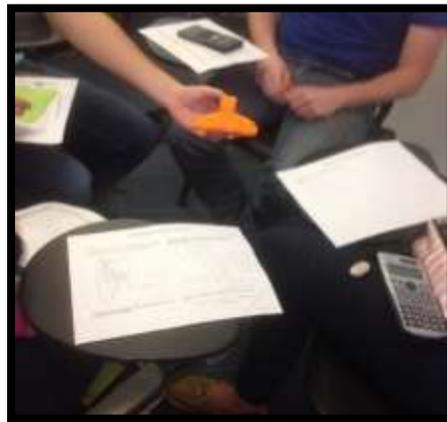


Figura 4. Actividad 2 con modelación lúdica elaborada por los alumnos. (Imagen recabada por las autoras).

- 3ª Etapa: Resolución individual de una situación problema del tema Sólidos de Revolución dentro de un Examen Parcial para confirmar el aprendizaje a mediano plazo.





- 4ª Etapa: Resolución individual de una situación problema del tema Solidos de Revolución dentro del Examen Final para confirmar el aprendizaje a largo plazo.

En la etapa 1 y 2 de la modelación se incluyó el aprendizaje lúdico de una manera más explícita aunque sus efectos se pueden ver a lo largo de las etapas de modelación de una manera implícita.

Al analizar cualitativamente las actividades con modelación lúdica se identificaron las categorías de análisis que permitieron observar las diferencias en el aprendizaje de los alumnos por cada etapa del ciclo de la modelación (Blum y Leiß, 2007) y ver las rutas de Borromeo y Blum (2009). Este proceso ha permitido establecer una metodología de análisis que actualmente se está estudiando en otro tipo de problemas de Cálculo.

RESULTADOS

Para el análisis cuantitativo, inicialmente, se compararon los resultados de 30 estudiantes de Ingeniería. Se establecieron frecuencias para cada una de las etapas del ciclo de Modelación establecido en las actividades colaborativas. A mediano y largo plazo se analizaron dos situaciones problemáticas que se aplicaron en un examen parcial y en un examen final respectivamente. Las cuatro actividades fueron evaluadas a la luz del ciclo de modelación de (Blum y Leiß, 2007) para ver las rutas de Borromeo y Blum (2009).

A continuación se presenta una tabla de las frecuencias, media, varianza y la desviación de respuestas correctas (Tabla 1) en cada una de las situaciones problema para obtener el volumen de revolución por cada una de las etapas de modelación.





Tabla 1

Frecuencias, media, varianza y la desviación estándar de las cuatro situaciones problemáticas para obtener el volumen de revolución.

	Construcción	Simplificación Estructuración	Matematización	Trabajo Matemático	Interpretación	Validación	Exposición
Copa							
Suma	28	28	24	28	28	24	28
Media	1	1	0.857142857	1	1	0.857142857	1
Std desv	0	0	0.356348323	0	0	0.356348323	0
Varianza	0	0	0.126984127	0	0	0.126984127	0
Perilla							
Suma	28	28	28	23	22	23	22
Media	1	1	1	0.821428571	0.785714286	0.821428571	0.785714286
Std desv	0	0	0	0.390021028	0.417855447	0.390021028	0.417855447
Varianza	0	0	0	0.152116402	0.174603175	0.152116402	0.174603175
Examen Parcial							
Suma	24	24	23	17	19	17	17
Media	0.8	0.8	0.766666667	0.566666667	0.633333333	0.566666667	0.566666667
Std desv	0.305128577	0.305128577	0.379049022	0.498272879	0.4660916	0.498272879	0.49827288
Varianza	0.093103448	0.093103448	0.143678161	0.248275862	0.217241379	0.248275862	0.248275862
Examen Final							
Suma	19	19	19	16	15	14	15
Media	0.655172414	0.655172414	0.655172414	0.551724138	0.517241379	0.482758621	0.51724138
Std desv	0.483725281	0.483725281	0.483725281	0.506120179	0.508547628	0.508547628	0.50854763
Varianza	0.233990148	0.233990148	0.233990148	0.256157635	0.25862069	0.25862069	0.25862069

Se observa en los resultados estadísticos (Tabla 1) que en la actividad de la copa (nivel 1) y de la perilla (nivel 2), las soluciones correctas en cada etapa del ciclo de modelación tienen una media arriba del 70%, sin embargo en la situación problema del examen parcial las etapas del ciclo de modelación de trabajo matemático, interpretación, validación y exposición la media está abajo del 63 %; y en las tres primeras etapas: construcción, simplificación-estructuración y matematización estuvieron arriba del 76%. En el examen final la media de las primeras tres etapas: construcción, simplificación-estructuración y matematización fueron del 65%; y en las últimas cuatro etapas: trabajo matemático, interpretación, validación y exposición la media está abajo del 55 %.

Tabla 2

Frecuencias, medias, varianzas y desviaciones estándares de totales de aciertos en cada situación problemática para cada una de las etapas del ciclo de modelación.





	Construcción	Simplificación Estructuración	Matematización	Trabajo Matemático	Interpretación	Validación	Exposición
Copa	28	28	24	28	28	24	28
Perilla	28	28	28	23	22	23	22
EP	24	24	23	17	19	17	17
EXF	19	19	19	16	15	14	15
Suma	99	99	94	84	84	78	82
Media	24.75	24.75	23.5	21	21	19.5	20.5
Std desv	4.272001873	4.272001873	3.696845502	5.597618541	5.477225575	4.795831523	5.8022984

A pesar de que hay una disminución de las frecuencias en los exámenes en las últimas cuatro etapas de modelación las medias indican que en el promedio semestral, 20 de los 30 estudiantes respondieron correctamente (Tabla 2). Por otro lado, a lo largo de las actividades diseñadas con modelación lúdica se pudo observar que el ambiente de aprendizaje se tornó más dinámico dando lugar a un auténtico aprendizaje activo (Mayer, 2004), pues los alumnos de forma colaborativa manipularon el material, tradujeron sus ideas a un lenguaje simbólico para concluir en una generalización (modelo matemático). El papel del profesor fue el de guiar a sus alumnos siendo el alumno el protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje.

CONCLUSIONES

Se ve claramente en este estudio, que la combinación del Aprendizaje Lúdico con la Modelación Matemática favorece el aprendizaje, en este caso, al de los volúmenes de revolución que se generan al girar la gráfica de una función en torno al eje x, especialmente en las primeras etapas del ciclo de modelación de (Blum y Leiß, 2007): construcción, simplificación y matematización, así como en las rutas (Borromeo y Blum, 2009). Habría que hacer igual de explícita la lúdica en las cuatro siguientes etapas del ciclo y medir su impacto. Por otro lado, se comprueba que el aprendizaje colaborativo favorece la construcción del aprendizaje y fortalece actitudes y valores tales como el respeto, tolerancia, comunicación y liderazgo (Martinez et al, 2011). La actitud positiva hacia las matemáticas se fortalece así como el aprendizaje activo ya que los protagonistas del aprendizaje, en todo momento del desarrollo de las actividades con modelación lúdica, son los alumnos. Sin duda, se pudo corroborar que la investigación colegiada ayuda a la mejora continua del trabajo docente. Como área de oportunidad, se considera necesario desarrollar un análisis de ganancia (Hake, 1998) en cada etapa para valorar con mayor claridad la ganancia en el aprendizaje o bien, hacer un estudio con grupo de control y grupo experimental. Sería importante también hacer explícitas las etapas del ciclo (Blum y Leiß, 2007) y las rutas





(Borromeo y Blum 2009) en los exámenes parciales y final, pues estuvieron planteadas implícitamente.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Amaya, T. y Gulfo, J. (2009). De lo lúdico del origami al trabajo con funciones, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 525-533.
- Blomhoj, M. y Carreira, S. (2008). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning mathematics. Topic Study Group 21. International Congress on Mathematical Education. Monterrey, México.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22 (1), 37-68.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In: Haines, C. et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood , 222-231
- Borromeo, R. y Blum, W. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.
- Chamoso, J., Durán, J., García, J., Martín, J. y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas, *SUMA*, (47) 47-58.
- Hake, R. (1998) Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics *Am. J. Phys.* 66 (1) 64-74.
- Hanus, M. y Fox, J. (2014). Assessing the effects of gamification in the classroom: A longitudinal study on intrinsic motivation, social comparison, satisfaction, effort, and academic performance, *Computers & Education*, (80) 152-161.





- Henning, H. y Keune, M. (2007). Levels of modelling competencies. En Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. y Niss, M. (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, 225-232. New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.
- Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.
- Kaiser y Sriraman. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*. 38(3), 302-310
- Ke, F. y Grabowski, B. (2007). Gameplaying for maths learning: cooperative or not? [Versión Electrónica], *British Journal of Educational Technology*, 38(2), 249-259.
- Kebritchi, M., Hirumi, A., & Bai, H. (2010). The effects of modern mathematics computer games on mathematics achievement and class motivation. *Computers & Education*, 55(2), 427-443.
- Lopez-Morteo, G., y López, G. (2007). Computer support for learning mathematics: A learning environment based on recreational learning objects. *Computers & Education*, 48(4), 618-641.
- Maab, K. (2006). What are modeling competencies?. *ZDM Mathematics Education*, 38 (2), 113-142.
- Martínez, L, Rincón, E. y Domínguez, A. (2011). El juego y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 397-405.
- Mayer, R. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? [Versión electrónica] *American Psychologist*. (59), 14-19.
- Nisbet, S. y Williams, A. (2009). Improving students' attitudes to chance with games and activities. *Australian Mathematics Teacher*, 65(3), 25-37.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(1), 3-32.





Rosas, O. Illanes, L. y Domínguez, A. (2012). Uso de las Matemáticas Recreativas en la resolución de Ecuaciones Algebraicas. *Escuela de Invierno de Matemática Educativa EIME*. CINVESTAV. Distrito Federal, México.

Torres, A., Rincón, E. y Domínguez, A. (2012, mayo). Enseñanza de funciones lineales y cuadráticas mediante el aprendizaje lúdico y colaborativo. Ponencia realizada en el sexto congreso innovación, investigación y gestión educativa, Nuevo León, México.

