ÁLGEBRA TEMPRANA, VALIDACIÓN CUALITATIVA DEL *PENSAMIENTO FUNCIONAL* POR REPRESENTACIÓN Y TRANSFERENCIA

ANA MARÍA MEDRANO MOYA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO - FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES (FES) IZTACALA

FELIPE TIRADO SEGURA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO - FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES (FES) IZTACALA

TEMÁTICA GENERAL: EDUCACIÓN EN CAMPOS DISCIPLINARES

RESUMEN

En una evaluación de *pensamiento funcional* en algebra temprana, que utilizó reactivos elaborados por especialistas internacionales del área, los escolares mostraron un pobre desempeño (66% de errores). Al hacer una exploración a detalle (cualitativa) por medio de entrevistas personalizadas y semiestructuradas, se apreció que la mayoría de los escolares (66%) sí tienen la competencia del *pensamiento funcional*. Esto permite apreciar que la validez de los reactivos no era apropiada. El estudio se realizó en un grupo de escolares de tercer grado de primaria después de haber tomado un curso en *Álgebra Temprana,* donde se aplicaron reactivos estandarizados y se hicieron entrevistas semiestructuradas. Se seleccionaron tres estudiantes, uno de desempeño alto, uno medio y otro bajo, a los que se les presentó dos problemas de *pensamiento funcional*, uno para explorar la *función aditiva-sustractiva* y el otro para explorar la *función multiplicativa*. Los resultados señalan que, en algunos casos, los estudiantes comprenden, representan diferenciadamente y solucionan los problemas algebraicos funcionales, incorporando, elementos algebraicos para su representación. Se observa que no hay correspondencia necesariamente entre el nivel de desempeño (alto, medio, bajo) y la representación y comprensión que los escolares ofrecen ante los problemas presentados. En la discusión se analiza la validez que deben de tener los problemas para la evaluación del *pensamiento funcional*. En la conclusión se hace una serie de recomendaciones con base en los hallazgos encontrados en este estudio.

Palabras clave: Álgebra Temprana, pensamiento funcional, validación, representación, transferencia.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas presenta serias dificultades relacionadas con la comprensión, análisis y soluciones de los diferentes problemas (*EXCALE*, 2013, *TERCE* 2013, *PISA*, 2013). Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas promueve un pensamiento operacional, es decir, los profesores se ocupan de generar estrategias en los niños que los llevan a identificar los números o valores presentes en un problema, sin atender el significado de las relaciones cuantitativas, para posteriormente realizar operaciones con ellos y así obtener el resultado. Este proceder, en el mejor de los casos, llega a ser efectivo en un espectro reducido de situaciones problema. Cuando se pide a los estudiantes que aborden situaciones que demandan el análisis de relaciones o que aborden situaciones no numéricas, las prácticas y estrategias que aprenden resultan no ser efectivas. El tipo de prácticas de enseñanza y pensamiento que tradicionalmente se desarrollan dentro de las aulas, promueve un pensamiento contable, el cual suele impedir que los alumnos identifiquen y comprendan las relaciones magnitud implicadas en un problema dado, además de impedir que el problema se aborde desde diferentes enfoques y con diferentes recursos; asimismo, no permite que los procesos de análisis y comprensión se puedan generalizar a otras situaciones.

Para que los estudiantes dejen de centrar la solución de problemas basados en la mera identificación numérica y sus operaciones, muchas veces guiadas por algoritmos que no comprenden, se requiere un cambio en la concepción y estrategias para la enseñanza de las matemáticas. Este cambio debe estar enfocado en desarrollar e incluir experiencias que ayuden a los niños a aprender, a reconocer y relacionar estructuras y generar relaciones matemáticas. Estos conocimientos se utilizarán para promover el razonamiento matemático de objetos y situaciones. La práctica educativa debe incorporar el análisis de problemas que impliquen relaciones de diferente complejidad, así como diferentes conceptos y representaciones que los llevan a la comprensión de las *transferencias*. Una propuesta educativa que pretende desarrollar el pensamiento relacional y funcional desde edades escolares tempranas es la denominada *Álgebra Temprana* (*AT*).

El planteamiento de *AT* señala que se puede enseñar la aritmética junto con el álgebra, ya que ésta última daría profundidad y diversidad en el aprendizaje de las matemáticas, además de generar un vínculo entre ambas áreas matemáticas. En *AT* se propone incorporar, a través de la solución de problemas, diferentes contenidos algebraicos, con la finalidad de explorar, generar y potenciar los aprendizajes, las herramientas y los métodos de solución, así como, desarrollar una comprensión profunda de la estructura subyacente y de la generalidad de las relaciones presentadas en los problemas matemáticos a través de la *transferencia*.

Un tema importante dentro de la propuesta de *AT*, y que es una de las diferentes rutas propuestas por Kaput (2008) y Blanton et al. (2015) para el desarrollo del pensamiento algebraico, es el *pensamiento funcional*. El *pensamiento funcional* desarrolla la concepción de relaciones matemáticas y permite construir la *transferencia* a diferentes situaciones objeto de análisis, ya que permite analizar y generalizar la identificación de patrones y de relaciones, así como identificar y analizar relaciones funcionales utilizando diversas herramientas lingüísticas y maneras de *representación* en las que se explicita la comprensión (Blanton y Kaput, 2011).

Un planteamiento teórico que se sustenta en los planteamientos de Vygotsky (2009), señala que los procesos cognitivos no se reducen a la actividad intra-sujeto que se desarrolla en el cerebro, sino que la actividad psicológica se potencia y elabora con las interrelaciones personales y los diferentes objetos de mediación (artefactos) que se encuentran en el entorno, lo cual conforma instrumentos psicológicos.

Un aspecto relevante de análisis es valorar si se da el *pensamiento funcional* en los niños, para lo cual se pueden utilizar artefactos de mediación y comparar con las diferentes maneras que se emplean en las investigaciones dentro del *AT*, de manera de tener referente para estimar la validez y confiabilidad que generan los diferentes procedimientos de evaluación del *pensamiento funcional* en los niños. Dado que el *AT* propone incorporar prácticas y contenido algebraico, los investigadores diseñan sus propias tareas a implementar en las diversas investigaciones, este aspecto es interesante, en tanto se pretende generar confiabilidad tanto para la promoción de las diferentes habilidades algebraicas como la réplica de las investigaciones. En este sentido, el presente estudio, retoma problemas elaborados por investigadores del área que han sido utilizados en investigaciones para evaluar el *pensamiento funcional*, y contrastar los resultados con los que se obtienen por medio de una entrevista semiestructurada.

Con base en lo anterior, la presente investigación retoma los planteamientos señalados, en los que se incorporan elementos de *representación*, junto con diferentes preguntas de reflexión e indagación. Esto tiene una doble finalidad, una es potenciar el desarrollo de conceptos matemático que involucran el *pensamiento funcional*, por otro lado, se trata de identificar la forma de pensamiento a partir de la elaboración de *transferencias*, dentro de entrevistas a profundidad semiestructuradas.

El propósito de este estudio es mostrar que los procesos de evaluación estandarizados que se utilizan por investigadores altamente acreditados en el campo, no presentan con claridad los elementos de validez de los reactivos que deberían tener, por lo cual no permite valorar apropiadamente la competencia del *pensamiento funcional* en los niños.

DESARROLLO

Método

Este estudio se desprende de una línea de investigación en la que se experimenta con un diseño psicoeducativo, basado en una serie de sesiones en las que se presentan problemas de *pensamiento funcional*, donde un grupo de escolares de tercer grado de primaria de una escuela pública, recibe entrenamiento para analizar, representar y solucionar problemas, incorporando elementos de abstracción a partir de la transferencia a representaciones en tablas, gráficas y literales, introduciendo conceptos algebraicos como: *equivalencia*, *constante*, *incógnita* y *variable*. Se analizan 10 problemas algebraicos, los cuales son programados por orden de complejidad creciente.

De un grupo de estudiantes de tercer grado de primaria, se seleccionan tres niños, a partir de los resultados de una evaluación previa ad hoc (pre-test) y por la valoración del profesor titular del grupo sobre el desempeño escolar; seleccionando a uno de alto, otro de medio y uno más de bajo rendimiento.

Se explora el abordaje de dos problemas algebraicos que implican el *pensamiento funcional*, bajo un procedimiento de entrevistas. Se presenta una pregunta cuya resolución requiere la comprensión de una función, la cual es explorada a través de un procedimiento de orden clínico presentando preguntas, tal como Piaget lo hacía. Se plantea el problema y se invita a que el niño exprese sus consideraciones de manera libre, y el investigador, de acuerdo a las respuestas, formula nuevas preguntas que problematizan sus respuestas y le permiten promover nuevas reflexiones en el niño para explorar y aclarar su pensamiento.

En las entrevistas se presentan dos problemas retomados de la literatura del área de *Álgebra Temprana*, que son utilizados para explorar el *pensamiento funcional* en los niños. Los problemas presentan un nivel de complejidad distinto. En el primero se analiza una función *aditiva-sustractiva* (ej: y = x-3). Este reactivo está creado a partir de la revisión de los reactivos empleados y revisados tradicionalmente por diversos investigadores bien acreditados del área de *AT* (Brizuela y Schliemann, 2004; Blanton y Kaput, 2011; Blanton, et al., 2015; Carraher, et al., 2006; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011). En el segundo problema se plantea una *función multiplicativa* (ej: y=4x) tomada de los estudios realizados por Carraher, Martinez y Schliemann (2008).

RESULTADOS

Los resultados que se presentan corresponden a los dos problemas mencionados, que ponen en juego el *pensamiento funcional*.

Problema 1

Se exploró la *función aditiva-sustractiva*, donde se explicita la función: y = x-3. El problema que se presentó fue:

Eduardo y Emilio cumplen años el mismo día, pero Eduardo es 3 años más pequeño que Emilio. Escribe o dibuja algo que represente la relación entre las edades de Eduardo y Emilio. Explica tu respuesta.

A continuación, se presentan los distintos abordajes realizados por los tres niños participantes, de acuerdo al orden de clasificación por su nivel de desempeño (alto, medio y bajo), el cual fue definido por la evaluación previa (pre-test) y por la valoración del profesor, es decir, se seleccionaron tres niños, un por cada nivel, que tanto en la pre-evaluación como en la valoración de profesor tipificaban ya sea como alto, medio o bajo desempeño.

Estudiante 1 (alto):

Comprende la relación funcional x-3, y lo explicita nuevamente al referir la relación recíproca funcional x+3 en el problema de estaturas que se expuso. Comprende bien que el valor que se asigne a la edad de los participantes (correspondiente a la variable) es el valor agregado por la constante (3 años), señalando que Emilio siempre será 3 años más grande que Eduardo.

En este caso, es muy interesante observar un problema muy generalizado en la enseñanza de las matemáticas, donde los estudiantes operan aritméticamente. Si bien comprendió la relación funcional cuando se le solicitó que hiciera una representación del problema, acudió a una representación aritmética numérica.

Estudiante 2 (medio):

Se observa con este niño el mismo problema operativo de las relaciones implícitas en el problema, que en cuanto ve símbolos numéricos quieren operar aritméticamente, aunque no comprenda las relaciones implicadas en el problema, en este caso, funcionales. El estudiante al ver la existencia del número 3 simplemente se preguntaba si lo que tenía que hacer era sumar o restar, sin mayor comprensión de las relaciones involucradas.

El estudiante señala que no puede realizar nada en tanto no le dicen qué edad tiene Eduardo y Emilio, con lo que vuelve a explicitar el pensamiento operativo aritmético y no logra construir la noción de incógnita, asignando algún valor arbitrario a las edades de Emilio y Eduardo, para comprender que lo relevante es mantener la relación más o menos 3 que se establece como constante en el planteamiento del problema. Este entendimiento corresponde a un análisis primitivo hablando en términos de una propuesta de desarrollo, que no se presenta.

Cuando el estudiante fue invitado a generar una representación del problema, expresó no tener ninguna idea de cómo hacerlo.

Estudiante 3 (bajo):

En la entrevista con este estudiante se pudo apreciar de igual manera, que en el primer caso, que se sí comprende la relación funcional x-3. Lo más sorprendente en este caso, es que al solicitarle que hiciera la representación del problema acudió a formular un planteamiento a partir de un dibujo de dos niños nombrados (Eduardo y Emilio), mediando la relación (constante) entre ellos con el signo *mayor que* (ver figura 1). Al apreciar el investigador que la relación no estaba bien establecida, sin explicitarlo, le solicitó que explicara la representación que había realizado, con lo cual el alumno, de inmediato identificó que en la relación que se establecía el signo correcto era *menor que*, haciendo evidente su comprensión de la relación funcional implicada en el problema.

Se observa claramente que es un alumno que tiene plena claridad en su pensamiento matemático, sin embargo, la profesora la tenía calificada como una alumna de bajo desempeño. Esto suele ser común en los escenarios escolares, en tanto los profesores son muy proclives a categorizar a los alumnos por su comportamiento y no por sus habilidades cognitivas.

Problema 2

Se exploró la *función multiplicativa*, mediante un problema que explicita la función: $y = 4x$. El problema que se presentó fue:

Bernardo va a tener su fiesta de cumpleaños y quiere asegurarse de que todos sus amigos se pueden sentar. Él tiene mesas cuadradas. En una mesa cuadrada se pueden sentar 4 personas.

El investigador realizó diferentes preguntas con la finalidad de evaluar el *pensamiento funcional*.

Primero preguntó: ¿cuántas personas se pueden sentar en 2, 3, 5, 8 y 12 mesas cuadradas? (las preguntas se realizaron una a una). Solicita en cada pregunta: escribe o dibuja algo para representar la relación de las mesas y la cantidad de personas sentadas.

Posteriormente, se presenta una tabla de datos incompleta y se solicita: complementa la información faltante que ves en la tabla.

Una vez que el niño completa la tabla, se pregunta: ves un patrón, (si contesta: sí) ¿cuál? y explícalo con palabras. Finalmente, el investigador pide: representa el patrón observado haciendo uso de una expresión matemática.

Estudiante 1 (alto):

Comprende, abstrae y representa la relación de cuatro personas por mesa. Conforme se le va indicando el aumento en el número de mesas, el estudiante mantiene la relación abstraída y logra transferirla a una representación aritmética utilizando la multiplicación. Al solicitarle el transferir las relaciones numéricas en una tabla (ver tabla 1), loga incorporar los datos de forma correcta, apreciando que en la tabla hay un patrón donde las relaciones numéricas aumentan de cuatro en cuatro, en función del número de mesas.

Finalmente, el estudiante transfiere a una representación algebraica la función identificada, en ella, representó mediante el uso de elementos matemáticos (literales, números y símbolos) la función Xx4=20. Aunque no generó la representación matemáticamente correcta, ya que, en su ecuación, X tiene la significación de una incógnita y no de una variable, generando con ello un único valor posible (5) para X, de manera de mantener la equivalencia entre ambos miembros de la ecuación, aunque escribe "*X significa cualquier número de mesas*" (ver figura 2). Lo apropiado debió ser construir la expresión algebraica concebida a X como una variable para quedar apropiadamente representada la función (Xx4=Y). A pesar de que el estudiante únicamente resuelve un problema de *pensamiento funcional* en la evaluación, es de resaltar que en la entrevista muestra plena comprensión funcional de las relaciones implicadas en los dos diferentes problemas que le fueron planteados. Al parecer se observa una limitación en cómo expresar la relación.

Estudiante 2 (medio):

Este alumno presenta un desempeño muy pobre, no logra abstraer la relación funcional ni plantear el patrón de representación cuatro a uno. Tampoco logra expresar en una representación aritmética ni algebraica las elaciones implicadas en el problema. Se observa una ausencia de pensamiento funcional; aunque en los reactivos que se aplicaron en la evaluación, logra resolver de manera correcta un reactivo que evalúa pensamiento funcional. Esto hace apreciar que no hubo validez ni es confiable el reactivo que logró contestar correctamente.

Estudiante 3 (bajo):

Este estudiante comprende, abstrae y representa de forma gráfica y aritmética las relaciones implicadas en el problema, tomando como base la multiplicación, lo que se aprecia cuando señala que por cada mesa se agregan cuatro personas, sin importar el número que haya de mesas (explicita la abstracción de la relación). En su representación siempre particulariza la situación a cantidades específicas, indicando un número de mesas. El estudiante identifica como patrón una relación aditiva, en la cual se van agregando 4 personas, olvidando la relación con las mesas. Al pedir que se transfiera la representación aritmética a una algebraica, sigue haciendo una representación aritmética sin considerar el número de meas como una variable, se limita a una relación aditiva (4+4). Por lo mismo no logra generalizar la representación al omitir la variable (número de mesas). De igual manera sorprende que el estudiante sin mostrar tener la claridad, haya resuelto un reactivo de *pensamiento funcional* en la evaluación.

CONCLUSIONES

En la experiencia se observó que varios estudiantes del grupo comprenden el *pensamiento funcional,* aunque no logran transferirlo a una representación algebraica, de aquí que se aprecia que hay una diferencia entre comprender la relación funcional y saber expresarla algebraicamente. La comprensión de la relación funcional implicada en los problemas y la representación del mismo tiene distintos componentes, unos es comprender la relación funcional y otra es hacer uso de elementos de mediación para representar la relación de diferentes maneras. Esto permite apreciar que aunque el niño pueda identificar y verbalizar la relación funcional, no necesariamente puede representarla, siendo el máximo reto llegara a la abstracción generalizada que se logra en la expresión algebraica.

Un elemento que permite observar la falta de validez y confiabilidad en los reactivos utilizados para evaluar competencias en *Álgebra Temprana*, es que no generan la congruencia esperada, es decir, estudiantes que logran responder reactivos considerados matemáticamente difíciles (que incluyen la noción de variable), no logran contestar otros que se estiman más fáciles (que incluyen la noción de incógnita). Y viceversa, reactivos estimados matemáticamente fáciles no son resueltos por alumnos que logran responder reactivos considerados de alta dificultad. Esto genera una contradicción ante lo esperado, sin considerar todas las relaciones implicadas en el problema, en tanto sólo se basa para indicar que es *fácil* o *difícil* atendiendo la noción de *incógnita*, *constante* y *variable*; sin considerar otras relaciones que implica la resolución de un problema. La evidencia observada indica que esta característica (*incógnita*, *constante* y *variable*) es lo que lo que en un problema complejiza la relación para los niños. No es de sorprender esto, en tanto que en la medida que hay un mayor número de relaciones numéricas que requieren la abstracción, demanda cognitivamente la coordinación simultánea de éstas, para poder comprender cómo se integran estas en la solución genérica del problema y no la específica contable.

En relación a la selección de los participantes, se seleccionaron tres estudiantes, atendiendo su nivel de desempeño académico, (alto – estudiante 1, medio – estudiante 2 y bajo – estudiante 3), y se observó que el comportamiento esperado, de acuerdo con esta clasificación, no necesariamente se dio. La estudiante 3 era descrita por la profesora, que llevaba medio año escolar impartiendo clases en ese grupo, como mala estudiante, no fue congruente con el desempeño cognitivo, ya que la estudiante mostró en las evaluaciones, tener un buen desempeño, describiendo de forma verbal, aunque no matemática, la abstracción de las relaciones presentadas, así como la relación funcional que se establece en los problemas.

En el caso del estudiante 2, que la profesora consideraba de desempeño medio, presentó muchas limitaciones en todos los problemas, apreciándose nuevamente la falta de correspondencia entre e desempeño esperado y el observado.

Sin duda la validez y confiabilidad en los procesos de evaluación son componentes fundamentales. Por ello es importante reconocer los componentes cognitivos que se integran en la ejecución de una respuesta. En esta investigación queda claro que abstraer la relación funcional en un problema constituye un componente muy diferente a poder construir una representación de la relación y transferirla, por lo que en la elaboración de reactivos se debe tener presente esta diferencia.

NOTAS

Agradecemos a la Escuela Primaria Pública “Amado Nervo” su disposición y apoyo en la realización de la presente investigación.

TABLAS Y FIGURAS

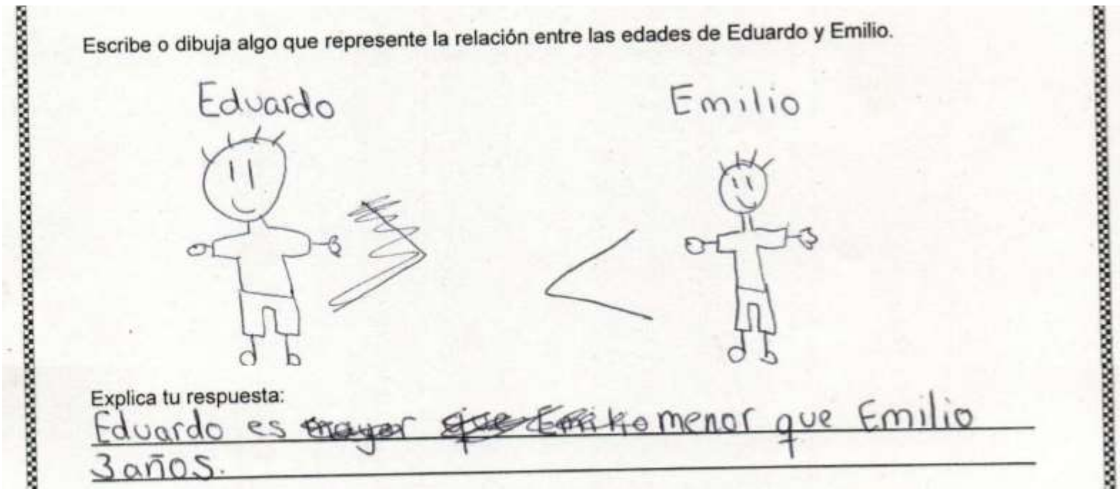
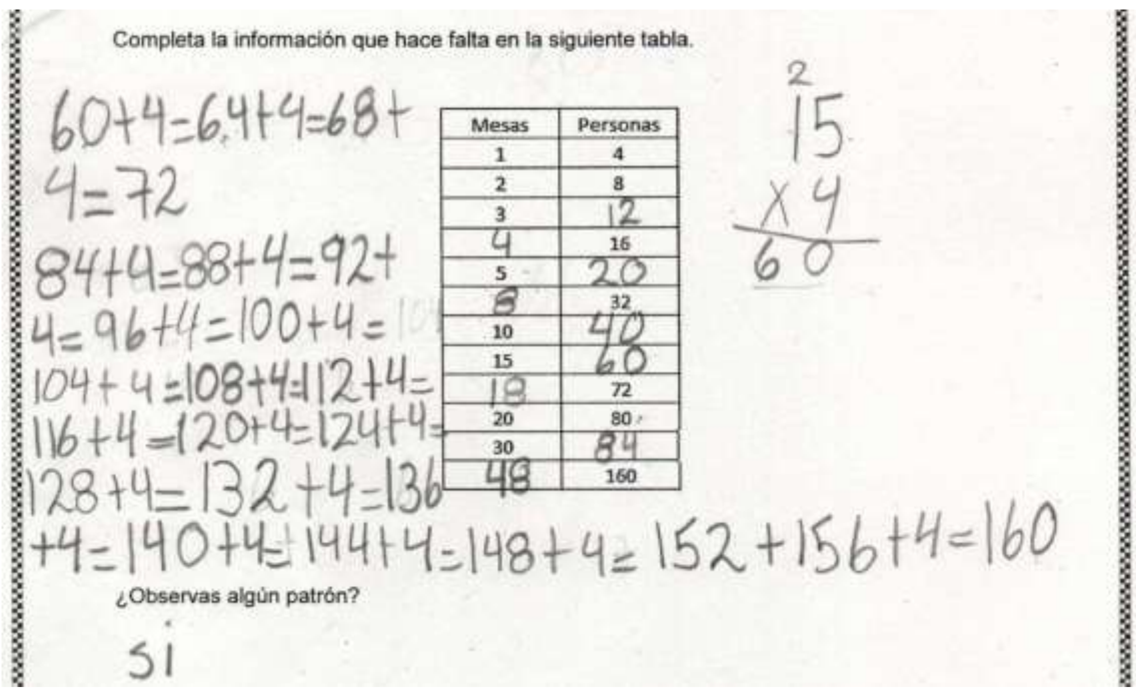


Figura 1. Representación elaborada por la estudiante 3 con base en las relaciones explicitadas en el primer problema.



Completa la información que hace falta en la siguiente tabla.

60+4=64+4=68+4=72
84+4=88+4=92+4=96+4=100+4=
104+4=108+4=112+4=
116+4=120+4=124+4=
128+4=132+4=136
+4=140+4=144+4=148+4=152+156+4=160

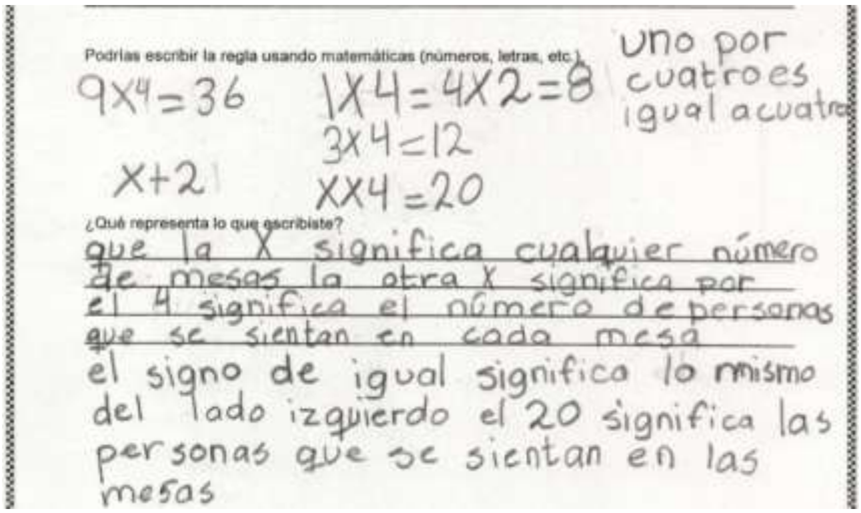
Mesas	Personas
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
8	32
10	40
15	60
18	72
20	80
30	84
48	160

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 4 \\ \hline 60 \end{array}$$

¿Observas algún patrón?

Si

Tabla 1. Representación elaborada por el estudiante 1 con base en las relaciones explicitadas en el segundo problema.



Podrías escribir la regla usando matemáticas (números, letras, etc.)

9x4=36 1x4=4x2=8 uno por cuatro es igual a cuatro

3x4=12

x+2 xx4=20

¿Qué representa lo que escribiste?

que la X significa cualquier número de mesas la otra X significa por el 4 significa el número de personas que se sientan en cada mesa el signo de igual significa lo mismo del lado izquierdo el 20 significa las personas que se sientan en las mesas

Figura 2. Representación elaborada por la estudiante 1 con base en las relaciones explicitadas en el segundo problema.

REFERENCIAS

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer Berlin Heidelberg.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., & Sawrey, K. (2015). Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología*, *36*(1), 151-165.

Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the learning of Mathematics*, *24*(2), 33-40.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carraher, Schliemann & Brizuela (2001). Can Young Students Operate On Unknowns? Learning and Individual Differences.

Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education. 37(2).

EXCALE: INNE (2013). Explorador Excale. Recuperado de URL: http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraEspecificacion.php. Marzo 2015.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? *Algebra in the early grades*, 5-17.

PISA: INEE (2013). México en PISA 2013. México: INEE.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula. México: Paidós (Trabajo original publicado en 2007).

Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE) (2013). UNESCO: Santiago.