ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA NO CONVENCIONAL CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

ROSA ISELA GONZÁLEZ POLO
INSTITUTO CUMBRES DE TOLUCA
rosaiselag@gmail.com

APOLO CASTAÑEDA
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
apcastane@gmail.com

RESUMEN

Se presentan los resultados de la implementación de un diseño didáctico con estudiantes de secundaria (12-14 años) relativa a la construcción de triángulos, dados tres segmentos donde se analiza la ruptura e instauración del contrato didáctico en la solución de un problema de cálculo de área y perímetro. Para el diseño de la secuencia se consideraron las aportaciones teóricas sobre el contrato didáctico de Brousseau, y el modelo de resolución de problemas de Lester (2013: 258) a partir de los cuales se plantearon actividades de construcción de triángulos con tiras de papel que sirvieron de preámbulo para abordar un problema de cálculo de área y perímetro de un triángulo con magnitudes erróneas. Los resultados muestran que los estudiantes entran en contradicciones, ya que a pesar de concluir ciertas condiciones para las magnitudes de los segmentos de un triángulo y trabajar previamente con problemas sin solución, no pueden reconocer un triángulo con magnitudes erróneas e incluso afirman que es posible obtener el perímetro de tres segmentos de una figura que no es cerrada.

Palabras clave: resolución de problemas; geometría; educación secundaria obligatoria.

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes asumen sin cuestionar que todos los problemas que les propone el profesor tienen solución, lo cual no es necesariamente cierto. La incertidumbre aún es mayor cuando se trata de problemas no-estándar, esto es, aquellos problemas que rara vez reciben atención en el currículo escolar (Schoenfeld, 1985: 2). De acuerdo a Santos (1992) los problemas no rutinarios son aquellos que cuentan con varios métodos de solución o que requieren para su solución más que la aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos, además afirma que su uso puede constituir un recurso natural para discutir actividades que ilustren el uso de conjeturas, contraejemplos, aproximaciones. (Hernández, 2014).

D'Amore y Martini (1997) exponen que un aspecto relevante en la resolución de un problema es la elección o planteamiento de la operación, a partir de esto se desprenden los cálculos que se van a realizar. De acuerdo a esta investigación, los estudiantes no reflexionan sobre el texto o descripción del problema ya que la prioridad es encontrar un determinado valor, por lo que no hay un control crítico. Al respecto Nesher (1980) señala que los estudiantes, más que contextualizar el planteamiento del problema, buscan la inferencia directa de la operación matemática necesaria, tal como lo señala Kilpatrick (1987) al comentar que el contexto de problemas aritméticos provoca en los estudiantes una actitud resoluta, es decir, se enfocan en plantear operaciones y obtener un resultado a una "no-pregunta".

El propósito de este trabajo es presentar evidencias sobre la ausencia de una metareflexión en la actividad del estudiante asociada a la aparición del fenómeno de contrato didáctico, en el que se analiza una doble ruptura-instauración, la resistencia para romper el contrato y las contradicciones que se generan al intentar responder a un problema sin solución. El tema abordado en la secuencia didáctica fue la construcción de triángulos, y la implementación del diseño se realizó con estudiantes de segundo grado de secundaria, edades de 12-14 años.

PERSPECTIVA TEÓRICA

La resolución de problemas

Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan que en el contexto escolar son importantes las normas que rigen las obligaciones de los alumnos y el profesor respecto a un proyecto de estudio, se trata de cláusulas que evolucionan a medida que avanza el proceso didáctico, a esto Guy Brousseau le denominó contrato didáctico.

En el reporte de Education Committee of the EMS (2012) se presentan varios episodios de trabajo escolar que documentan la existencia del contrato didáctico. Uno de estos casos es un problema que se presenta bajo el nombre de *la edad del capitán*, el cual enuncia: en un barco hay 26 ovejas y 10 cabras, ¿Cuál es la edad del capitán? Las investigaciones que exploraron las respuestas de este problema (como la de Verschaffel, Greer y de Corte, 2000) señalan que la gran mayoría de los alumnos realizan cálculos para determinar un valor a través de alguna operación como suma o resta, sin que sea cuestionada la estructura del problema, es decir, confían en que el profesor ha asignado un problema correctamente ya que sería extraño que un ejercicio no tuviera solución.

El término contrato didáctico fue propuesto por Brousseau para explicar comportamientos específicos de los estudiantes cuando responden a un planteamiento matemático para cumplir, con lo que creen, se espera de ellos por parte del profesor, en lugar de hacer frente al planteamiento asignado. El contrato didáctico tiene obligaciones recíprocas y se establece como resultado de una negociación a menudo implícita que acontece en el ámbito del aula, en el contexto de una institución y un sistema educativo, pero de acuerdo a Brousseau este contrato no puede mantenerse permanentemente en el aula ya que al evolucionar en la clase se generan contradicciones.

METODOLOGÍA

Diseño de la actividad

Se diseñó una actividad didáctica con el tema de *construcción de triángulos,* dirigida a estudiantes de secundaria (de un rango de edad de 12 a 14 años). La actividad propone en lo general, analizar las relaciones de orden de las magnitudes de los segmentos que permiten la construcción de un triángulo. En esta actividad se emplean tiras de papel de magnitudes dadas, con el propósito de que los estudiantes formen un triángulo con las tiras y lo peguen en las hojas de trabajo. Con el uso de este material los estudiantes pueden realizar combinaciones en el acomodo de las tiras, cerciorarse de la posibilidad de construir un triángulo dados tres segmentos y determinar las condiciones y las relaciones de orden de los segmentos para formar el triángulo. Se plantea también un problema del cálculo de perímetro y área con datos erróneos en las magnitudes de un triángulo (magnitudes no proporcionales a las dimensiones de los lados) con el propósito de motivar una reacción en el estudiante al momento de operar con las magnitudes de los lados.

La actividad consta de 7 secciones, cada sección tiene planteamientos que se numeran consecutivamente. En la sección 1 (S1) se presentan cuatro planteamientos, donde se indican para cada caso, tres magnitudes diferentes, el estudiante debe comparar el resultado de la suma de dos de las magnitudes respecto de la tercera. En esta parte de la actividad se pretende que el estudiante observe la regularidad del resultado y concluya que la suma de dos lados de un triángulo siempre es mayor que el lado restante. Los planteamientos S1-1 y S1-2 cumplen esta condición, los planteamientos S1-3 y S1-4 no lo cumplen, en estos casos no es posible construir un triángulo con las magnitudes dadas.

Con las magnitudes dadas en la sección 1, el estudiante debe construir para cada caso, un triángulo con las dimensiones señaladas usando tiras de papel (sección S2). La intención es que reconozca que, con las magnitudes de los planteamientos S2-1 y S2-2 es posible construir un triángulo y en los casos S2-3 y S2-4 no se puede.

En la sección 3 (S3) se plantean dos interrogantes que tienen el propósito de promover una reflexión sobre lo realizado. La primera (S3-1) cuestiona la posibilidad de construir los triángulos con los segmentos dados y la segunda (S3-2) cuestiona lo analizado en la comparación de magnitudes de los segmentos.

La sección 4 (S4) plantea un problema de cálculo de área (S4-1) y perímetro (S4-2), en ella se muestra la imagen de un triángulo cuyos lados no son proporcionales a las magnitudes y estas magnitudes no permitirían formar un triángulo. Se propuso este problema con la intención de que los estudiantes cuestionen y refuten el planteamiento con base en lo analizado previamente. Por otra parte, este problema tiene la intención de observar la existencia del contrato didáctico y su eventual ruptura. En el primer caso es posible que los estudiantes asuman que el problema está correctamente planteado y no cuestionen su estructura, por lo que se espera que respondan al problema y obtengan un valor de área y perímetro aun cuando las magnitudes de los lados del triángulo no sean correctas. También se espera que los estudiantes cuestionen las magnitudes (al recuperar las ideas analizadas en la sección 2) y adviertan que las magnitudes asignadas al triángulo no son correctas, haciendo imposible el cálculo de su área.

En la sección 5 (S5) se plantea la construcción de un triángulo con las dimensiones señaladas en la sección anterior usando tiras de papel. La intención es que los estudiantes confirmen que no es posible construir el triángulo y en consecuencia, no es posible obtener su área y perímetro. Se espera que los estudiantes que hayan obtenido un valor del área y perímetro lleguen a una contradicción y concluyan que no puede existir un triángulo con las magnitudes señaladas, por lo que no tendría sentido el cálculo de área y perímetro. Por otra parte, los estudiantes que hayan advertido la inconsistencia en la sección 4 podrán, confirmar su observación al constatar que no se puede construir un triángulo con las tiras de papel.

La sección 6 (S6) se plantean siete interrogantes, todas estas preguntas tienen el propósito de favorecer una reflexión sobre lo realizado en las secciones 4 y 5. La pregunta S6-1 cuestiona si es posible construir el triángulo referido en el cálculo de áreas. Las preguntas S6-2/S6-3 cuestionan si es posible calcular el área del triángulo de la sección tres, las preguntas S6-4/S6-5 cuestionan si es posible calcular el perímetro. La pregunta S6-6 plantea si es posible que el triángulo presentado en la sección 4 exista y la pregunta S6-7 solicita al estudiante proponer magnitudes de segmentos para que no se pueda construir un triángulo.

La sección 7 (S7) también tiene la intención de favorecer una reflexión considerando la actividad en su totalidad. Se solicita al estudiante que escriba una conclusión sobre la comparación de dos segmentos respecto a un tercero para que un triángulo se pueda construir.

Consideraciones sobre la resolución de problemas

En la elaboración de la sección 4 (S4) se integraron las aportaciones teóricas sobre resolución de problemas y se construyó el modelo de la *Figura 1*. Se consideró lo mencionado por Lester, en relación a la coordinación de experiencias previas al plantear una secuencia que involucra conocimientos previamente estudiados: segmentos, triángulos, medidas de área y perímetro (A). También se atendió lo señalado por Santos sobre la importancia de que los estudiantes reflexionen y cuestionen la estructura del problema que resuelven (D) al agregar preguntas y cuestionamientos adicionales al problema (S5). Se atendió lo señalado por Lester sobre el uso de heurísticas al considerar actividades previas (S1) que promueven la identificación de un patrón general de comportamiento. En el diseño de la actividad se consideró la edad y los conocimientos previos de los estudiantes (Schoenfeld, 1985) ya que se usó material tangible a fin de proporcionar a los estudiantes un referente concreto para visualizar y analizar las magnitudes de los segmentos en la construcción del triángulo.

El planteamiento del problema (B) aparece de forma explícita en la hoja de actividades, se indican también las magnitudes de los lados del triángulo y su altura (C). Para resolver el problema se podrían utilizar las fórmulas de la medida del área y perímetro (E), esto implica identificar en el triángulo las magnitudes necesarias para sustituirlas en las fórmulas (F) y realizar los cálculos necesarios (G) para obtener la medida del área y perímetro (F). El resultado se contrasta con el contexto inicial del problema (A) para asegurar su pertinencia. Dado que el problema presenta un triángulo con magnitudes falsas se espera que los estudiantes identifiquen las magnitudes (C) y reinterpreten el sentido del problema (D) a partir de lo analizado previamente en S1 y concluyan que no es posible calcular el valor del área y perímetro. En la figura 1 aparecen las secciones de la resolución de S4.

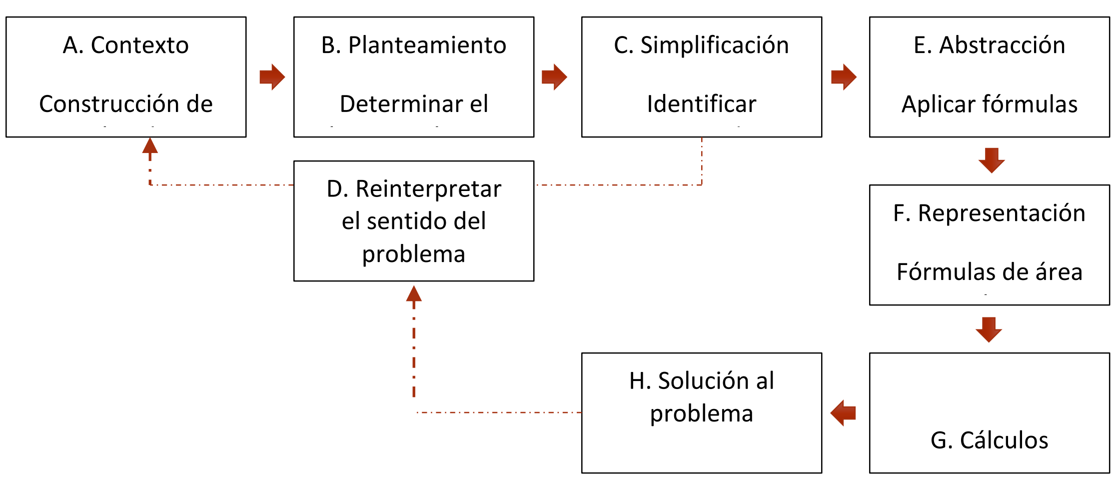

***Figura 1*. Esquema del modelo de resolución del problema S4**

Consideraciones sobre el contrato didáctico

En S4 se presenta un problema con datos erróneos que no puede ser resuelto. Sin embargo, de acuerdo a los antecedentes revisados, es probable que varios estudiantes resuelvan el problema a consecuencia de la aparición de un contrato didáctico. Se le pedirá el estudiante construir los triángulos con trozos de papel (S5) para confrontar su idea sobre la existencia del triángulo como una forma de romper el contrato al observar que el problema anterior tiene una figura con magnitudes que no forman un triángulo y por lo tanto no se puede resolver.

Implementación

La secuencia didáctica se implementó durante el tiempo regular de clase de matemáticas en una sesión de 50 minutos a un grupo de 37 estudiantes de segundo grado de secundaria (nivel básico, 12-14 años de edad). Se les proporcionó una hoja de actividades para cada estudiante y tiras de papel para la actividad S1y S5.

El profesor titular coordinó la actividad. En la primera fase los estudiantes trabajaron de forma individual y en la segunda, realizaron una plenaria para compartir sus resultados. Los estudiantes ya habían trabajado previamente con el tema de *triángulos* durante las primeras semanas de ciclo escolar. La implementación fue realizada en las últimas semanas del ciclo escolar y se utilizó como preámbulo para el estudio del tema de *simetría* donde también se trabaja con distintos tipos de triángulos. El programa de estudios (Secretaría de Educación Pública, 2011) agrupa los temas del segundo grado en 5 grandes bloques, cada bloque con tres ejes: “sentido numérico y pensamiento algebraico”, “forma espacio y medida” y “manejo de la información”. El tema de *triángulos* se estudia desde el nivel primaria (estudiantes con edades de 6 hasta 12 años), por lo que no se consideró necesario diseñar una actividad introductoria.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la actividad S2 se observó la existencia de un contrato didáctico ya que los estudiantes se enfrentaron a la construcción de cuatro triángulos con segmentos de papel dados, en los dos últimos casos los segmentos no cerraban la figura, sin embargo se observó que los estudiantes forzaban los trozos de papel para formar un triángulo. Se pudo constatar que los estudiantes no dudaron del planteamiento de la actividad y no admitieron la posibilidad de que la actividad podría no resolverse.

Se promovió la ruptura del contrato didáctico con el planteamiento S3 donde se preguntó si era posible construir todos los triángulos con los segmentos dados, el resultado fue que el 100% de los estudiantes concluyeron *no*.

En el planteamiento S3-2, algunos estudiantes concluyeron que se requería aumentar la magnitud de los segmentos *para que cerrara* el triángulo y no reconocieron explícitamente las relaciones de magnitud en los lados del triángulo.

En este punto, la ruptura del contrato representa un antecedente para abordar el planteamiento S4, y se anticipa que la actividad tiene preguntas que no tienen necesariamente respuesta. En el problema S4 se pide calcular el valor del área y perímetro de una figura cuyas magnitudes no permitirían formar el triángulo, pero como se observó ningún estudiante cuestionó este hecho, y se involucraron directamente a los cálculos para obtener el valor numérico del área y perímetro (*delegación formal*) esto muestra la existencia de un segundo contrato didáctico, cuya ruptura se promueve con el planeamiento S5 donde los estudiantes se enfrentan a la construcción del triángulo con tiras de papel con las medidas del triángulo de S4. El 100% de estudiantes concluyen que el triángulo del problema S4 no existe y no se podría tener un valor del área y perímetro. Sin embargo observamos la resistencia a la ruptura del contrato pues en S6-4 admiten que aunque no se puede construir el triángulo, su perímetro si existe.

A partir de lo anterior observamos que un contrato didáctico presenta resistencia a su ruptura, aun cuando los estudiantes se enfrentan a contradicciones. Se observó que ninguno de los estudiantes cuestionó las magnitudes del triángulo del problema de S4, por lo que concluimos que no hubo una reflexión sobre el contexto del problema.

El tratamiento de problemas no convencionales, por ejemplo aquellos que no se pueden resolver, no suelen abordarse con frecuencia en el aula, por lo que los estudiantes fortalecen la idea de que todo planteamiento del profesor tiene un solución a la que están obligados a arribar, esto forma parte de un contrato didáctico entre el profesor y los estudiantes, y como lo hemos observado, inhibe la reflexión sobre el contexto y las características del problema, ya que los estudiantes se enfocan únicamente en el cálculo operatorio para la búsqueda de un valor numérico.

Sin embargo, constatamos que no es suficiente enfrentar a los estudiantes con problemas sin solución, ya que como reportamos en la implementación de la secuencia, las últimas dos actividades de S2 relativas a la construcción de triángulos con segmentos dados, no permiten cerrar las figuras por lo que no era posible construir los triángulos. Aunque los estudiantes reconocieron la existencia de planteamientos sin solución en el contexto de la secuencia, los estudiantes no cuestionaron el problema S4.

Una contribución de esta investigación fue documentar la doble ruptura e instauración del contrato didáctico, se observó que aun cuando algunos estudiantes estaban en contradicción con sus respuestas mantenían como válido el planteamiento inicial del problema.

Así también se constató que el contrato didáctico obstaculiza el proceso de solución de un problema en términos del esquema de Lester (2013) debido a que el estudiante no necesariamente vuelve al contexto inicial para reinterpretar en sentido del problema, sino que se involucra directamente en los cálculos operatorios tal como lo señalan D'Amore y Martini (1997). Se hace necesario que los currículos matemáticos favorezcan escenarios de aprendizaje que permitan al estudiante generar reflexiones sobre los procesos del quehacer matemático para que vaya más allá de la memorización de reglas o fórmulas para resolver determinados problemas.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE/Horsori.

D'Amore, B. y Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. Revista de didáctica de las matemáticas. 32, 26-42

Education Committee of the EMS (2012). What are the Reciprocal Expectations between Teacher and Students? Solid Findings in Mathematics Education on Didactical Contract. Newsletter of the European Mathematical Society, 84, pp. 53-55.

Hernández, J.A. (2014). Análisis del discurso de argumentación de estudiantes en la solución de una actividad matemática. Tesis inédita de maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, CICATA-IPN, México

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education. pp. 123-147. Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem solving instruction. The Mathematics Enthusiast, 10 (1 y 2), 245-278.

Nesher, P. (1981). The stereotyped nature of word problems. For the learning of mathematics, 1(1), 41-48

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL, USA: Academic Press.

Secretaría de Educación Pública (2011). Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro, Educación Básica Secundaria, Matemáticas 1, Educación básica. México: SEP.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. The Netherlands: Swets & Zeitlinger.