IDENTIFICACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN ALUMNOS DE SEXTO DE PRIMARIA A PARTIR DE LA JUSTIFICACIÓN DE UN CÁLCULO ARITMÉTICO

OLIVIA ÁVALOS ESPARZA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
DIANA VIOLETA SOLARES PINEDA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

TEMÁTICA GENERAL: EDUCACIÓN EN CAMPOS DISCIPLINARES

Resumen

Existen numerosos estudios que revelan la manera en la que los niños pequeños construyen reglas de interpretación de los números del sistema decimal. Sin embargo, en los últimos años las investigaciones han apuntado a conocer lo que los niños de segundo ciclo de primaria y secundaria han construido acerca de las características de funcionamiento del sistema decimal.
Ha sido de interés para este trabajo el campo del sistema de numeración y el cálculo. La configuración del sistema decimal determina las operaciones que se pueden resolver con él. Sin embargo, esa vinculación podría no estar clara para los estudiantes. Presentamos algunos de los resultados de una investigación cuya intención fue identificar los conocimientos del sistema de numeración que manifestaban alumnos de sexto grado de primaria al resolver una tarea de cálculo. Encontramos que, en efecto, los alumnos pudieron hacer alusión a conceptos y reglas del sistema, como el valor posicional y la agrupación decimal para justificar sus técnicas de resolución. Lo anterior sugiere que, pese a que la enseñanza formal no fomenta explicitar esas relaciones, los alumnos elaboran explicaciones y justificaciones, aunque no usen, necesariamente, los términos escolares. Nuestros resultados también contribuyen a sustentar el planteamiento de que el sistema de numeración es un objeto de conocimiento complejo, cuya apropiación transcurre a lo largo de la educación básica.
Palabras clave: **sistema de numeración decimal, cálculo mental, educación primaria, conocimientos sobre el sistema de numeración, estrategias de resolución de operaciones.**

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre los conocimientos que los niños construyen en grados superiores de la primaria en torno al sistema de numeración decimal (en adelante SND) son escasas, en comparación con aquellas que indagan los conocimientos no convencionales sobre la escritura e interpretación de los números en niños pequeños (Alvarado y Ferreiro, 2000; Lerner y Sadovsky, 1994). Sin embargo, nuevos estudios dan cuenta de la necesidad de dirigir la mirada hacia la construcción de conocimientos escolarizados sobre aspectos como el valor posicional, la escritura numérica y la representación oral de los números.

Al respecto, las investigaciones de Terigi y Buitron (2013), Lerner (2005), Wolman y Ponce (2013) y Centurión y Saiz (2014) reportan que niños de segundo a quinto grado de primaria y de primer grado de secundaria siguen construyendo reglas originales (no siempre convencionales) para explicar el funcionamiento de la escritura y lectura de números grandes. Como ejemplo, investigadores argentinos Wolman y Ponce (2013) muestran que niños de quinto grado consideran que mover el punto de lugar en una escritura numérica puede cambiar el valor del número (el uso del punto en Argentina equivale al de la coma en México); así un 10,000 “diez mil” se convertiría en “un millón” con solo cambiarle la coma de lugar, así 1,0000. De esta manera, pese a que se espera que al finalizar la primaria los alumnos cuenten con conocimientos convencionales sobre el SND, éste es un sistema complejo cuya apropiación se da en el transcurso de toda la escolaridad básica.

Estos hechos se relacionan a los resultados de las evaluaciones de logro EXCALE (Examen para la calidad y el logro educativo, 2010, 2009 y 2008) que muestran que niños de 3° y 6° de primaria, así como 3° de secundaria tienen un bajo porcentaje de logro en reactivos de valor posicional y escritura de números con cero (49 %; 41% y 41%, respectivamente). A partir de esos resultados, podemos formular algunas preguntas: ¿los bajos resultados se deben a deficiencias en la enseñanza? (considerando que ésta incluye varios factores además de la práctica docente, como los programas de estudio y demás materiales curriculares); ¿las dificultades de los alumnos están relacionadas con un proceso paulatino de apropiación del SND?; ¿se conjugan ambos aspectos en la obtención de tales resultados?

En esta ponencia presentamos algunos de los hallazgos de la investigación de Ávalos (2016), los cuales aportan elementos para abordar las preguntas anteriores. En dicha investigación nos propusimos identificar los conocimientos sobre el SND que alumnos de sexto grado de primaria ponían de manifiesto al resolver sumas horizontales y al justificar los resultados de esas sumas.

Como lo han mostrado diversos trabajos (por ejemplo, Parra, 1994; Mochón y Vázquez, 1995), existe una relación estrecha entre el sistema de representación numérico y los cálculos que éste permite realizar. Parra (1994) señala el poderoso vínculo entre ambos aspectos: “los procedimientos de cálculo mental se apoyan en propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, y ponen en juego diferentes tipos de escritura de los números” (pp. 222-223).

Consideramos necesario abonar a la investigación con estos grupos de edad y hacerlo a través de la resolución de operaciones; en este caso, mediante sumas horizontales con determinadas características, como se verá más adelante.

DESARROLLO

CARACTERÍSTICAS DEL SND

Los sistemas de numeración constituyen inventos humanos que resolvieron el problema que implica contar, registrar y comunicar información numérica. Históricamente se ha buscado que esa representación de cantidades sea regular y breve; nuestro SND es ejemplo de ello: los números de un mismo orden se escriben con el mismo número de cifras (unidades, una cifra; decenas, dos cifras, etc.). Y con sólo nueve símbolos se puede escribir cualquier cantidad, sin importar su tamaño.

Las características específicas que le confieren al SND su regularidad y economía de símbolos son: sus agrupamientos, su principio de base, su carácter posicional y el uso del cero. (Ifrah, 1987; Martí, 2005). Los *agrupamiento*s son recurrentes de diez elementos (siempre que se tengan diez elementos, se creará un nuevo orden Respecto al *principio de base*, el número de elementos de la base coincide con las diez cifras que se usan para escribir todos los números imaginables.

Por otro lado, nuestro sistema de numeración es *posicional*, lo cual implica que cada cifra en él tiene dos valores, uno absoluto y otro que le da la posición dentro de la cadena numérica. Además, si una posición está vacía, usamos *el cero*.

Estas características de funcionamiento se fueron configurando a lo largo de 4500 años de historia. Particularmente la introducción del cero se dio empujada por la necesidad de calcular y registrar las operaciones. Broitman et al. (2011) señalan al respecto:

…la introducción del cero y de un sistema posicional permitía la representación escrita de las mismas manipulaciones del ábaco, ya que al llegar a 10 (o superarlo) en la columna de las unidades, también se podía “llevar uno” a la columna de las decenas. Permitía manipular de forma simbólica cualquier agrupación y operación que anteriormente se llevaba a cabo con el ábaco. (p. 13).

Las características de este sistema numérico posibilitan entonces la resolución de cálculos, ya sea con algoritmos en columnas o con cálculo mental.

PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO VINCULADOS A CONOCIMIENTOS DEL SND

Existe un procedimiento de cálculo mental referido en la literatura como “si…entonces” (Lerner, 2005) o “camino abreviado” (Mochón y Vázquez, 1995). Consiste en sumar, restar, multiplicar, unidades conocidas y luego poner cero. Por ejemplo, cuando un alumno quiere saber el resultado de 30 + 60 =, puede indicar que suma 3 y 7, le dan 9; luego agrega el cero y recupera la cantidad íntegra de 90. Este proceder está relacionado con el valor posicional y la multiplicación de la potencia de base. Para que el niño pueda usarlo, es necesario que tenga un amplio repertorio de cálculos conocidos (Parra y Saiz, 1999; Broitman, Itzcovich, Novembre, Escobar, Grimaldi, Ponce, Sancha, 2013).

Otro procedimiento de cálculo mental es el de descomposición de números. Implica poder pensar un número de múltiples formas, flexibilizando el cálculo; por ejemplo 23 se puede descomponer en 20 + 3 o en 10 + 10 + 3, etc. Ello permite operar con números "redondos" (terminados en cero) que son más fáciles de calcular. En este caso, los números redondos hacen clara referencia a la base decimal del sistema de numeración y los agrupamientos base 10.

Finalmente, otro recurso para el cálculo mental es apoyarse en las propiedades de las operaciones, por ejemplo, en la propiedad conmutativa y asociativa de la suma para reacomodar los sumandos y agruparlos de acuerdo con las necesidades de cálculo del usuario. En el caso de 600 + 4000 + 8 + 20 + 90 = es posible conmutar los sumandos del orden mayor al orden menor, quedando 4000 + 600 + 90 + 20 + 8; posteriormente se podrían asociar o agrupar los sumandos 90 + 20, para llevar a cabo la transformación decimal.

Las vinculaciones entre SND y cálculo mental quedan identificadas con claridad en los ejemplos anteriores. Ahora bien, nos propusimos indagar si los alumnos formulan explícitamente esa relación.

METODOLOGÍA

El interés de este trabajo fue identificar los conocimientos sobre el SND que los alumnos referían al solucionar cálculos. Procuramos un acercamiento profundo a sus respuestas, por lo cual el diseño de nuestra investigación es de tipo cualitativo y de alcance exploratorio.

La muestra la constituyeron 10 alumnos de sexto grado (12 años en promedio) que cursaban el último bimestre del año escolar. Fue una muestra no probabilística por conveniencia. Se eligió este grado porque las investigaciones sobre conocimientos del SND están menos desarrolladas en este grupo de edad que en niños menores; además se espera que en este momento de la trayectoria escolar diversos conocimientos se encuentren consolidados. Se diseñó un instrumento de indagación conformado por cinco sumas horizontales (Figura 1). Cada alumno resolvió de manera individual esas sumas y, una vez que los alumnos resolvían cada operación (o ítem), a través de una entrevista clínica se procedía a solicitarles que explicaran y justificaran su procedimiento.

A continuación, presentamos una descripción de las variables didácticas de cada ítem, las respuestas esperadas y los conocimientos que buscamos explorar con los alumnos en cada operación.

Ítem 1 y 2

5000 + 300 + 60 + 4 =

2000 + 80 + 2 =

En estos ítems se presentan los sumandos en orden decreciente, de millares a unidades. Son cálculos simples, sin transformación de órdenes. Esperamos que los alumnos respondieran que es una suma que se puede resolver mentalmente y que ofrezcan una justificación al respecto. Las preguntas de la entrevistadora fueron: ¿cuál fue tu resultado?, ¿en qué te fijaste para resolverlo de esa manera?"

Figura 1. Instrumento de indagación utilizado en la entrevista clínica.

Sumas horizontales

Indicaciones: te voy a presentar unas operaciones quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes cómo lo vas haciendo.
Si en algún momento necesitas comprobar un cálculo, te puedes apoyar usando la calculadora.

5000 + 300 + 60 + 4 =

2000 + 80 + 2 =

300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =

600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =

9000 + 1700 + 800 + 5 =

Ítems 3 y 4

300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =

600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =

A diferencia del 1 y 2, en estos ítems hay que llevar a cabo agrupación decimal. Esperamos que los entrevistados recurran a algunas estrategias de cálculo como la conmutatividad y la propiedad asociativa de la suma. Las preguntas previstas en el interrogatorio clínico fueron: “¿Cómo resolviste tu cálculo?”, “¿Por qué se tienen que juntar el 80 y el 40; o el 400 y 600?”

Ítem 5

9000 + 1700 + 800 + 5 =

Este ítem se presenta a los alumnos con sumandos en orden de mayor a menor (como el 1). La diferencia respecto a los anteriores es que uno de los sumandos está agrupado (1700) lo cual implica que los alumnos lo desagrupen y vuelvan a agrupar para llevar a cabo la transformación de órdenes. Las preguntas planteadas a los alumnos fueron “¿cómo resolviste tu cálculo?, ¿por qué decides sumar primero el 700 al 800 (en caso de que el entrevistado opere de esta manera)?”.

Las entrevistas fueron videograbadas y después transcritas para su análisis.

RESULTADOS

Emergieron de este análisis tres procedimientos de cálculo:

a) Procedimiento de “poner-juntar-acomodar” los números

b) Cálculo apoyado en el algoritmo de la suma en columnas

c) Cálculo mental

Presentaremos únicamente los resultados referentes al inciso a) y c) por ser los procedimientos que los alumnos justificaron haciendo referencia a conceptos y reglas de funcionamiento del SND.

Procedimiento denominado “Poner-juntar-acomodar” números.

Consiste en utilizar los ceros del sumando mayor para poner encima de ellos la primera cifra de los sumandos menores. En el caso de 5000 + 300 + 60 + 4 =, implica colocar el 5000, luego el 3 de 300 sobre el cero de las centenas; el 6 del 60 sobre el cero de las decenas y el 4 en el cero de las unidades. En la Figura 2 se presentan dos registros de alumnas que muestran gráficamente este procedimiento.

Cuatro de los diez entrevistados usaron este procedimiento para resolver el ítem 1, 2 y 3 (en este último ítem primero adicionaron los sumandos del mismo orden y acomodaron los sumandos en orden decreciente).

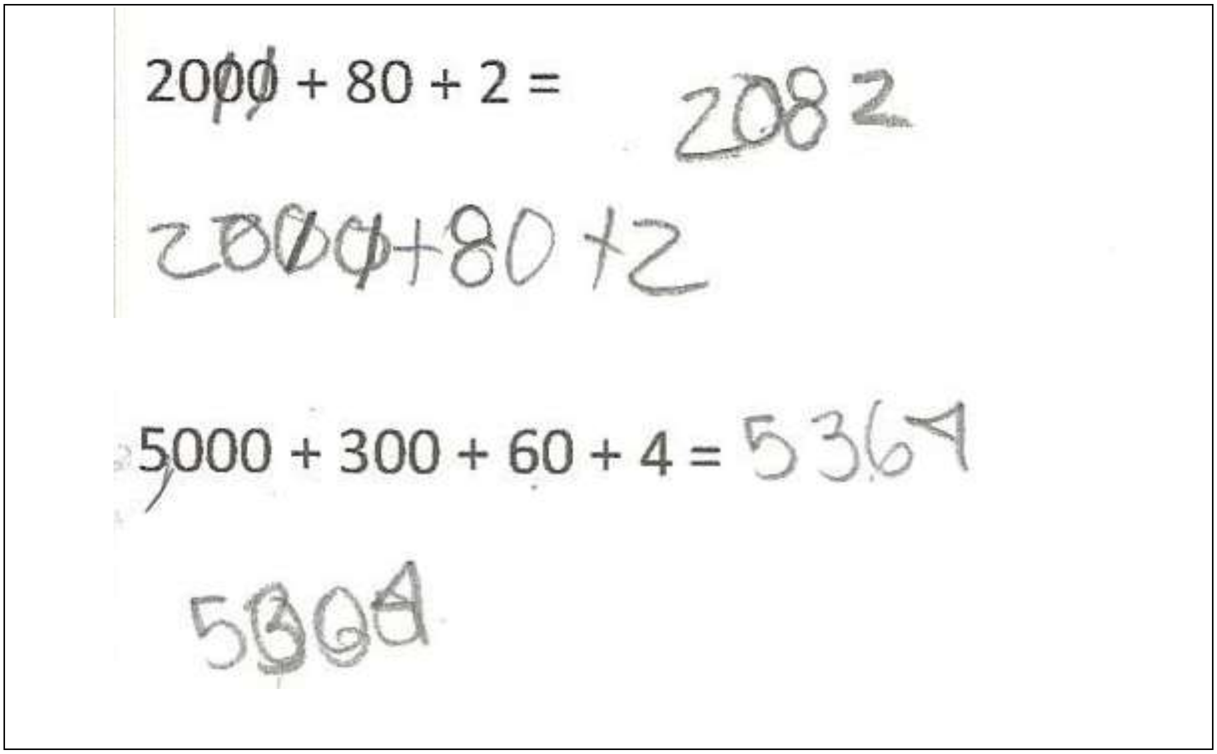

Figura 2. Registro gráfico del procedimiento “Poner-Juntar-Acomodar números” efectuado por dos alumnas.

Esta forma de proceder ha sido reportada por Lerner (2005), quien entrevistó a niños de ocho años. Estos alumnos lograron poner en acto esa estrategia para obtener un resultado, pero no la pueden explicitar. En cambio, los alumnos de sexto ofrecen explicaciones donde conceptos como el valor posicional y el acomodo de los órdenes (de millares a unidades) se hacen presentes como conocimientos óptimos para explicar la razón por la cual esa estrategia funciona. En palabras de los alumnos de sexto, para usar este procedimiento deben cumplirse dos condiciones.

Primera condición. Los sumandos deben estar acomodados en orden decreciente (millares, centenas, decenas, unidades). Por ejemplo, para 5000 + 300 + 60 + 4 =, Ale dice lo siguiente:

Ale- Lo que hago es localizarlos, es poner los números en unidades, decenas y centenas, entonces eso me daría cinco mil, trescientos, sesenta y cuatro.

Segunda. No debe haber dos sumandos del mismo orden. A Majo se le pregunta cuándo es pertinente "acomodar números" y ella explica:

> *Majo- Acomodar sería si tengo quinientos (escribe 500 + 90 + 8), más noventa, más ocho ya sabría que es (escribe el número 500) que el cinco es normal; el nueve tomaría su lugar el segundo cero (colocaría el 9 en el cero de las decenas de 500) y el ocho el cero (refiriéndose al cero de las unidades); ese es acomodarlo. Y sumarlo como es la misma cantidad, me saldría lo mismo. Pero como aquí (señalando el ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 =) tengo dos números que tienen las mismas cifras, la misma cantidad de números, ya aquí sería diferente.*

Estas reglas formuladas por los alumnos están sustentadas en conocimientos del SND relacionados con los órdenes y su presentación decreciente, con el valor posicional y con la posición que el cero permite guardar. Sobre los órdenes, los alumnos se fijan en el número de ceros, lo cual es una señal explícita del agrupamiento al que pertenecen. En cuanto a la presentación decreciente, ordenar los sumandos de mayor a menor pareciera ser una condición que les facilita a los alumnos sobre-escribir las cifras sobre los ceros. Este hecho guarda relación con el valor posicional, pues sólo conservaron la unidad de cada orden. Además, implica conocer la función del cero como marca de posición. Esto implica que los ceros guardan el espacio que será ocupado por cierto número de unidades de algún orden.

Nos parece de suma relevancia que los alumnos de sexto estén expresando condiciones en la cuales una estrategia de resolución de un cálculo puede usarse, y más relevante aun que en esas condiciones emerjan conocimientos sobre el sistema de numeración y sus reglas.

Procedimientos de resolución que se apoyaron en el cálculo mental.

El total de los alumnos (10) recurrió a diversas estrategias de cálculo mental. Tales estrategias fueron diversas: apoyo en sumas conocidas a las que se les agrega cero (o "camino abreviado"), apoyo en propiedades de la suma como la asociatividad y conmutatividad, descomposición de sumandos y cálculo mental oral. Por razones de espacio, expondremos sólo dos de ellas y las formulaciones a través de las cuales los alumnos las vinculan con conocimientos del SND. Para conocer a detalle otros procedimientos de cálculo mental de los aquí reportados, remitirse a Ávalos (2016).

1. Aplicación de la propiedad asociativa y conmutativa de la suma.

Cuando los alumnos tuvieron que resolver ítems con transformación como el 3, 4 y 5, fue común que recurrieran a asociar y cambiar de lugar los sumandos. Por ejemplo, en 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =, la alumna Yaz aplica la propiedad asociativa de la adición al sumar las decenas (obtiene

120), y luego eso lo suma al 300. Cabe resaltar que altera el orden de los sumandos para flexibilizar su cálculo:

> *Entrevistadora (E)- Vamos a la que sigue. (Ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =)*
> *Yaz- (Aa10 dice en voz baja) Trescientos... pues ahora está todo revuelto, ya no está como en este orden (señala los ítems 1 y 2 donde los sumandos están en orden decreciente); entonces aquí son cuatro mil trescientos... ochenta y cuarenta son ciento veinte... estos dos lo que voy a hacer es poner aquí (debajo de la operación) ciento veinte.*

Como se puede notar en la Figura 3, Yaz se apoya de algunos trazos para materializar las asociaciones de los sumandos.

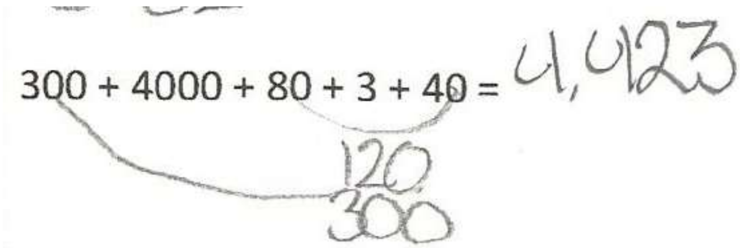

Figura 3. Producción de la alumna Yaz donde registra los pasos que da para asociar los sumandos de la operación.

Los conocimientos sobre el SND que los alumnos manifestaron para justificar este procedimiento parecen seguir una secuencia: primero tratan de identificar sumandos con las mismas características, en palabras de Majo "…hay dos números que tienen el mismo valor que sería la decena" (refiriéndose al 80 y al 40). Una vez que identifican los sumandos de un mismo orden, se hace pertinente la agrupación decimal. Sam lo formula en los siguientes términos.

E- Entonces tú te fijas en estos dos números que son los que sumas (80 y 40); ¿en qué te fijaste para sumar este par de números?
Sam- En el ochenta y en cuarenta y luego para completarlo al cien, le quité veinte al cuarenta y ya dejé los otro veinte del cuarenta.
E- ¿Y eso siempre pasa o cuándo es cuando hay que hacer estos complementos a cierto número?
Sam- Cuando, por ejemplo, o sea, si nada más fuera el ochenta pues ya no hay que completar nada, pero como eran ochenta más cuarenta no se puede poner cuatro mil trescientos ochenta cuarenta entonces ya hay que completar al cuatro mil cuatrocientos.

Cuando se les pregunta qué pasó con las centenas que tenían en la operación, una de las alumnas indica la transformación:

E- ¿Tú sabes qué pasó con esas centenas que ya no están en el resultado?
Ale- Las convertí en unidades de millar.

En contexto de una situación de suma, los alumnos pudieron justificar sus decisiones usando conceptos como unidades, decenas, centenas (órdenes) y apoyándose en la regla de cambio de la agrupación decimal. Esta regla queda explicitada en palabras de Sam cuando indica que, si tiene un 80 y un 40, le quita 20 al 40 para completar de 80 al 100. ¿Por qué decide completar al 100? Podemos afirmar que los conocimientos sobre la agrupación base 10 subyace a estas decisiones.

2. Estrategia de "Camino abreviado".

Como ya se mencionó, esta estrategia es usada por niños desde edades tempranas (Lerner, 2005). En este trabajo pudimos identificar que algunos de los alumnos también la utilizaron, sin embargo, no pudimos indagar a profundidad sus conocimientos sobre el SND que pueden explicar este procedimiento. Podemos afirmar que los alumnos usaron la estrategia como medio de justificar su procedimiento; como si efectuar la operación mediante el camino abreviado tuviera el rango de conocimiento que comprueba y valida la respuesta. Un uso parecido podría ser el denominado “hechos numéricos” (Fernández, 2008) por el cual los niños ofrecen como justificación el apoyo en sumas que ya conocen. Por ejemplo, preguntamos al alumno Dani sobre las razones por las cuáles decide llevar a cabo un cálculo como el 9000 + 2500 en el ítem 9000 + 1700 + 800 + 5=. Dani ya había calculado 1700 + 800 = 2500, ahora procedía sumarlo al 9000. Él justifica esta operación haciendo alusión a sumas conocidas a las cuales les agregará los ceros pertinentes. Dice que es 9 más 2.5 (9 de 9000; 2.5 de 2500). En sus palabras:

E- ¿Cómo decides ahora sumarle esos dos mil quinientos al nueve mil?
Dani- Serían... nueve más dos... serían once...
E- ¿Y luego?
Dani- Bueno es que ahí serían nueve más dos... ¿punto cinco?
E- Nueve más dos punto cinco...

La alumna Elena también usa la estrategia de sumas conocidas a las que se les agrega cero para justificar la agrupación decimal, como se lee a continuación.

E- Cuéntame, ¿en qué te fijaste para sumar primero estos dos? Porque empezaste sumando el ochenta y el cuarenta. Cuéntame ¿cómo le hiciste?
Elena- Este, pues supongamos que no tenemos el cero (el cero del 80 y el 40) y sumo ochenta (sic) más cuatro y da doce, más tres da ciento veintitrés… Perdón este, me equivoqué, ciento... daría (pensando) ciento... ciento...
…
E- Me habías dicho ocho más cuatro, igual a doce, ¿dónde está el ocho y dónde está el cuatro? ¿Éste qué es?, ¿un ocho? (señalo el 80 de la operación 300 + 4000 + 80 + 4)?
Elena- Es un ochenta, pero supongamos que ahorita no está el cero, porque el cero se pondría al final o como si no existiera…

Como notamos, se usa la misma estrategia de resolución como validación de un resultado. Pareciera que obtener un resultado con cuentas reducidas a dígitos (camino abreviado) es una herramienta poderosa y suficiente para argumentar sobre un resultado.

CONCLUSIONES

Respondiendo a la pregunta de investigación sobre qué conocimientos del SND se ponen en juego al resolver sumas horizontales, encontramos que los alumnos justificaron sus cálculos apoyados en el valor posicional y la regla de agrupación decimal. Los alumnos establecen el vínculo entre las operaciones y las reglas del sistema que las posibilitan. Estos conocimientos podrían representar un punto de partida para trabajar la explicitación y la construcción de conocimientos convencionales sobre el SND, ésos que se establecen y pretenden alcanzar en planes y programas de estudio. Como menciona Mochón y Vázquez (1995), el trabajo intencionado con cálculo mental se hace necesario para profundizar en conocimientos sobre el sistema de numeración.

Por otra parte, notamos que no todas las estrategias de cálculo mental fueron sencillas de vincular con conceptos y reglas del SND (tal es el caso del “camino abreviado”). Consideramos que un trabajo de investigación dirigido a conocer lo que saben los alumnos de esta estrategia y cómo la justifican sería pertinente.

Los alumnos de este estudio explicaron el funcionamiento de técnicas de cálculo recurriendo a las reglas del SND. Este hallazgo resulta más valioso considerando que esta relación no se estudia sistemáticamente en la escuela (de acuerdo con una revisión al Plan y Programa SEP, 2011). Ello nos habla un continuo proceso constructivo en el aprendizaje del complejo sistema numérico, cuya apropiación transcurre a lo largo de la escolaridad básica y no sólo en sus primeros años.

REFERENCIAS

Alvarado, M., y Ferreiro, E. (2000). El análisis de nombres de números de dos dígitos en niños de 4 y 5 años. *Lectura y Vida. Revista Latinoamericana de Lectura*, año 21, n°1, pp. 6-17.

Ávalos, O. (2016). *Conocimientos sobre el valor posicional en niños de sexto grado de primaria.* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México.

Broitman, C. (et al.) (2013). *Explorar en matemáticas 3 libro del docente*. Argentina: Santillana.

Broitman, C, Grimaldi, V. y Ponce, H. (2011). *El valor posicional. Reflexiones y propuestas para su enseñanza*. Bueno Aires: Santillana

Centurión, L. y Saiz, I. (Noviembre de 2014) Conocimientos, herramientas de control y conflictos en la producción de escrituras de números grandes en el nivel secundario. En Saiz, I. (2014) "La enseñanza de la numeración, la suma y la resta en el primer ciclo de la Educación Básica". Conferencia llevada a cabo en la Subsecretaria de Educación Básica de la Secretaria de Educación Pública. Ciudad de México.

Fernández, N. (2008). *Los numerales gráficos como herramientas de solución a problemas aditivos en edades tempranas*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro, México.

Ifrah, G. (1987). *Las cifras, historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, *Explorador Excale*. <http://www.inee.edu.mx/explorador>, [octubre 2016].

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, C. y Saiz, I. (1994). *Didáctica de las matemáticas.* Buenos Aires: Paidós.

Lerner, D. (2005). ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. En Alvarado, M, y Brizuela, B (comps.) (2005), *Haciendo Números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp.147-197). México: Paidós.

Martí, E. (2005). Las primeras funciones de las notaciones numéricas. Una mirada evolutiva. En Alvarado, M, y Brizuela, B (comps.) (2005), *Haciendo Números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp.51-80). México: Paidós.

Mochón, S., y Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática*,*7*(3), pp. 93-105.

Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. Parra y Saiz (comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós.

Saiz, I, y Parra, C. (1999) *Hacer Matemáticas en 5°.* Buenos Aires: Estrada

SEP (2011a). Plan de estudios 2011. Educación básica. México: SEP

Terigi, F, y Buitron, V. (2013). Los aprendizajes sobre el sistema de numeración en el primer ciclo en escuelas primarias urbanas. Estudio exploratorio en distintos contextos didácticos. *Educación, Lenguaje y Sociedad*, volumen X N°10 (Diciembre 2013), pp. 13-39.

Wolman, S. y Ponce, H. (2013). Relaciones entre la escritura de números y su designación oral: el uso de puntos en niños que ya dominan un rango importante de la serie. En Broitman, C. (comp.) (2013). *Matemáticas en la escuela primaria (1). Números naturales y decimales con niños y adultos (pp 203-229)*. Buenos Aires: Paidós.