Tareas con múltiples soluciones: un medio para promover el entendimiento matemático en primaria

Luisa Elida de la Cueva Hernández
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH)
elidelacueva@gmail.com

Fernando Barrera Mora
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH)
fbarrera10147@gmail.com

Aarón Reyes Rodríguez
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH)
aaronr@uaeh.edu.mx

Resumen

Uno de los objetivos centrales de la educación matemática es que los estudiantes construyan un conocimiento estructurado. Por otra parte, el desarrollo de un conocimiento con estas características requiere que los estudiantes lleven a cabo aspectos centrales del pensamiento matemático. En este contexto, el presente trabajo tiene el objetivo de documentar y analizar las diversas rutas de solución que construyeron, durante tres sesiones de trabajo, seis estudiantes de quinto grado de primaria que poseen diferentes niveles de desempeño en matemáticas, al resolver problemas en contextos de la vida real, los cuales tienen diferentes respuestas, con la finalidad de determinar si este tipo de tareas pueden apoyar el desarrollo de un aprendizaje con entendimiento. Los resultados indican que las tareas favorecieron el que los estudiantes experimentaran y justificaran resultados, reflexionaran sobre sus ideas, comunicaran sus puntos de vista y establecieran conexiones entre algunas ideas matemáticas. Se identificó que los estudiantes que mostraban dificultades para entender las ideas matemáticas en los cursos ordinarios, cuando trabajaron con los problemas propuestos mostraron habilidades y formas de pensar que no habían exhibido con anterioridad.

Palabras clave: Solución de problemas, educación básica, enseñanza de las matemáticas, conocimientos previos, educación matemática.

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos centrales de la educación matemática es que los estudiantes desarrollen un conocimiento estructurado y que entiendan las ideas o conceptos fundamentales de las matemáticas. Sin embargo, los profesores pocas veces reflexionamos acerca de qué significa entender algo. El "entendimiento", es una idea complicada porque es algo que siempre está cambiando y está creciendo, razón por la cual existen diferentes niveles de entendimiento de un concepto. El conocer algo no es una proposición de todo o nada, más bien, hay varios grados de 'dominio' de un conocimiento, aun con respecto a hechos y conceptos simples- (Schoenfeld, 1985, p.55). Pero, ¿qué significa entender algo? Entender consiste en establecer relaciones o conexiones entre un nuevo conocimiento y otras cosas que conocemos de forma previa (Hiebert et al., 1997).

La construcción de estas relaciones se lleva a cabo a través de los procesos de reflexión y comunicación. La comunicación involucra hablar, escuchar, escribir, demostrar, observar, etcétera. Esto es, participar en una interacción social, compartiendo ideas y escuchando otros puntos de vista. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) asegura que cuando los estudiantes piensan, razonan y comunican sus ideas a otros, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes. Además, escuchar las explicaciones de otros les brinda oportunidades para desarrollar su propio punto de vista. Las conversaciones en las que las ideas matemáticas son exploradas y discutidas, desde múltiples perspectivas, ayuda a los participantes a aguzar sus pensamientos y a establecer conexiones. La reflexión es esencial para el entendimiento, la reflexión se lleva a cabo cuando los estudiantes exploran fenómenos, elaboran conjeturas y justifican resultados. Los profesores debemos entender que reflexionar matemáticamente es un hábito de la mente, y como todos los hábitos debe ser desarrollado a través del uso constante en muchos contextos.

Un recurso para construir conexiones y reflexionar en matemáticas lo constituyen las tareas con múltiples soluciones (TMS), ya que uno de los mejores medios para desarrollar conexiones entre diferentes conocimientos matemáticos consiste en buscar caminos diferentes para resolver un mismo problema. De esta forma, los estudiantes aprenderán a construir herramientas matemáticas que puedan usar de manera flexible, adaptarlas a nuevas situaciones y usarlas para aprender cosas nuevas.

La literatura de investigación en educación matemática se ha interesado en determinar cómo el abordar tareas con múltiples soluciones puede favorecer el desarrollo del entendimiento matemático. Por ejemplo, para Santos-Trigo (2007), la consideración de múltiples soluciones favorece el que los estudiantes pongan en práctica diversos elementos del pensamiento matemático. Por su parte, para Ainsworth, Wood y O'Malley (1997), la orientación del profesor es fundamental para que los estudiantes produzcan más soluciones de las que proponen usualmente. Mientras que Leikin y Lev (2007), utilizaron tareas con múltiples soluciones como una herramienta para examinar la creatividad matemática en escolares con diferentes niveles de desempeño académico.

En otros trabajos, se ha tratado de identificar el efecto de usar tecnología y tareas con múltiples soluciones. Al respecto Kordaki y Mastrogiannis (2006), se enfocaron en el potencial de las TMS como proveedoras de una gran variedad de herramientas de aprendizaje, utilizando software. En un contexto similar Kordaki y Balomenou (2009), los datos mostraron que el carácter dinámico del programa permite a los estudiantes explorar y experimentar, así como buscar más de una estrategia de solución.

Con base en la revisión de la literatura se pudo identificar que la investigación en torno al papel de las tareas con múltiples soluciones como medio para apoyar a que los estudiantes desarrollen una forma matemática de pensar es un área de indagación relevante. Así, el objetivo general de esta investigación es documentar y analizar las diversas rutas de solución que construyen estudiantes de quinto grado de primaria para resolver problemas en contextos de la vida real, con la finalidad de determinar en qué medida las tareas con múltiples soluciones (TMS) apoyan la construcción de conexiones entre conceptos o ideas matemáticas y que elementos del pensamiento matemático se promueven al abordar este tipo de tareas.

MARCO CONCEPTUAL

Las matemáticas son la ciencia de los patrones (Steen, 1988), de ahí que el trabajo matemático consista en observar y codificar regularidades en los mundos de los símbolos y objetos matemáticos. De acuerdo con Schoenfeld (1989), es importante que durante el proceso de aprender matemáticas el estudiante se desenvuelva en un medio análogo al de los matemáticos cuando generan nuevo conocimiento disciplinar. Se considera que este escenario es el propicio para que el estudiante desarrolle estrategias y habilidades propias del quehacer matemático. Es decir, aprender matemáticas requiere que el estudiante identifique, seleccione y use estrategias comúnmente utilizadas por los matemáticos al resolver problemas. Además de memorizar o adquirir fluidez para implementar reglas y procedimientos, es importante que los estudiantes desarrollen habilidades para resolver problemas y representar sus ideas en lenguaje matemático (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2014).

Con base en lo expresado anteriormente, durante el proceso de instrucción se busca promover el desarrollo de diversos aspectos del pensamiento matemático y la construcción de un entendimiento conceptual, a través de la resolución de problemas, considerando como problema a una tarea que es intelectualmente significativa para un individuo (Schoenfeld, 1985), es decir un problema es una tarea que representa un reto intelectual, más que dificultades puramente procedimentales o de cálculo.

Durante el aprendizaje de las matemáticas resulta esencial que el profesor utilice tareas de instrucción que permitan a los estudiantes desarrollar elementos esenciales del pensamiento matemático entre los que se encuentra: (a) experimentar, (b) observar relaciones, (c) formular conjeturas, (d) justificar conjeturas, (e) comunicar resultados y (f) formular nuevos problemas, así como generalizar o extender problemas ya resueltos. El llevar a cabo estos procesos permitirá a los estudiantes establecer conexiones entre ideas matemáticas y por ende aprender con entendimiento. Como mencionamos en el primer apartado, consideramos que entender consiste en establecer relaciones o conexiones entre un nuevo conocimiento y otras cosas que conocemos de forma previa (Hiebert et al., 1997). Entendemos un concepto cuando podemos decir qué es y qué no es ese concepto, cuando somos conscientes de sus relaciones con otros conceptos, cuando hemos notado que esas relaciones son análogas a otras relaciones con las que estamos familiarizados, cuando hemos determinado la posición que el objeto definido tiene dentro de una teoría y cuáles son sus posibles aplicaciones (Sierpinska, 1992) Existen dos procesos centrales en la construcción de relaciones significativas entre un nuevo conocimiento y nuestros conocimientos previos, la reflexión y la comunicación. La comunicación involucra hablar, escuchar, escribir, demostrar, observar, etc. Mientras que la reflexión se lleva a cabo cuando los estudiantes exploran fenómenos, elaboran conjeturas y justifican resultados.

Para lograr un aprendizaje con entendimiento existen cinco dimensiones que trabajan en conjunto para permitir un ambiente de aprendizaje y que le permitirán al profesor facilitar el entendimiento matemático. Estas dimensiones son: a) la naturaleza de las tareas, b) el rol del profesor, c) la cultura social del salón de clases, d) el tipo de herramientas matemáticas, y e) la accesibilidad para aprender matemáticas que se ofrecen en el salón de clase.

Las características de las tareas que cada profesor implemente determinan el tipo de aprendizaje que los estudiantes logran construir. De ahí la importancia de diseñar e implementar tareas que representen verdaderas situaciones problemáticas, que permitan al estudiante conectar lo que conoce con un nuevo conocimiento; es decir, que favorezcan el desarrollo de formas matemáticas de pensar. Además, el profesor debe promover la construcción de un ambiente que ofrezca oportunidades para aprender, lo que implica permitir el trabajo individual y en pequeños grupos. En este contexto, uno de los caminos que ha mostrado ser útil para el desarrollo de conexiones entre conocimientos e ideas matemáticas son las tareas con múltiples soluciones (TMS). Es decir, problemas en los que explícitamente se pide a los estudiantes buscar diferentes caminos o rutas para llegar a la solución. También resulta relevante utilizar tareas que tiene múltiples respuestas (TMR), ya que las mismas son más cercanas a los problemas que aparecen en la vida cotidiana, donde la selección de la ruta o camino de solución requiere generalmente de realizar consideraciones extra-matemáticas. En este trabajo entenderemos por “respuesta de una tarea” a la información (incógnita) solicitada en el problema, mientras que una “solución” está integrada por una respuesta y una justificación de porqué la respuesta es correcta (Lithner, 2008).

Dos o más rutas de solución son diferentes si se utilizan: (a) diferentes definiciones o representaciones de un concepto matemático; (b) diferentes niveles de jerarquía, expresados al considerar una idea como un caso especial de una idea más general; (c) diferentes herramientas y teoremas matemáticos de un mismo tópico matemático; y (d) diferentes herramientas y teoremas matemáticos de diferentes ramas de las matemáticas. (Leikin Levav-Waynberg, Gurevich &Mednikov, 2006).

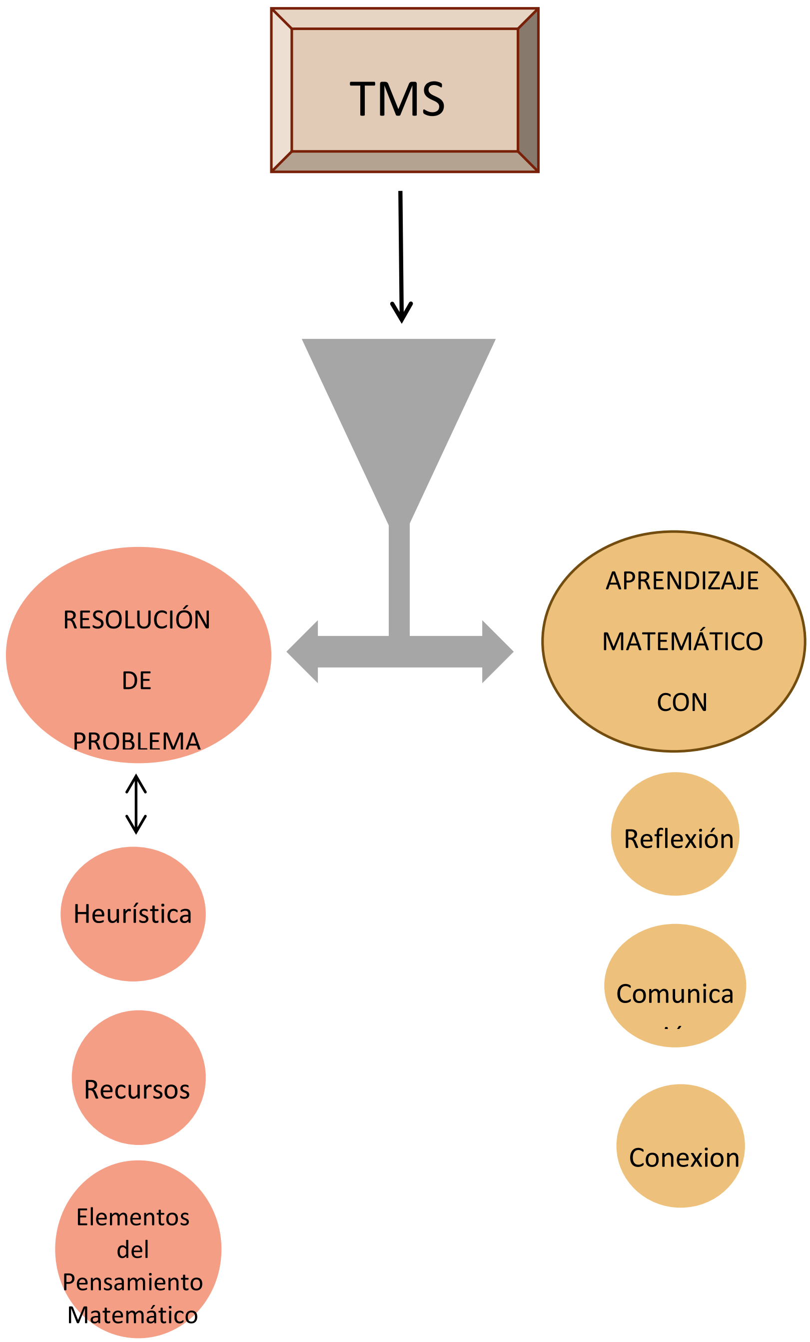
TMS
RESOLUCIÓN
DE
PROBLEMA
APRENDIZAJE
MATEMÁTICO
CON
Heurística
Recursos
Elementos del Pensamiento Matemático
Reflexión
Comunica
Conexion

Figura 1. Integración de los elementos del marco conceptual

Cuando se trabaja con tareas con múltiples soluciones se obtienen por un lado mejores estrategias para la resolución de los problemas, al hacer uso de heurísticas, de diferentes herramientas, al experimentar, justificar resultados, comunicarlos lo que nos lleva a hacer conexiones y a reflexionar logrando así, un aprendizaje matemático con entendimiento. No se está hablando de un proceso que tiene un principio y un final, hablamos de un proceso cíclico en el que a cada momento el estudiante transita por diferentes niveles de entendimiento.

Metodología

Los participantes en esta investigación son estudiantes de 5° grado de primaria en un colegio privado de la ciudad de Pachuca, Hidalgo. Las edades de los estudiantes se encuentran en un rango de 10 y 11 años. El nivel socioeconómico de los estudiantes es alto. La investigadora es profesora regular de este grupo de estudiantes y fue ella quien implementó las actividades.

En esta investigación se trabajó con tres tareas pero por cuestiones de espacio sólo se habla de una de ellas, llamada “Bolsa de chocolates”. Estas tareas estaban relacionadas con la vida cotidiana y estaban pensadas para que representaran un reto intelectual para los estudiantes y no solamente dificultades algorítmicas o de cálculo. Se trabajó una por semana en las dos primeras se trabajó en parejas y en la última en pequeños grupos; para obtener evidencias del trabajo realizado por los estudiantes se grabó un video panorámico, además de las preguntas y comentarios individuales de los estudiantes en los que se enfoca la investigación. Por otro lado, las tareas con las que se llevó a cabo la investigación son tareas para las cuales es posible diseñar varios métodos de solución, y están diseñadas con el objetivo de fomentar un aprendizaje con entendimiento. Para la recolección de la información se dispuso de los trabajos escritos de los estudiantes, y las grabaciones de video o audio. Las grabaciones se transcribieron y se identificaron aquellas porciones de las transcripciones que aportan evidencia del establecimiento de conexiones, así como la puesta en práctica de los diferentes aspectos del pensamiento matemático que son de interés para la investigación.

Tarea 2: El profesor de Educación Física organizó las competencias Columbia en las que resultó ganador el equipo Azul gracias a 3 estudiantes de 5° grado. Los premios son tres bolsas de chocolates *Ferrero* una con 3/4 de kilogramo, otra con 5/6 de kilogramo y la última con 3/8 de kilogramo. Si les diera a escoger a cada uno de los ganadores, ¿cuál escogerían?

Explica, ¿por qué escogerías esa bolsa y cómo decidiste escoger dicha bolsa?

RESULTADOS

Al trabajar con este tipo de tareas los estudiantes tuvieron que buscar más de una ruta de solución, es decir, utilizaron diferentes representaciones de conceptos matemáticos y diferentes herramientas, tal como lo mencionan Leikin Levav-Waynberg, Gurevich y Mednikov, (2006); claro ejemplo de lo que acabamos de mencionar es el hecho de que cuando se encuentran con alguna dificultad buscan la manera de encontrar otras soluciones u otros caminos para llegar a la solución tal como sucedió con la pareja E1 y E3 al trabajar con la tarea dos porque aunque entendían el problema no sabían cómo demostrar o encontrar cuál bolsa de chocolates tenía mayor cantidad (ver figuras 2 y 3), es decir, pudieron hacer conexiones buscando de lo que ya saben lo que les pudiera servir para encontrar la solución. Así, lo único que resta por decir es que lograron un aprendizaje con entendimiento, tal como lo proponen Hiebert y Carpenter (1992). Por otro lado, una de las ventajas del uso de este tipo de tareas es que los estudiantes deben saber qué operación básica elegir y saber manipularla, como la pareja E5 y E4.

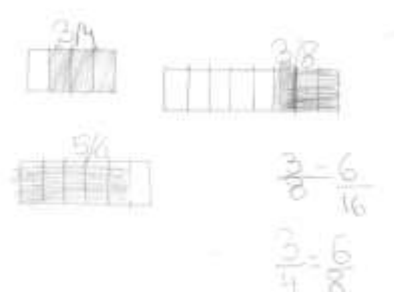

Figura 2. No puede comparar porque la representación de sus enteros no es igual.

Figura 3. Al no poder comparar con esquema se van a convertir a decimales.

Al trabajar con este tipo de tareas los estudiantes pudieron experimentar porque en cuanto leyeron los problemas, la mayoría de ellos, supieron buscar alternativas para la solución, por ejemplo, en la tarea dos al buscar diferentes formas de llegar a la solución. Aprendieron a establecer relaciones porque cuando no pudieron encontrar la solución por el camino que ellos habían planeado, buscaron otra opción y esto es muy claro en la tarea dos de E1 y E3 porque sabían que una forma de comparar las bolsa era obteniendo fracciones equivalentes, aunque no recordaban cómo sacarlas sí estaban seguros de que ese era un camino a seguir; entonces decidieron buscar otra alternativa para saber cuál bolsa tenía mayor cantidad y esa alternativa era un esquema. Justificaron resultados al saber que, por ejemplo, debían usar operaciones aritméticas pero que debían cuidar detalles. Y, finalmente, están aprendiendo poco a poco a comunicar resultados porque aunque todavía no detallan mucho cuando explican sus procedimientos lo intentan. Además las TMS buscan promover esta parte al tener que buscar más de una solución; otra manera de promover la comunicación es organizándolos en parejas y en pequeños grupos para trabajar juntos, puesto que tenían que ponerse de acuerdo para encontrar la solución, dar sus puntos de vista, etcétera.

CONCLUSIONES

Entre las conclusiones más relevantes del trabajo se encuentran que algunos estudiantes al resolver una de las tareas empezaron a hacer operaciones sin tener un objetivo claro, lo que indica que no les están dando sentido; no están estableciendo relaciones entre operaciones y tarea, lo que quiere decir que no hay entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1992) puesto que como creen que resolver un problema significa realizar sólo operaciones entonces las hacen de todo tipo y sin relación alguna con lo que se requiere para la solución. Por otro lado, también se observó un cambio en dos de los estudiantes, quienes mostraban muchas dificultades para entender las ideas matemáticas, al trabajar con actividades con respuesta única y un procedimiento definido. Sin embargo las ideas y formas de trabajo mostradas al abordar las tareas propuestas así como las justificaciones que daban para defender sus puntos de vista, son evidencia de un proceso de reflexión que no habían exhibido con anterioridad. Particularmente, las soluciones gráficas que elaboraron son indicador de una habilidad para aprender y de un cambio de actitud hacia el estudio de la disciplina que pudiera ser considerado un logro al haber desarrollado habilidad para expresar sus ideas mediante lenguaje matemático.

Bibliografía y Referencias

Ainsworth, S., Wood, D & O'Malley, C. (1998). There is more than one way to solve a problem: Evaluating a Learning Environment that Supports the Development of Children's multiplication Skills. *Learning and Instruction*, 8(2), 141-157.

Balomenou, A. & Kordaki, M. (2009). Multiple solution tasks within dynamic geometry systems. *Educatia*, 21(54), 71-78.

Barrera, F. y Reyes, A. (2014). *Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas*. Pachuca: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-100). New York: Macmillan.

Hiebert, J. C. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kordaki, M. & Mastrogiannis, A. (2006). The potencial of multiple-solution tasks in e-learning environments: Exploiting the tools of Cabri Geometry II. *Education*, 2006(1), 97-104.

Leikin, R. y Lev, M. (2007). Tareas con múltiples soluciones como un cristal para observar la creatividad matemática, 3, 161-168.

Levav-Waynberg, A. y Leikin, R. (2006). Resolución de problemas con múltiples soluciones: El conocimiento de los profesores situado en la práctica, 4, 57-64.

Lithner,J. (2008). A research framework for creative andimitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255-276.

Santos Trigo, M. (2007)). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem solving*. Orlando. Fl: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environmental and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research,* 13(1), 71-88.

Sierpinska, A. (1992). Theoretical perspectives for development of the function concept. In E. Dubinsky and G. Harel (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). Washington: The Mathematical Association of America.

Steen, L.A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240, 611-616.