

“DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO A TRAVÉS DE LA GENERALIZACIÓN VISUAL DE SUCESIONES FIGURALES”

VALENZUELA GARCÍA JESÚS
GUTIÉRREZ MARFILEÑO VICTORIA EUGENIA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

TEMÁTICA GENERAL: EDUCACIÓN EN CAMPOS DISCIPLINARES

RESUMEN

Este documento muestra resultados parciales de una investigación centrada en desarrollar habilidades cognitivas relacionadas al proceso de generalización de sucesiones con representación figural en 30 estudiantes de primer semestre de bachillerato de una comunidad rural en el estado de Zacatecas, México. Partiendo del constructo Pensamiento algebraico, se presentan resultados de un Experimento de enseñanza cuyo propósito fue promover el uso de la estrategia de visualización en la tarea de inducir y generalizar patrones como tarea y característica esencial Pensamiento algebraico. Los resultados muestran la eficacia de la visualización en la habilidad de inducir relaciones generales a partir del análisis de términos particulares observados en la tarea.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas; Álgebra; Estrategias de enseñanza; Educación media.

INTRODUCCIÓN

La investigación presentada forma parte de los resultados de un estudio doctoral situado desde la perspectiva de intervención en Didáctica del álgebra y sustentado en el método Experimento de Enseñanza.

El estudio pretendió atender a dos aspectos relacionados a una problemática general que se caracteriza como la dificultad en el logro de aprendizajes algebraicos en alumnos del nivel de bachillerato. El primero de ellos relacionado con la necesidad de desarrollar habilidades de Pensamiento algebraico que permitan al alumno comprender y generalizar situaciones de relación y variabilidad. El segundo radicó en abonar al conjunto de investigaciones que intentan comprender los procesos didácticos relacionados con el desarrollo del Pensamiento algebraico en el contexto escolar a partir de los procesos de generalización.

DESARROLLO

Con base en el documento Plan y Programas de Estudio para la educación básica en México, uno de los mayores desafíos en nuestro país se particulariza en los aprendizajes matemáticos, con mayor detalle se señalan la dificultad en el aprendizaje y comprensión del álgebra escolar (SEP, 2002). Por ejemplo, los resultados obtenidos en la prueba Excale (Examen de la Calidad y Logro Educativo) que realiza el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) establecen que aproximadamente 80% de los alumnos mexicanos, próximos a finalizar su educación secundaria, no logran resolver los problemas algebraicos ahí planteados (INEE, 2006).

Si bien las disposiciones de formación matemática escolar en México establecen como objetivo curricular (*Sentido numérico y pensamiento algebraico*) que los estudiantes desarrollen la habilidad de generalizar y transitar entre las distintas formas de representación, la evidencia en las evaluaciones han mostrado sistemáticamente dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra y en particular la capacidad de comprender y modelar situaciones en donde están implicadas nociones de variabilidad.

Mason (1996) señala como una de las causas que originan esta problemática en la enseñanza la ruptura entre el estudio de la aritmética, situado en los niveles de educación elemental, al trabajo con el álgebra reservado para la educación secundaria.

Una forma de distinguir entre los procesos epistémicos entre la aritmética y el álgebra radica en que el Pensamiento algebraico implica la comprensión de procesos de relación y variabilidad, mientras que en el pensamiento aritmético se asume como la obtención de un producto numérico generado a partir de valores de entrada ubicados al lado izquierdo de una expresión (Warren, 2004).

En este sentido, Kieran (1992) señala como deficiencia didáctica en álgebra escolar la insuficiente formación en habilidades de pensamiento matemático de tipo relacional y funcional que permita al estudiante un aprendizaje significativo respecto de nociones de variabilidad y su generalización.

Si bien Lesley y Freimman (2004) y Papic (2007) señalan la exploración y generalización de patrones como una propuesta esencial en el trabajo matemático y un potente medio para el desarrollo del pensamiento algebraico en el medio escolar; estudios como los de Becker y Rivera (2005); Cañadas, Castro y Castro (2008) dan cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes al momento de inducir la regla general de patrones en el contexto de tareas de sucesiones figurales: la preponderancia de estrategias aritméticas en detrimento de las de tipo visual, la dificultad de inducir y expresar las relaciones generales en la sucesión. En términos generales datos estadísticos presentados en estos estudios citados afirman que en promedio 15% de los estudiantes de nivel medio (14-16 años de edad) logran establecer de forma correcta las relaciones en la estructura subyacente a la sucesión y, por tanto, pudieron expresar una regla general (generalización lejana) a la estructura.

Considerando la importancia que supone esta propuesta en el contexto de la formación matemática escolar y las dificultades que supone obtener la regla general, se propuso dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

Preguntas de investigación

1.- ¿Qué estrategias utilizan los alumnos de primer semestre de bachillerato para obtener la regla general en tareas de sucesiones lineales con representación figural?

2.- ¿Qué papel desempeña la visualización como estrategia inductiva de la regla general?

Objetivos

1.- Identificar las estrategias empleadas por los alumnos en la inducción de patrones de sucesiones lineales con elementos figurativos.

2.- Implementar un experimento de enseñanza centrado en el desarrollo del Pensamiento algebraico a partir de tareas de la generalización de patrones en el contexto de sucesiones lineales con elementos figurativos mediante la estrategia de visualización.

Marco teórico

Pensamiento algebraico

En su trabajo doctoral Lins (1992) señaló que el Pensamiento algebraico es visto como una habilidad para transitar del análisis del contexto a la estructura. Para Mason, Stephens y Watson (2009) esta habilidad es apreciable cuando el estudiante “identifica propiedades generales que son instanciadas en situaciones particulares como relaciones entre los elementos” (p. 10); agregando que, la identificación de relaciones generales permiten establecer una “estructura” o patrón que instancia dicha propiedad.

Por su parte Walkowiak (2014) afirma que el Pensamiento algebraico es un elemento fundamental del pensamiento matemático que posibilita en el alumno la capacidad de establecer reglas generales de relaciones matemáticas observadas en los números, los objetos y las formas geométricas.

Habilidades cognitivas asociadas al Pensamiento algebraico

En el Pensamiento algebraico está implicada la tarea de construir relaciones funcionales (Butto y Rojano, 2010). Esta afirmación permite identificar dos componentes implicados en este constructo: la habilidad de establecer relaciones entre elementos en un contexto cuantitativo y la posibilidad de generar modelos que expliquen dichas relaciones.

Como primer componente, el aspecto relacional refiere a “examinar alternativamente dos o más conceptos o ideas matemáticas para apreciar (recordar o detectar) relaciones que puede existir entre ellos, y analizar o usar estas relaciones con la intención de resolver un problema...” (Molina, Castro y Ambrose, 2006, p. 35)

En el contexto del trabajo con sucesiones, la inducción de relaciones entre los elementos que componen la figura en una sucesión tiene por objetivo la solución de una tarea: construir el término general.

El segundo componente del pensamiento algebraico está dado a partir del establecimiento de modelos que generalicen dichas relaciones inducidas. Blanton y Kaput (2011) caracterizan el pensamiento funcional como “la generalización de relaciones entre cantidades de covarianza, expresando tales relaciones en forma de símbolos, tablas, gráficas o palabras...para analizar el comportamiento de la función” (p.47).

La expresión de la regla general de la sucesión es el enunciado (verbal o simbólico) que expresa la estructura de los términos de un conjunto ordenado (Rico, Castro y Romero, 2000). En esta idea, la estructura es el resultado de la inducción de un patrón (Mulligan y Mitchelmore, 2009).

Estrategias de generalización

Desde la Educación Matemática, las estrategias se definen como las formas de actuación o ejecución de tareas. Las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda efectuar, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados.

A partir de una síntesis de estudios que abordan los modos de actuación de los sujetos ante la tarea de generalización, Gümer, Ersoy & Témiz (2013) consideran las siguientes estrategias llevadas a cabo en dicha actividad, algunas de ellas se presentan en la Tabla 1.

La diversidad de estrategias de generalización es el resultado de razonamientos llevados a cabo por los estudiantes. Como propósito de enseñanza, resulta necesario que los estudiantes comprendan el potencial y limitaciones de cada uno de estos modos de actuación. Investigadores como Arcavi (2003) y Barbosa y Vale (2015) han reiterado la importancia de promover estrategias de visualización como el modo de actuación más eficaz en el desarrollo de las habilidades necesarias en la inducción de patrones y su generalización.

Metodología

El estudio adoptó la metodología de Experimento de enseñanza. Este método implica ciclos continuos de generación y pruebas de conjeturas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Como objetivo se espera que “el alumnado construya conocimiento, que el investigador-docente construya conocimiento sobre la construcción de conocimiento por parte de los alumnos, y que los demás investigadores construyan conocimiento sobre ambos y sus interacciones” (Molina y otros, 2011, p. 79). Las conjeturas o hipótesis que los investigadores construyen, parten de los resultados en investigaciones previas los cuales guían las interacciones en aula, así como el desarrollo del modelo de enseñanza, promoviendo la elaboración de nuevas conjeturas, de ahí su carácter cíclico.

En este Experimento de enseñanza se partió de una fase diagnóstica que permitió identificar las estrategias utilizadas por 28 estudiantes de primer semestre de bachillerato de una comunidad rural del estado de Zacatecas, cuyo criterio de selección fue la disponibilidad a participar en la investigación. Los resultados de esta fase sirvieron de insumo para proponer una trayectoria de aprendizaje encaminada a fomentar el uso de estrategias visuales como heurístico en la inducción de la regla general.

En este trabajo se reportan resultados de una de las tareas de diagnóstico y la evidencia de la cuarta sesión de intervención, la cual refleja el mayor avance en los alumnos respecto de la habilidad para inducir la regla general a partir de la estrategia visual.

Las técnicas de obtención de la información consistieron en el análisis de las hojas de trabajo de los alumnos, la videograbación de las sesiones de trabajo y el diario de campo. El proceso de análisis de los datos consideró la categorización de las estrategias de generalización en el momento del diagnóstico y la sesión de intervención que se reporta.

En la tarea de diagnóstico se construyeron las siguientes subcategorías respecto del tipo de estrategia:

- Diferencia entre los términos (Df) consiste en encontrar el valor de la diferencia numérica entre dos términos consecutivos;
- Conteo (Co) a partir de la estrategia precedente, el estudiante aplica una suma mediante conteo para encontrar los valores pedidos;
- Gráfica (Gr) en ella el estudiante establece una representación de la figura para obtener la sucesión pedida a partir de la consideración visual descrita en la categoría que precede;
- Multiplicativo con ajuste (MA) se centra en construir una función a partir de partir del valor de la diferencia constante entre dos términos, multiplicado este valor por el número del lugar del término y ajustarlo finalmente al valor numérico del término.

Resultados

Evidencia de la sesión de diagnóstico.

En la sesión de diagnóstico participaron 28 estudiantes. El tiempo de duración de la sesión fue de 40 minutos y tuvo como objetivo de investigación identificar las estrategias de resolución de tareas de generalización de patrones. La tarea que se reporta consistió en dos filas de puntos (Figura 1).

En esta actividad se pidió encontrar el valor de los términos a_5 , a_{10} , a_{100} y a_n . Se aprecia en la segunda columna de la Tabla 2 las frecuencias de respuesta correcta por término, de la tercera columna a la quinta se presentan las estrategias identificadas en la resolución de la tarea y la frecuencia con que cada una fue utilizada para encontrar el valor de cada término. Las columnas sexta y séptima exponen el modo de representación de la regla general.

De los 28 estudiantes, 22 encontraron el valor del término a_5 siendo el conteo (12) la estrategia más recurrida seguida de la diferencia multiplicativa con ajuste (8); la estrategia gráfica fue la menos utilizada (2) para encontrar el valor de a_5 . Para el término a_{10} disminuyó el número de casos para RC (17), siendo la estrategia de diferencia multiplicativa con ajuste la que reportó el mayor número de frecuencias en la resolución de la tarea (9) junto con el conteo (8).

Para el término a_{100} el número de RC disminuyó a 12 casos siendo la estrategia diferencia multiplicativa con ajuste la única estrategia para encontrar el valor del término. Finalmente, 10 de los 28 estudiantes lograron establecer la regla general, empleando en la totalidad de los casos la estrategia de diferencia multiplicativa con ajuste. En todos los casos recurrieron a la representación simbólica para expresar la regla general.

De lo anterior se reconoce que la frecuencia de RC disminuye conforme incrementa el valor del término en relación a los observados. La estrategia de conteo fue utilizada sólo para encontrar los términos a_5 y a_{10} . La estrategia de Diferencia multiplicativa con ajuste resultó ser la de mayor uso para establecer la regla general. Se reconoce también la preponderancia de la representación simbólica entre los estudiantes como la forma de expresar la regla general.

Evidencia de intervención didáctica

En ésta participaron 30 estudiantes. La duración de la clase fue de 50 minutos. El objetivo del Experimento de enseñanza fue valorar el impacto de la manipulación de objetos concretos como estrategia visual de inducción de la regla general. La tarea presentada en esta clase fue una sucesión con términos ocultos (figura 2), en donde los observados fueron los términos a_3 y a_5 . La actividad consistió en encontrar el valor de a_7 , a_{10} , a_{100} y a_n .

Como trayectoria de aprendizaje se planteó que la manipulación de objetos concretos permitiría al estudiante establecer relaciones generales de variabilidad entre los elementos observados en la sucesión. En consecuencia, una vez inducido algún patrón el estudiante tendría la posibilidad de expresar la regla general, fuera en forma simbólica o verbal. De este proceso el estudiante daría cuenta, ya no de casos concretos (contexto) sino que sería capaz de describir la estructura de cualquier figura, es decir, lo general.

Se organizaron seis equipos por criterio de afinidad. La estrategia consistió en analizar la sucesión y replicar las figuras con el material concreto (palillos de madera), identificando las estructuras y relaciones que se pudieran establecer entre ellas: triángulos, líneas de base, etc.

Se reporta el trabajo recogido en uno de los grupos en donde se presenta un proceso de inducción de la regla general mediante la manipulación de material concreto. El grupo de trabajo que se reporta estuvo conformado por Genaro, Rocío, Esteban y José.

En este acercamiento Genaro logró inducir una primera relación a partir de la estructura de la figura. Basado en el conteo de líneas y triángulos formados expuso:

Genaro: "el número de triángulos es el mismo número que el de las líneas de arriba y abajo".

Una vez comprendida la relación, el docente investigador señaló al estudiante el error cometido y que consistió en duplicar el número de líneas para formar un triángulo. Esteban comenta que la tarea es encontrar el número de líneas que componen la figura. Dicha observación fue importante pues permitió al equipo establecer relaciones entre las líneas que conforman la figura sin necesidad de organizar éstas en triángulos. Esta forma de visualizar la figura permitió identificar tres elementos en juego: líneas de base, superiores e internas. Con base en este análisis Genaro continuó:

Genaro: encontré que el número de líneas que están en medio siempre es una menos que el total de los que están abajo y arriba como aquí (señala la figura cinco) son: 1,2,3,4, 5 (cuenta las líneas de base), 6,7,8,9 (sumando las líneas superiores)...y acá son 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10...digo uno más....y aquí también (valida su inducción en la figura tres) 1,2,3,4,5 (suma las líneas inferiores y superiores) 1,2,3,4,5,6 (cuenta los palillos de en medio o zigzag).

La visualización permitió al estudiante inducir la regla general a partir de la relación observada entre los elementos: las líneas de en medio *siempre* es una más que la suma de las líneas inferiores y superiores; que el número de la figura *siempre* es igual a las líneas de base. Además, este modo de actuación que partió de casos particulares permitió extender estas relaciones observadas a la generalidad de los términos en la sucesión.

Enseguida se reporta lo observado por el grupo en cuanto la habilidad de inducir la regla mediante visualización. La Tabla 3 recoge las estrategias y sus frecuencias con las que el total de estudiantes establecieron la regla general. De la segunda a quinta columna se muestran aquellos que emplearon la visualización como recurso de inducción de la regla, la segunda y tercera son los casos que lograron establecer la regla en forma correcta; la cuarta y quinta expone los casos en los que la regla general resultó incompleta.

La sexta columna da a conocer los estudiantes que hicieron una traducción de la regla aritmética a lo verbal. La séptima columna expone aquellos que no participaron en la tarea.

Del total de alumnos que resolvieron la tarea, 15 de ellos formularon de forma correcta la regla, siete presentaron una verbalización incompleta de la expresión y dos se centraron en hacer una traducción de la regla aritmética a su representación verbal. Seis estudiantes no respondieron la tarea a pesar de haberseles entregado la hoja de trabajo.

De los 15 estudiantes que construyeron regla general, doce recurrieron a la fragmentación de la figura en líneas (base, de en medio y superiores) encontrado relación entre el número de figura con el número de líneas de base; las líneas superiores en relación de líneas de base menos uno; y las líneas de en medio en relación a dos veces el número de líneas en la base. Los tres casos restantes establecieron una fragmentación agrupada de la figura, consistente en identificar una estructura triangular asociada con el número de figura y las líneas superiores en relación a una menos que el número de figura.

En los siete casos de respuestas incompletas, se observó que cinco de éstas fragmentaron la figura en relación a la base y dos establecieron la relación de número de triángulos con la figura, pero en cuyos casos no consideraron las líneas superiores como parte de la estructura y por consiguiente su regla fue parcial.

CONCLUSIONES

Retomando la preponderancia que significaron las estrategias aritméticas y recursivas como modos de actuación en la construcción de la regla general en la fase de diagnóstico y que permitió dar respuesta a la primera de las preguntas del estudio; lo observado en esta sesión permitió identificar la eficacia de la manipulación de objetos concretos como estrategia para inducir relaciones generales. Sin embargo, se observó que la inducción resultó ser un proceso complejo tanto en el momento de articular y expresar el patrón. En los siete casos en donde se estableció una parcialidad de la regla, se observó en ellos la necesidad de mayor familiaridad con este tipo de tareas que promuevan establecer relaciones generales que atiendan la totalidad de la estructura.

Se consideran dos implicaciones didácticas de esta experiencia. La primera relacionada con la importancia de promover en el aula, desde los niveles de educación básica, estrategias visuales que fomenten en el estudiante la capacidad de inducir, validar y expresar relaciones generales más que abordar tareas de generalización que se limiten a construir una expresión derivada de un razonamiento aritmético (DfMA) en donde el foco está en la obtención de un valor numérico. La segunda implicación es la solvencia por parte del docente en el manejo de los distintos patrones que puedan surgir en el proceso de inducción por parte de los alumnos. Este reconocimiento de la diversidad de patrones le permitirá al profesor identificar tipos de razonamiento llevado a cabo por los alumnos y atender dificultades y fortalecer esta habilidad de inducir a partir del uso de la estrategia visual.

TABLAS Y FIGURAS

Tabla 1. Estrategias de generalización de patrones

Estrategias	Propiedades
Conteo	Incluye el cálculo numérico de los términos a partir de la diferencia constante entre cada uno de ellos.
Multiplicar con las diferencias	En este caso los estudiantes a partir de la diferencia constante entre los términos, expresan el valor de cada término como la multiplicación del término por la diferencia.
Explicita	La generalización de patrones a partir de una estrategia explícita involucra la relación entre dos variables a fin de determinar cualquier valor, esta estrategia determina una función mediante el uso de expresiones que pueden ser usadas para encontrar términos tanto cercanos como lejanos a los observados. Por lo tanto, permite obtener n término y escribir una regla general

Tabla 2. Respuestas correctas, estrategias y representación de la regla general.

no	Término	Frecuencia de RC	Estrategias			Representación de a_n		
			Co	Gr	DfMA	Si	Ve	
			1					
	a_5	22	2		2	8		
	a_{10}	17		8	0	9		
	a_{100}	12		0	0	12		
	a_n	10		0	0	10	0	1
								0

Nota: Co = conteo; Gr = gráfica; Df = diferencia; MA = multiplicativo con ajuste; Si = simbólico; Ve = verbal

Tabla 3. Estrategias de inducción en la cuarta sesión

Estrategia de visualización						
Estrategia	Visual			Aritmética		
	Visual Agrupada en relación a la figura	Fragmentada en relación a la base	Incompleta Agrupada en relación a la figura	Fragmentada en relación a la base	Traducción de la regla aritmética	R
n	3	12	2	5	2	

Figuras 1. Sucesión de puntos. Sesión diagnóstico



Figura 2. Sucesión trabajada en la cuarta sesión



REFERENCIAS

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics* 52(3), 215-241.
- Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, 10, 57-70.
- Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128). Melbourne: PME.
- Blanton, M. L., & Kaput, J.J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *International reviews on mathematical education*. 37(1), 34-42.
- Butto Zarzar, C., y Rojano Ceballos, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, 22 (3), pp. 55-86.
- Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Güner, P., Ersoy, E., y Témiz, T. (2013). 7 and 8 grade students generalization strategies patterns. *International journal of global education-2013* (2)4, 38-45.
- Backoff, E., Andrade, E., Sánchez, A., & Bouzas, A. (2006). El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. *México, INEE*.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419.
- Lesley, L., & Freiman, V. (2004). Tracking primary student's understanding of patterns. In *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 415- 422). Norway. PME.
- Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* (Tesis doctoral, Universidad de Nottingham).
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Springer Netherlands.
- Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*. 21(2), 10-32.

- Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. C. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, 1(1), 33-46.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75-88.
- Mulligan, J., Mitchelmore, M., Kemp, C., Marston, J., & Highfield, K. (2008). Encouraging mathematical thinking through pattern and structure: An intervention in the first year of schooling. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13(3), 10.
- Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with Young children-more than just alternating colours. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(1), 8.
- Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizajes de estructuras numéricas.
- SEP (2002). Pensamiento algebraico. Licenciatura en Educación Secundaria. Especialidad: Matemática. Programa de Estudio. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales.
- SEP. (2011) Programas de estudio 2011. Matemáticas. Guía para el Maestro. Educación Básica. Disponible en <http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG1EROSECMAT2013.pdf>.
- Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 56-71.