

ANÁLISIS GRÁFICO DE LA PRÁCTICA DE RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

NEHEMIÁS MORENO MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ, FACULTAD DE CIENCIAS

RITA ANGULO VILLANUEVA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ, FACULTAD DE CIENCIAS

ISNARDO REDUCINDO RUIZ

*UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ, FACULTAD DE CIENCIAS DE
LA INFORMACIÓN*

TEMÁTICA GENERAL: EDUCACIÓN EN CAMPOS DISCIPLINARES

RESUMEN

Se presenta al mapa conceptual híbrido como una herramienta gráfica que permite describir la práctica de resolución de un problema de modelización matemática. Se realiza un análisis ontosemiótico centrado en la identificación de los objetos matemáticos primarios, las relaciones matemáticas y los procesos involucrados en la práctica de modelización matemática. Se aborda un estudio de caso en el que se analiza de manera gráfica el mapa conceptual híbrido obtenido a partir de la producción oral y escrita de un profesor de nivel medio superior que resuelve un problema contextualizado. El mapa conceptual híbrido permite analizar al sistema de prácticas y los significados asociados.

Palabras clave: Mapas conceptuales, matemáticas, modelos matemáticos, procesos cognoscitivos, profesores.

INTRODUCCIÓN

Con el objeto de lograr un acercamiento a las dificultades de aprendizaje a las que se enfrentan los estudiantes, es de gran importancia enfocarse en el análisis de tipo epistemológico de las tareas matemáticas y de las estrategias de resolución. Es necesario contar con herramientas que permitan el análisis detallado de las prácticas que son llevadas a cabo en la resolución de dichas tareas. Este trabajo muestra al mapa conceptual híbrido, como una herramienta gráfica que permite realizar un análisis ontosemiótico centrado en la identificación de los objetos y relaciones matemáticas involucradas en la práctica de modelización matemática. El trabajo complementa otros estudios (Godino, 2002; Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone, 2017) en los que se ha abordado la importancia de realizar análisis ontosemiótico a priori de las tareas.

MARCO TEÓRICO

El enfoque teórico considera al Mapa Conceptual Híbrido, MCH (Aguilar, 2006), interpretado desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico, EOS (Godino, 2002). A continuación se presentan algunos elementos teóricos del EOS, posteriormente se describe el MCH y por último se realiza una interpretación ontosemiótica del MCH.

El Enfoque Ontosemiótico

Según el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), la resolución de un problema matemático implica la realización de una práctica en el que interviene un conjunto de objetos matemáticos primarios: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos, los cuales son organizados por el sujeto (experto o novato) que resuelve el problema en la llamada configuración de objetos matemáticos primarios. Desde la perspectiva del EOS tanto los objetos primarios como las configuraciones pueden ser vistas desde cinco dimensiones duales: personal/institucional, ostensivo/no-ostensivo, expresión/contenido, unitario/sistémico e intensivo/extensivo. En el EOS también se analiza la práctica matemática considerando la realización de ciertos procesos cognitivos como el de materialización (permite pasar de una representación no ostensiva a una ostensiva), idealización (permite ir de una representación ostensiva a una no ostensiva), argumentación (para justificar el procedimiento empleado en la resolución de un problema), representación, enunciación, problematización, etc.

En el EOS, el significado es entendido en términos de la noción de función semiótica o como un sistema de prácticas. La primera considera la dimensión expresión/contenido, donde el significado está dado a través de la correspondencia entre un antecedente (significante) y un consecuente (significado) establecido por un sujeto (persona o institución) de acuerdo a ciertos criterios (e.g. reglas matemáticas). Y mediante la segunda, el significado es entendido como el sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización. El sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes prácticas más específicas que son utilizados en un determinado contexto y con un

determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido (perspectiva unitaria) relacionados con el objeto matemático en cuestión.

El Mapa Conceptual Híbrido

El desarrollo del mapa conceptual (Novak y Gowin, 1988) y su implementación en otros campos de conocimiento ha dado lugar a la fusión del mapa conceptual con otro tipo de representaciones, tal es el caso de los Mapas Conceptuales Híbridos que resultan de la fusión de la red jerárquica de conceptos, característica del mapa conceptual, con la representación gráfica de procesos, característica de un diagrama de flujo. El MCH es una red de conceptos y procesos ordenados jerárquicamente, en el que la interconexión de los conceptos y procesos, mediante “ligas” y “frases de enlace”, produce un sistema de redes proposicionales donde el significado no sólo se encuentra en la relación entre los conceptos de una red, sino que se extiende a las relaciones que esta red tiene con los conceptos de otras redes en el MCH. El orden de las relaciones conceptuales en el MCH está orientado por un dominio de conocimiento, el cual, en el caso que abordamos considera el conocimiento matemático, en el que es posible señalar las relaciones conceptuales verdaderas a partir de las definiciones y propiedades matemáticas implicadas. Por otro lado, el MCH puede ser elaborado a partir de la producción de un sujeto que realiza la práctica de resolución del problema, dando lugar a una representación u objeto ostensivo interpretable desde una determinada teoría, así el mapa conceptual producido cambia su función para ser una representación válida que permite conocer acerca de la estructura cognitiva de los sujetos (Aguilar, 2006).

Interpretación ontosemiótica del mapa conceptual híbrido

Desde la perspectiva del EOS, el MCH puede ser considerado como una representación ostensiva del sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático (Moreno, Aguilar y Villanueva, 2017), ya que representa de manera gráfica a los objetos matemáticos primarios organizados en un sistema de redes proposicionales, y también permite visualizar ciertos procesos cognitivos. Por otro lado, desde la perspectiva del EOS, el MCH puede ser analizado desde la dimensión institucional o personal según si el MCH es elaborado a partir de las producciones de un experto o de las producciones de un estudiante inexperto respectivamente.

Por otra parte, el significado en el MCH es entendido como un sistema de prácticas que es representado a través de un sistema de redes conceptuales. Cada red conceptual (o práctica particular) tiene un sentido y es incorporado, por el sujeto resolutor, al sistema de redes a lo largo del proceso de resolución del problema planteado. El significado también es interpretado a través de la noción de función semiótica. Mediante ésta última, una representación ostensiva u observable (e.g. símbolo, expresión algebraica, etc.) es relacionada con el concepto no ostensivo correspondiente. En general, el MCH representa una trama de funciones semióticas.

MÉTODO

Se emplea una metodología de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas apoyada en el MCH elaborado a partir de la producción de un profesor de nivel medio superior. En la investigación se realiza un estudio cualitativo, ya que se trata de un estudio exploratorio en el que se considera la observación del tipo de solución a la tarea propuesta. La estrategia de indagación empleada en este trabajo fue un estudio de caso y se tenía el interés de describir e interpretar la práctica de resolución de un problema matemático. El estudio de caso es descriptivo, pues se presenta con detalle las producciones (oral y escrita) realizadas por el sujeto a lo largo del proceso de la resolución del problema contextualizado. También es interpretativo en el sentido de que los datos recabados son empleados para desarrollar el sistema de redes que representa de manera gráfica la práctica de resolución del problema.

En la resolución del problema propuesto, el docente realiza una práctica matemática que consiste en la lectura del texto donde se enuncia el problema y en la producción de un discurso oral y escrito con la respuesta a la cuestión planteada, la cual será el resultado de una serie de acciones sujetas a reglas matemáticas.

El participante fue un docente que contaba con cinco años de experiencia impartiendo la asignatura de cálculo a nivel bachillerato en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. El problema contextualizado que se propuso al docente fue: Una cámara satelital toma una fotografía rectangular. La región más pequeña que puede fotografiar es un rectángulo de 5 por 7km. Conforme la cámara se aleja, la longitud L y el ancho W del rectángulo aumentan a razón de 2km/s tanto en L como en W . ¿Cuánto tiempo tardará para que el área A sea al menos 5 veces mayor que su tamaño original?. La recolección de los datos se llevó a cabo mediante una pluma electrónica (Smartpen) que registra y almacena de manera sincronizada audio y escritura en un archivo electrónico.

La organización de los datos y la elaboración del MCH fueron llevadas a cabo por el investigador. Se elaboró una tabla en donde se clasificó y se enumeró (según el orden de aparición en la resolución del problema) a los elementos de la producción oral y escrita según si se correspondían con los objetos matemáticos señalados por el EOS en: conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos. En cada uno de éstos, se hizo la anotación correspondiente del lenguaje empleado para expresar dichos objetos a través de nombres, literales, expresiones matemáticas, operaciones y proposiciones enunciadas por el docente.

RESULTADOS

En la Figura 1 se ilustra la producción del docente obtenida a lo largo del proceso de resolución del problema. Mediante la pluma electrónica fue posible obtener el registro de audio que da evidencia del discurso del profesor mediante el empleo de conceptos, propiedades y argumentos justificativos que no fueron plasmados en el registro de escritura. El audio es presentado en la Figura 1 mediante el texto enumerado del 1 al 10.

Por otra parte, en la Figura 2 se muestra el MCH que sintetiza el análisis ontosemiótico y muestra el proceso de resolución del problema contextualizado, cajas enumeradas del 1 al 7. El sistema de prácticas de modelización se ha dividido en 7 unidades de análisis o prácticas específicas en las que participan lenguaje, conceptos (en negritas), propiedades y argumentos organizadas en 7 redes conceptuales distintas e interrelacionadas. Las cajas 1 a 3 muestran el análisis del enunciado y las cajas 4 a 7 muestran el análisis de la resolución del problema.

Las cajas 1 a 3 permiten evidenciar los procesos de enunciación y problematización de la situación planteada al profesor, los cuales involucran tres etapas: el contexto o situación, la descripción de la situación-problema y el planteamiento del problema a través de la pregunta que se quiere responder. Cada una de estas etapas requiere de la realización de prácticas o de la organización específica de conceptos en redes. La organización conceptual en estas tres redes es de gran importancia en el éxito de la resolución del problema, pues impacta de manera significativa en la comprensión del problema y en la activación de aquellos objetos matemáticos más adecuados a ser empleados en el proceso de resolución.

Por otro lado, el análisis de las prácticas de resolución que van de la caja 4 a la 7 revela que el docente involucra el uso de una incógnita (el tiempo), y al reconocer la dependencia del área "A" del tiempo (objeto 5), establece una relación funcional cuadrática (cajas 16 y 25). Para el caso en el que $A=175$ (caja 6) se obtienen dos soluciones (caja 27), de las cuales sólo toma como solución aquella de signo positivo.

El MCH también permite visualizar la realización de distintos procesos cognitivos involucrados en la práctica de resolución del problema. El docente realiza un proceso de idealización que le lleva a pensar que la solución del problema puede ser obtenida tomando en cuenta únicamente el área de la foto inicial y el área de la foto final, y la razón de cambio de las aristas de la fotografía. Y mediante la realización de un proceso de generalización, el docente fue capaz de obtener el tiempo solicitado a partir de la determinación de las raíces de una función cuadrática, es decir, consideró al problema del satélite como un caso particular de un problema general que involucra a las ecuaciones cuadráticas. También llevó a cabo un proceso de tratamiento matemático al resolver la ecuación cuadrática, y realizó un proceso de significación al elegir la raíz positiva e interpretarlo con la magnitud física del tiempo, y llevo a cabo un proceso.

En relación con el proceso de significación, éste se lleva a cabo a lo largo de toda la práctica de resolución del problema, por ejemplo, el profesor interpreta el símbolo " t " como el tiempo transcurriendo hacia delante, interpreta el símbolo " A " como el área de la fotografía, y a su vez, interpreta al área como un objeto más complejo, se trata de la interpretación del concepto de área a través de una relación funcional con la variable " t ". En general, el profesor establece una trama de funciones semióticas pueden ser visualizados en el MCH a través de la interrelación entre distintos objetos.

Se destaca la interpretación perceptual de " t " cuando señala que el "tiempo transcurre hacia adelante", lo que resulta atinado ya que sin percatarse este aspecto fue considerado implícitamente en las cajas 14 y 16. Se obtiene el mismo resultado si en 14 y 16 se hubiese manejado $5-2t$ y $7-2t$ con " t " negativa. Otro señalamiento es el significado asociado al símbolo " t " en la caja 25 y el significado del argumento formado al conectar las cajas 13, 23, 24, 25 y 6, se trata de que el profesor no realiza una distinción entre el tiempo " t " arbitrario y el tiempo " t^* " en el que el área es 175.

CONCLUSIONES

El MCH permite poner en evidencia de manera gráfica los conocimientos y su organización en la realización de las tareas, permitiendo al investigador analizar los objetos y procesos involucrados en la resolución de un problema de modelización. Las aplicaciones de la herramienta gráfica del MCH (interpretada a la luz del EOS) en el contexto escolar son amplias, característica heredada de la versatilidad de los mapas conceptuales en el ámbito educativo. Los MCH, bajo el enfoque por resolución de problemas, podrían ser empleados por los docentes para el diseño de secuencias didácticas, para analizar la comprensión de los estudiantes respecto a determinado tema, para la enseñanza de algún concepto matemático, para el trabajo colaborativo entre estudiantes y entre estudiantes y maestros. El MCH también permite analizar los significados asociados al sistema de prácticas a través de la manera en que los conceptos son interrelacionados por el sujeto que resuelve el problema, de éste modo, la ubicación de un concepto en particular en un MCH cognitivo podría no ser la misma que en la de un MCH de un experto. En éste último, el concepto podría estar relacionado a otros conceptos dando lugar a otras proposiciones y significados distintos a los significados del estudiante.

TABLAS Y FIGURAS

(1) Empezamos el problema preguntándonos cuánto es 5 veces el área original ($A_{original}$)

$$5 \times 7 = 35 = 5 = 175 = A_{original}$$

(2) Cada segundo que pasa, aumenta en lo ancho

$$A = \left(5 + 2 \frac{km}{s} t\right) \left[7 + 2 \frac{km}{s} t\right]$$

(3) Y el área se determinará por la multiplicación con lo largo, y de lo largo serían

(4) Y luego, multiplicamos todo (pondré paréntesis cuadrados para decir que éstas son unidades)

$$35 + 4 \left[\frac{km}{s}\right]^2 t^2 + 24 \left[\frac{km}{s}\right] t = A$$

(5) Pasamos a despejar cuál sería el valor de tiempo para esa área (A_{nueva}), entonces sería "escribe ecuación"

$$A_p = 175 = 35 + 4t^2 + 24t$$

(6) Tenemos que igualar esta ecuación a cero, entonces tendríamos...

$$0 = -140 + 24t + 4t^2$$

(7) De aquí luego aplicamos la fórmula general

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-140)}}{2(4)}$$

(8) Lo cual nos va a dar cada una de las raíces

$$(5 + 7.26) (7 + 7.26) = (12.16) (14.16) = 174.8275$$

(9) Sabemos que el tiempo transcurre hacia adelante, entonces tenemos que seleccionar el tiempo positivo y solamente quedaría comprobarlo

(10) Podríamos hacerlo por separado "sustituye $t=3.63$ en $(5+2t)$ " y esto por $7+7.26$ "sustituye $t=3.63$ en $(7+2t)$ " y luego "escribe $(12.16)(14.16)$ " y esto nos da 174.8275

Figura 1. Producción del profesor a lo largo del proceso de resolución del problema.

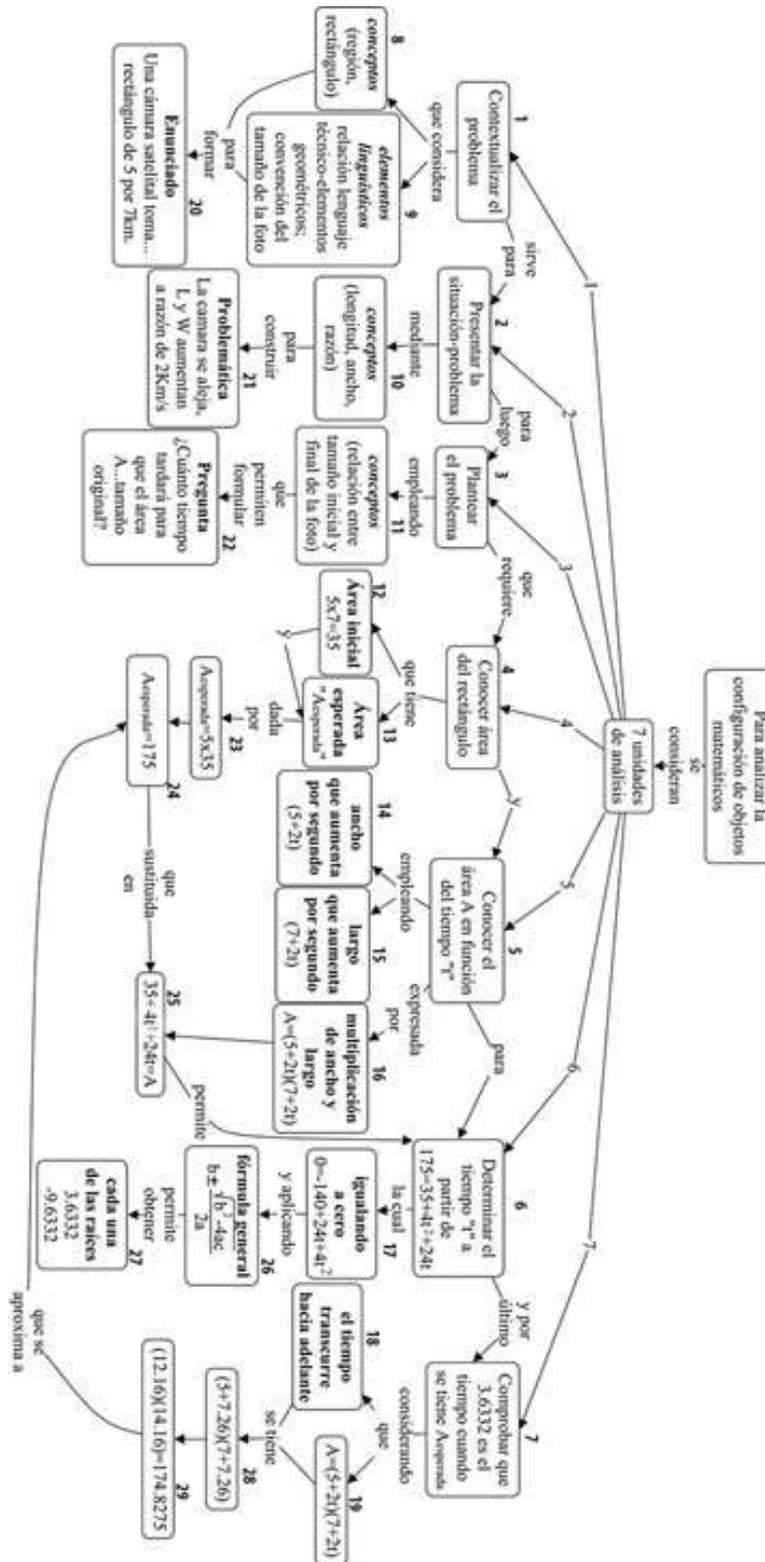


Figura 2. MCH que muestra las siete unidades de análisis y el sistema de prácticas.

REFERENCIAS

- Aguilar, M. F. T. (2006). El mapa conceptual una herramienta para aprender y enseñar. *Plasticidad y restauración neurológica*, 5(1), 62-72.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>.
- Moreno, M. N., Aguilar, T. M. F. y Villanueva, M. M. (2017). Descripción gráfica de la práctica de resolución de problemas en modelación matemática. En: J.M. Contreras, et al. (eds.). *Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Actas*. Granada: Universidad de Granada. [<http://hdl.handle.net/10481/45288>]
- Novak, J. D., Gowin, D. B. (1988) *Aprendiendo a aprender*. España: Martínez Roca.