



# RETOS Y OPORTUNIDADES DE EDUCACIÓN EN EL PENSAMIENTO INFERENCIAL ESTADÍSTICO

**BLANCA R. RUIZ HERNÁNDEZ**

TECNOLÓGICO DE MONTERREY  
bruiz@itesm.mx

**JOSÉ ARMANDO ALBERT HUERTA**

TECNOLÓGICO DE MONTERREY  
albert@itesm.mx

## RESUMEN

La presente investigación aborda el problema de la educación en el pensamiento estadístico inferencial de estudiantes universitarios. Tradicionalmente la probabilidad y estadística se ha impartido de acuerdo a una secuencia lógico ascendente de dificultad y complejidad conceptual, parece obvio que así debe ser, pero lo cierto es que esta manera consume mucho tiempo y no potencia la interrelación de conceptos ni los espacios para el desarrollo de ideas germinales de inferencia estadística desde los inicios de un curso. En este trabajo se pretende aportar elementos útiles para el diseño de nuevas propuestas didácticas a explorar en el salón de clase.

**Palabras clave:** Razonamiento inferencial, educación estadística, pensamiento estadístico

## INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones ponen énfasis en las dificultades que enfrenta la enseñanza de la estadística para lograr que los estudiantes adquieran un verdadero razonamiento inferencial (Rodríguez, Albert y Agnelli, 2009). Algunas de estas dificultades se derivan de que, en su mayoría, los currículos universitarios introducen la inferencia estadística únicamente después de haber enseñado probabilidad y funciones de probabilidad más o menos formalmente, siguiendo un orden, más o menos, axiomático y de manera aislada (Ruiz, 2014). De acuerdo con Aliaga y Gunderson (2006) y Ruiz (2014) la integración de conceptos relacionados con inferencia estadística se podría fomentar desde el inicio de los cursos introductorios a probabilidad y estadística, guiando el estudio de la estadística descriptiva y los modelos probabilísticos a través de la inferencia informal y del razonamiento estadístico.





Aliaga y Gunderson (2006) sugieren que los conceptos vinculados con la toma de decisiones y que normalmente se tocan hasta el final del curso introductorio, tales como hipótesis nula y alternativa, error tipo I y II, nivel de significancia, potencia de la prueba o región de rechazo, sean definidos al inicio del mismo. Esto tiene la ventaja de que estos conceptos pueden ser retomados a lo largo del curso, sin embargo, tal aparato conceptual en su inicio puede ser apabullante para los estudiantes además de que su propuesta se enmarca en un contexto probabilístico desvinculado de los datos. Makar, Bakker y Ben-Zvi (2011) recomiendan introducir el razonamiento inferencial desde estadística descriptiva sumergiendo a los estudiantes en problemas bajo incertidumbre que inciten discusiones alrededor de la evidencia que proporcionan los datos a favor o en contra de una hipótesis. Propone la inferencia informal como una forma de fomentar el análisis crítico de los datos a partir de la comparación de dos muestras.

El proyecto “Transformando la educación estadística desde un enfoque inferencial” (Albert, Ruiz, Tobías y Villarreal, 2014) se propone la inserción temprana de conceptos de la inferencia estadística en distintos momentos del curso de manera tal que las concepciones iniciales de los estudiantes se enriquezcan y resignifiquen conforme las ideas se retoman a lo largo del curso hasta su formalización en estimación por intervalo y pruebas de hipótesis. Este proyecto está dando lugar a distintas investigaciones sobre el desempeño de los estudiantes cuando se insertan ideas de inferencia estadística en distintos momentos del curso, así como reflexiones epistemológicas sobre el razonamiento inferencial. En este trabajo se muestra una aproximación epistemológica para el desarrollo de ideas dirigidas hacia la inferencia estadística a través de potenciar las ideas germinales que la sostienen en un curso universitario introductorio a la probabilidad y estadística.

## **ACERCAMIENTO TEÓRICO-METODOLÓGICO**

Partiendo del marco referencial de la explicación sistémica del fenómeno didáctico (Cantoral, Farfán, Lezama y Sierra, 2006), donde se considera que éste no puede comprenderse de manera aislada sino en la interacción de diversas dimensiones, se procedió a hacer un análisis preliminar sobre la inferencia estadística. Un primer acercamiento fue el epistemológico disciplinar para identificar las ideas pilares de la inferencia estadística y de su posible secuencia lógica conceptual. El segundo fue un acercamiento epistemológico histórico para identificar momentos críticos del desarrollo de las ideas de inferencia estadística que diera una visión diferente del





problema de *conocer* la inferencia. Luego se hizo una aproximación didáctica con los libros de texto para identificar la secuencia común de cómo es abordada la inferencia estadística y la forma en que actualmente vive en la escuela. Finalmente, se analizaron los distintos momentos potenciales del curso en donde pueden introducirse ideas germinales de inferencia estadística. El resultado de estas reflexiones pretende ser el sustento del diseño de una futura intervención didáctica en el currículo de un curso introductorio universitario.

### **APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA**

Desde esta perspectiva, se observó que la inferencia estadística se sustenta de una gran cantidad de conceptos de probabilidad, muestreo aleatorio y de estadística propiamente, pero también en una complejidad lógica-interpretativa de los resultados (nivel de confianza, nivel de significancia, valor  $p$ , probabilidad de cometer Error tipo I, entre otros) debida a su singular característica de estar vinculada a fenómenos aleatorios y situaciones bajo incertidumbre y de toma de decisiones. Desde la perspectiva histórica se pudo constatar la presencia de dos distintas tradiciones, la frecuencial y la bayesiana, no siempre conciliables en sus planteamientos e interpretaciones.

Desde una perspectiva frecuencial existen, a su vez, dos tradiciones: por un lado la de Ronald A. Fisher (1890-1962) y, por el otro, la de Jerzy Neyman (1894-1981) y Egon S. Pearson (1895-1980), que hacen que actualmente en las pruebas de hipótesis coexistan razonamientos distintos para la inferencia y toma de decisiones, no siempre totalmente compatibles. Así Fisher que se centra en probar si la evidencia difiere o no significativamente de un valor fijo hipotético. Si la diferencia es muchas veces mayor que el error estándar, se considera significativa para rechazar la hipótesis original. Fisher deja más o menos abierto el criterio de rechazo, aunque ya habla de algunas convenciones como: “es un convenio adecuado tomar dos veces el error estándar como límite de significación” (Fisher, 1949, p. 106) como se observa en la figura 1. También hace hincapié tanto en el número de desviaciones estándar de la media poblacional hipotética a la media obtenida en la muestra como en el valor  $p$  como parámetros para medir la lejanía de la media de la muestra a la media hipotética poblacional.



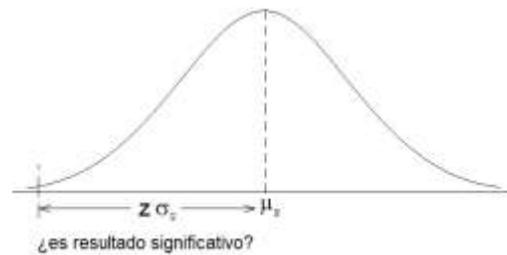


Figura 1. Esquema de la prueba de significación de Fisher

A comienzos de la década de los treinta, Neyman y Pearson desarrollaron un aporte a la teoría introduciendo dos hipótesis, a las que llamaron Hipótesis Nula ( $H_0$ ) e Hipótesis Alternativa ( $H_1$ ). También incorporaron los llamados Errores tipo I y II, así como la idea de buscar el test con un alto valor de potencia ( $1 - \beta$ ), para un determinado valor de significación  $\alpha$ . Neyman y Pearson establecen que el criterio de rechazo debe definirse previamente a la realización de la prueba y buscan decidir entre dos posibilidades. A la aproximación introducida por Fisher se le denomina *prueba de significación* y a la introducida por Neyman y Pearson, *contraste de hipótesis*. Ambas no se distinguen entre sí en los cálculos, pero sí en su filosofía y objetivos (Batanero, 2013).

Por otra parte, en los últimos años, el auge de las computadoras ha hecho que el enfoque bayesiano de la inferencia estadística tenga gran influencia. Desde esta perspectiva el parámetro  $\mu$  es considerado una variable aleatoria, se retoma el Teorema de Bayes como fundamento y asigna probabilidades a las hipótesis.

Este breve estudio muestra la complejidad epistemológica que subyace en la Inferencia Estadística.

## **APROXIMACIÓN DIDÁCTICA**

Los contenidos de los primeros cursos universitarios de probabilidad y estadística generalmente están dirigidos a desembocar en la inferencia estadística como herramienta en la toma de decisiones. El desarrollo natural de dichos contenidos en la enseñanza sigue una secuencia temática compartimentalizada en un orden axiomático deductivo que comienza con probabilidad y concluye con estimaciones puntuales y por intervalo y pruebas de hipótesis, pasando por distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas. Generalmente las





distribuciones del muestreo se tratan en paralelo con inferencia estadística como un sustento de ésta. La estadística descriptiva suele tratarse previamente (o inmediatamente después de probabilidad) y con escasa conexión con los temas siguientes. Dan por supuesto que el último tema, por su complejidad, requiere de todos los anteriores (Devore, 2011; Montgomery y Runger, 2008).

Por otra parte, no podría ignorarse que distintos reportes de investigación, muestran las dificultades estudiantes en inferencia estadística por su complejidad y reducidos tiempos didácticos en que es abordada (Vallecillos, 1999). En particular su confusión entre estadísticos y parámetros y sus errores de interpretación de las conclusiones y del valor  $p$  (Rodríguez, Albert y Agnelli, 2011).

Se puede decir que fenómeno didáctico generado en la clase al buscar que los estudiantes aprendan inferencia estadística es complejo y enfrenta muchas dificultades, en ese sentido se necesita explorar nuevas formas de enseñanza que permitan a los estudiantes un mayor nivel de razonamiento y comprensión de la inferencia estadística.

## **ESTRUCTURA DE DISEÑO**

Entre las propuestas de enseñanza que abordan esta problemática, sobresalió la propuesta de Aliaga y Gunderson (2006), de la Universidad de Michigan. Ellas introducen las ideas de inferencia estadística al inicio del curso, sin embargo, su estrategia no considera las distintas etapas evolutivas de esas ideas a través del mismo. En ese sentido, el grupo buscó identificar los distintos momentos didácticos de un curso de Estadística y de hallar espacios propicios para el desarrollo de ideas tempranas de inferencia estadística. Se concluyó que es posible desarrollar ideas germinales de estadística inferencial paralelamente al desarrollo de un curso universitario introductorio a estadística, en cuatro momentos: Estadística descriptiva, Probabilidad, Distribuciones y Distribuciones del muestreo.

### **En Estadística descriptiva**

La estadística descriptiva es un tema que muchos autores minimizan y reducen a una serie de definiciones, gráficos y fórmulas de medidas de centralización, dispersión y posición. Sin embargo, vista como análisis exploratorio de datos, puede ser también un poderoso detonador de ideas de estadística inferencial a través de abordar en su forma germinal los conceptos de:





- Toma de decisiones. Se trata de contextualizar situaciones donde se tiene que tomar una decisión con base a evidencia empírica.
- Hipótesis nula e Hipótesis alternativa. En esta primera etapa el estudiante puede aprender a distinguir la hipótesis de investigación de la hipótesis estadística. Y de ésta última, aprende a plantear narrativamente la hipótesis del investigador versus la hipótesis establecida con relación al parámetro de una variable.
- Errores tipo I y tipo II. En esta etapa, los estudiantes aprenden que en la toma de decisiones hay siempre riesgo a equivocarse. Describen con palabras los tipos de errores que pueden cometerse en situaciones específicas, según la decisión que se tome y decir qué error es más importante no cometer según el contexto.
- Intervalos con desviaciones estándar alrededor de la media. No es común que en este estadio de su aprendizaje se les pida construir intervalos alrededor la media de la muestra utilizando desviaciones estándar de la muestra, pero se fomenta la idea de variación, así como de margen de error alrededor de la media.
- Intervalos con percentiles. Esta idea también es valiosa desde este estadio de su aprendizaje pues resulta ser un detonador de otras como intervalos de probabilidad en distribuciones y con intervalos de confianza en inferencia estadística.
- Datos atípicos. ¿Qué significa cerca o lejos de la media? Conviene no definir datos atípicos como receta sino abrir una discusión sobre la subjetividad de este concepto (depende de la situación y de la comunidad de científicos lo que se entenderá por atípico en una población) con el propósito de sentar un antecedente de lo que más adelante se abordará como resultado significativo, concepto fundamental en la inferencia estadística.

### **En probabilidad**

Es posible desarrollar algunas ideas germinales de inferencia estadística desde probabilidad como:

- Condicionalidad del Error tipo I y Error tipo II. Vallecillos (1999) reporta que una de las dificultades frecuentes en la inferencia estadística es que los estudiantes no ven la condicionalidad en los Errores tipo I y tipo II, lo que lleva a una mala interpretación de los mismos.





En esta etapa de su aprendizaje puede ejercitarse en la parte lógica de  $P(\text{Error tipo I})$  como probabilidad de rechazar  $H_0$ , dado que  $H_0$  es cierta y  $P(\text{Error tipo II})$  como probabilidad de aceptar  $H_0$  dado que  $H_0$  es falsa).

- Cálculo de probabilidades de cometer Error tipo I y Tipo II. A través de diagramas de árbol, probabilidad total y Teorema de Bayes el estudiante, en situaciones como las pruebas para saber si una persona tiene cáncer, puede calcular las probabilidades de los errores y se introduce la filosofía de estadística Bayesiana.

### **En distribuciones de probabilidad**

Tradicionalmente las distribuciones de probabilidad son vistas como antecedente de la inferencia estadística, pero su enseñanza suele ser independiente del desarrollo de ideas de inferencia. Sin embargo, las Distribuciones permiten dar un avance decisivo a las ideas de inferencia estadística como a continuación señalamos:

- Planteamiento simbólico de las hipótesis. En esta etapa los estudiantes pasan de expresar sus hipótesis narrativamente a su forma simbólica con relación a un parámetro en cuestión.
- Intervalos de probabilidad. Estos permiten sentar las bases para que los estudiantes más adelante puedan distinguir entre intervalos de probabilidad (que se plantean en la regla de decisión de las Pruebas de hipótesis, por ejemplo) y los futuros intervalos de confianza.
- Resultado significativo. Este concepto fundamental puede desarrollarse completamente con el uso de la Distribución binomial vista como una distribución muestral, y establecerlo en función del número de desviaciones estándar desde la media, así como el valor  $p$ .

### **En distribuciones muestrales**

Las distribuciones muestrales son propiamente el fundamento de la Inferencia estadística, de ahí su gran importancia. Hasta este momento, los estudiantes ya pueden formular un problema de toma de decisiones en forma simbólica con el parámetro en cuestión. En esta etapa es posible desarrollar varias ideas esenciales para la inferencia estadística de tal manera que ésta última pueda ser vista, en cierto modo, como una aplicación de dichas distribuciones.





- Nivel de significación. Visto como una consecuencia directa del valor crítico definido como el número de errores estándar desde la media convenido para determinar a partir de qué valor se tiene un resultado significativo.
- Regla de decisión. Se desprende de manera natural del nivel de significación determinar la regla a partir de la cual se rechaza o no una hipótesis nula.
- Valor p. Se da una continuidad, desde su primer acercamiento del valor p con las distribuciones discretas que estudiaron, ahora visto desde las distribuciones muestrales y como un argumento para decidir si se rechaza  $H_0$ .
- Probabilidad de los Errores tipo I y II. Esto es visto como una aplicación directa de las distribuciones muestrales involucradas.

Pudiera dar la sensación de que esto sería suficiente para introducir las pruebas de hipótesis, pero el procedimiento clásico tiene sus propias dificultades y no se dan las transferencias de conocimiento de manera siempre transparente. El procedimiento de aplicar una técnica de Prueba de hipótesis de manera general se puede considerar que se compone, desde una perspectiva didáctica de las siguientes etapas:

1. Identificación del tipo de parámetro de interés involucrado.
2. Identificación de los valores de los parámetros y de los estadísticos del problema.
3. Identificación de los supuestos y del tipo de distribución muestral involucrada.
4. Planteamiento de las hipótesis nula y alternativa
5. Determinación de la regla de decisión
6. Cálculo de estadístico de prueba y valor p
7. Conclusión e interpretación

Se pretende que durante la aplicación de este procedimiento a diferentes tipos de parámetros, los estudiantes, con ayuda del profesor, vayan vinculando sus conocimientos previos de modo que puedan justificar cada paso correspondiente de su técnica de Prueba de hipótesis. Es de esperarse dificultades que van desde la diferenciación entre parámetros y estadísticos en





la información del problema, dificultades conceptuales con las distribuciones muestrales, hasta dificultades lógicas en el planteamiento de las hipótesis y de los tipos de errores.

## **CONCLUSIONES**

Un acercamiento multidimensional del fenómeno didáctico de la inferencia estadística permitió tener una idea más clara de su naturaleza e identificar que la enseñanza tradicional de probabilidad y estadística aborda muy linealmente los contenidos y desaprovecha el gran potencial de interrelación que tienen los conceptos. Es una falsa creencia que sólo es posible abordar la inferencia estadística después de que han estudiado todos los temas que le componen. De hecho, como se mostró en este trabajo, existen muchos espacios a lo largo del desarrollo de un curso que permiten detonar ideas germinales de inferencia estadística y de capitalizar a través de la vinculación de conceptos lo aprendido para desarrollar una idea más robusta de lo que es la inferencia estadística.

También se logró identificar elementos conceptuales para construir una secuencia de ideas germinales para el desarrollo de la inferencia estadística que puedan ser fundamento para el diseño y experimentación en el aula. La complejidad de algunos elementos de la inferencia estadística como su parte lógica y la comprensión de resultado significativo, desde esta perspectiva, contarán con mayores tiempos didácticos para su aprendizaje.

## **BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS**





- Albert, J. A., Ruiz, B., Tobías, M.G., Villarreal, O. (2014). Proyecto: Transformando la Educación Estadística desde un Enfoque Inferencial. Fondo NOVUS. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Convocatoria 2014-2015.
- Aliaga, M., & Gunderson, B. (2006). Interactive statistics. Prentice Hall.
- Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, 8 (11), 277-291.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, ( pp. 3-15). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Sierra, G. M. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(1), 83-102.
- Devore, I. (2011). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. (8 ed.) México: Cengage Learn.
- Fisher, R. A. (1949), Métodos estadísticos para investigadores (10 ed). Madrid: Ed. Aguilar.
- Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. Mathematical thinking and learning, 13, 152-173.
- Montgomery, D. & Runger, G. (2008). Probabilidad y estadística para ingenieros. (2 ed). México: Limusa Wiley.
- Rodríguez, M. I., Albert, J. A., Agnelli, H. (2011). Controversias sobre las pruebas de hipótesis: sus implicaciones para su enseñanza. Contribuciones a la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística. Puebla, BUAP.
- Ruiz, B. (2014). Relaciones históricas entre las variables aleatoria y estadística y sus repercusiones didácticas. En Andrade, L. (Ed.), Memorias del Primer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica (pp 1-12). Bogotá Colombia.
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute, 201-204.

