



EL CONCEPTO DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONES EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA MEXICANA ENTRE 1960 Y 2011

ALICIA ÁVILA STORER

JOSÉ LUIS CEDILLO OSORNIO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL-AJUSCO

TEMÁTICA GENERAL: EDUCACIÓN EN CAMPOS DISCIPLINARES

RESUMEN

Se presentan los resultados de una investigación documental desarrollada a la luz de los siguientes objetivos: Conocer el tratamiento didáctico dado al concepto de equivalencia de fracciones en los currículos oficiales de la Educación Primaria Mexicana entre 1960 y 2011. Poner de relieve la importancia de un buen tratamiento de la equivalencia de fracciones para la comprensión de estos números. Identificar las características de cada una de las propuestas correspondientes al período mencionado, así como las fortalezas y debilidades en el tratamiento del tema. Poner de relieve aspectos valiosos que podrían ser útiles para pensar nuevas propuestas curriculares para la educación primaria en este tema así como debilidades que convendría evitar en el futuro. Mostrar que el conocimiento y análisis de propuestas educativas previas es útil para la planeación de nuevas propuestas educativas.

Palabras-clave: propuestas curriculares, enseñanza de las matemáticas, enseñanza de la equivalencia de fracciones, historia de la enseñanza, educación primaria

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente las fracciones ha sido uno de los contenidos de la educación primaria reconocidos como más difíciles de enseñar por los profesores de este nivel educativo. Es común que ante cualquier interrogatorio o diálogo con ellos, sin importar el contexto en que éste se dé, el tema que aparece de inmediato es precisamente el de las fracciones. Hay muchos otros contenidos que, aun siendo problemáticos, no son percibidos como tales por los profesores, en cambio en el de fracciones esta percepción es muy clara. Los resultados de los exámenes aplicados por el INEE (Bases de datos Excale 2005, 2007, 2009, 2013) son coincidentes con la mirada docente. Como resultado de dichos exámenes se reporta que identificar fracciones equivalentes mayores a la unidad se mantuvo constante con sólo un 40% de aciertos durante 2005, 2007 y 2009. Otro contenido que hace necesaria la equivalencia de fracciones (en adelante equivalencia) - resolver un problema que implique sumar fracciones con distinto denominador - se mantuvo también constante con únicamente un 26% de respuestas correctas durante los años antes mencionados. Situación similar es reportada en el año 2013 (Base de datos Excale), donde comparar fracciones alcanza sólo un 33% de aciertos y resolver un problema que implica sumar fracciones, un 22%. Si bien algunos investigadores han elaborado y experimentado propuestas de enseñanza de estos números - e incluso algunas de ellas han sido incorporadas al currículum oficial - la situación parece mantenerse en un nivel de logro escolar muy bajo y sin perspectivas de mejora, según muestran los Excale.

Importancia de la equivalencia de fracciones. T. Kieren (1988), uno de los precursores del análisis epistemológico y didáctico de las fracciones, consideró a la equivalencia como uno de los tres mecanismos constructivos útiles como herramientas mentales para desarrollar el concepto de fracción.

La expresión equivalencia de fracciones refiere al hecho de que, fracciones como $1/5$, $2/10$, o $4/20$ son representantes del mismo número racional, aunque lo representen con una expresión numérica diferente. Es indispensable que tal idea haya sido construida para que las fracciones sean comprendidas y sea posible operar con ellas de manera que las transformaciones implicadas se realicen con significado. Pongamos un ejemplo simple: para sumar o restar fracciones con distinto denominador, como $2/5 + 3/4$, es necesario entender que – al no poder sumarlas directamente porque tienen denominadores diferentes - las fracciones deben sustituirse por otras que, aun siendo expresadas de manera distinta, conservan el mismo valor, esto es, siguen representando los mismos números. Comprender lo anterior permitirá operar los números de manera correcta. Pero, además de apoyar la resolución de la suma y la resta, la equivalencia es también la base para construir otros conocimientos relacionados, como el orden entre las fracciones y la simplificación de fracciones (Maza, 1999).

Contextualización del problema. Ahora bien, para contextualizar nuestro problema de investigación en el campo de la indagación sobre las fracciones, tomamos como referencia a autores

que han estudiado desde una perspectiva epistemológica estos números y han abierto o propuesto perspectivas educativas sobre ellos: H. Freudenthal (1983) y T. Kieren (1988), pioneros de los estudios sobre las fracciones desde una perspectiva educativa; también revisamos los trabajos de autores de habla española que continuaron con esta línea de investigación: S. Llinares & V. Sánchez (1997), S. Llinares, (2003), Mancera (1992), y S. Mochón (s/f), quienes retoman las ideas de Freudenthal y las de Kieren para plantear nuevos estudios y reflexiones sobre estos números. Los puntos de acuerdo identificados en los escritos de estos investigadores iberoamericanos son los siguientes:

- La comprensión de las fracciones implica un razonamiento matemático complejo que debe desarrollarse de manera gradual e integral durante toda la educación básica.
- El aprendizaje del concepto de fracción en la educación primaria implica una serie de procesos graduales que requieren tiempo para poder realizarse.
- Emplear el mayor número de representaciones en la enseñanza de las fracciones ayuda a una comprensión más amplia de estos números.
- Existen diferentes significados o sub-constructos del concepto de fracción: la fracción como parte de un todo, la fracción como un cociente (resultado de un reparto), la fracción como una medida, como una razón y como un operador; aunque estos se asumen con algunos matices..
- Las interpretaciones más abstractas de las fracciones como son los puntos en la recta numérica requieren conocimientos y habilidades matemáticas que se van desarrollando poco a poco.
- Antes de iniciar las operaciones con fracciones, principalmente la adición y sustracción, el alumno debe tener una comprensión amplia de la **equivalencia**, la cual es fundamental para el entendimiento de este tipo de números y la realización de operaciones con ellos.

Ahora bien, la equivalencia es fundamental para una comprensión amplia de las fracciones y todos los autores señalan su importancia; sin embargo, sus referencias sobre el punto son escuetas. Al parecer, no se han realizado (o no se han difundido) estudios rigurosos que aborden desde un punto de vista didáctico la noción de equivalencia. Pero los resultados obtenidos en los Excale, nos permitieron constatar que la noción de fracción sigue siendo un reto de la educación primaria y que, específicamente, la noción de equivalencia es problemática, por lo que se justifica considerarla objeto de investigación.

Preguntas de investigación. De lo hasta aquí expuesto deriva nuestro interés por revisar las propuestas de enseñanza sobre el tema, por lo que nos planeamos las preguntas de indagación que se anotan a continuación.

En los currículos oficiales de la educación primaria mexicana vigentes entre 1960 y 2011:

- *¿Qué situaciones didácticas, actividades y/o materiales se han utilizado para tratar el concepto de equivalencia?*

- *¿Qué significados o sub-constructos de las fracciones se han vinculado al concepto de equivalencia a lo largo de ese período?*
- *¿Qué representaciones de las fracciones se han utilizado para trabajar el concepto de equivalencia?*
- *¿Qué contextualizaciones, aplicaciones y usos se le han dado al concepto motivo de este escrito?*
- *¿Cuáles son las diferentes definiciones o formalizaciones del concepto que se han incorporado en los materiales curriculares?*
- *¿En qué momento del proceso de enseñanza y aprendizaje se han incorporado dichas formalizaciones?*
- *¿Qué fortalezas y debilidades se observa(n) en la(s) secuencia(s) utilizada(s) para trabajar la equivalencia?*

Nuestra hipótesis al iniciar la revisión de los materiales, era que en los distintos currículos ha habido aciertos didácticos que valdría la pena considerar en el planteamiento de mejoras a la enseñanza de este tema pero que, conforme a la tradición mexicana, esta recuperación no se ha realizado.

DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Marco y criterios para el análisis. Como antes se mencionó, la que realizamos fue una investigación documental centrada en la revisión y análisis de los programas, guías para el docente y libros de texto oficiales utilizados en la educación primaria en México el último medio siglo. El marco desde el cual se hizo la lectura de los trabajos se constituyó con base en los autores revisados; específicamente se consideró lo siguiente:

1. Las fracciones toman distintos significados, dependiendo de los “fenómenos del mundo” a los que se les asocie.
2. Estos distintos significados son: la fracción como parte-todo, la fracción como resultado de una medida, la fracción como cociente (resultado de un reparto o división), la fracción como una razón (relación multiplicativa entre un par de números), la fracción como un operador (un número que transforma otro número).
3. Las fracciones, como otros números, pueden ser representados de diversas maneras (mediante expresiones simbólicas de la forma a/b , mediante figuras sombreadas, mediante puntos en la recta, mediante expresiones decimales...)
4. Las fracciones en sí, y la equivalencia, pueden presentarse como simples números, o vinculados a un contexto, en situaciones problemáticas.

Etapas en la revisión de los materiales. La revisión de los materiales se realizó mediante acercamientos sucesivos que se describen en seguida.

1ª. Etapa. Búsqueda y recopilación de planes de estudio, programas y libros de texto gratuitos de matemáticas de primaria distribuidos por la Secretaría de Educación Pública que se han utilizado entre 1960 y 2011 en México.

2ª. Etapa. Revisión que permitiese identificar los contenidos, aprendizajes esperados y los procesos de enseñanza y aprendizaje vinculados a las fracciones propuestos en los distintos materiales.

3ª. Etapa. Identificación y selección de las diferentes lecciones, contenidos y actividades de cada libro y programa de educación primaria que tuviesen como tema central la equivalencia.

4ª Etapa. Análisis de los materiales seleccionados, orientado a:

- Identificar y analizar los distintos significados o sub-constructos de la fracción abordados en los programas y libros de texto
- Identificar y analizar el tipo de representaciones que se emplean en las lecciones que implican el concepto de equivalencia.
- Entender los diferentes usos y aplicaciones que se le ha dado al concepto de equivalencia en los planes y programas de estudio y los libros de texto.
- Reconocer las diferentes formalizaciones que se le han dado a la equivalencia en el sentido de hacer definiciones formales o no formales de este concepto.
- Registrar los aspectos adecuados utilizados en las diferentes secuencias de enseñanza del concepto de equivalencia (Cedillo-Osornio, 2016).

RESULTADOS

El currículo implementado en 1960. En ese período, a las fracciones se les denomina “quebrados”, lo que refleja la noción de fracción propia de este currículo: la fracción es vista como parte de algo que se ha fracturado, dividido. Como afirmaría Freudenthal (1983), se trata únicamente de la fracción como fracturador. En concordancia con lo anterior, la única interpretación trabajada es la de *parte-todo*, y las representaciones utilizadas aluden a esta idea, tal como se ve en la Figura 1.

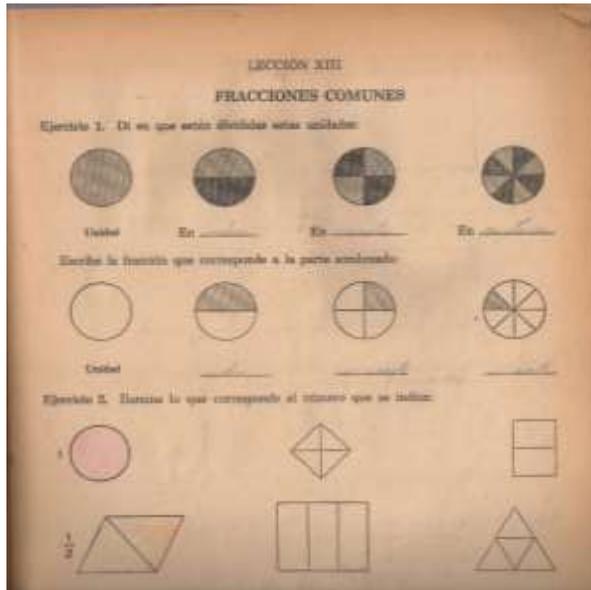


Figura 1. Mi Cuaderno de Trabajo de Tercer Año. Aritmética y Geometría y Estudio de la Naturaleza. SEP. 1960: 97.

Se debe considerar que en 1960 no se contaba con investigaciones en educación matemática enfocadas a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, que entonces la relación parte-todo era la única interpretación reconocida en la cultura matemática escolar.

En general, las nociones que se incorporan en este currículo se comunican directamente, y de manera rígida; se presentan definiciones obtenidas a partir de un único ejemplo basado en alguna representación gráfica o a partir de mostrar algún ejercicio referente a lo que se dice. Conforme a la concepción de aprendizaje prevaleciente en la época, las nociones, definiciones o procedimientos se presentaban como el primer punto de las lecciones.

Siguiendo esta perspectiva, la noción de **fracciones equivalentes** se da con base en dibujos de figuras planas: círculos, cuadrados y rectángulos. En el quinto grado se muestra una figura dividida en tercios y otra en sextos y se hace la comparación siguiente: $1/3 = 2/6$ porque, según se ve en la imagen, las partes coloreadas son “de igual tamaño y forma” aunque estén divididas de manera diferente. Después de hacer notar lo anterior, y reiterar la observación sobre otras figuras, se obtiene como conclusión que “el valor de un quebrado no se altera si tanto el numerador como el denominador se dividen o multiplican por el mismo número” (véase Figura 2).

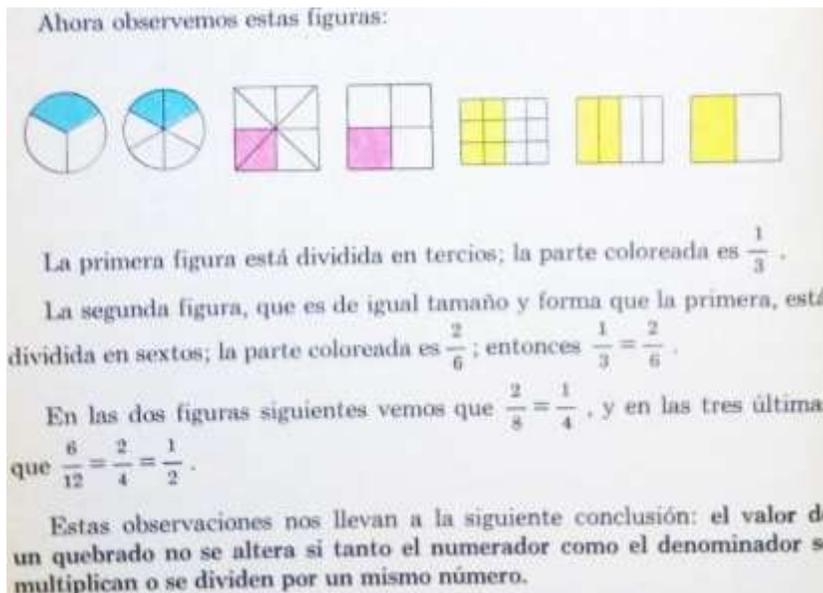


Figura 2. Incorporación de la idea de equivalencia y de un procedimiento para obtener fracciones equivalentes. Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría. (SEP, 1969:54).

También acorde con las concepciones de aprendizaje prevalecientes en aquella época, los algoritmos se enunciaban de manera directa en el libro. No se fomentaban procesos espontáneos o inductivos que promovieran su construcción o al menos su comprensión. Después de lecciones como la anterior, se mostraba a los niños cómo aplicar los procedimientos que se les transmitían, para resolver ejercicios. En el Cuaderno de trabajo de Aritmética y Geometría, se proporcionó una cantidad considerable de ejercicios con el fin de que los niños los practicara y memorizaran. Eran comunes páginas como la que se muestra en la Figura 3.

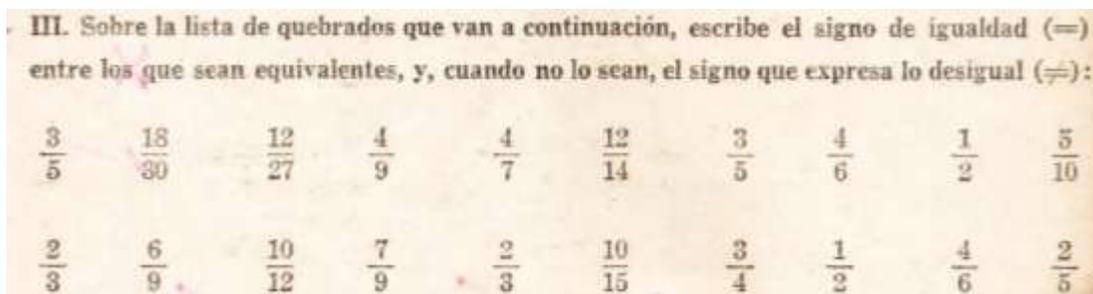
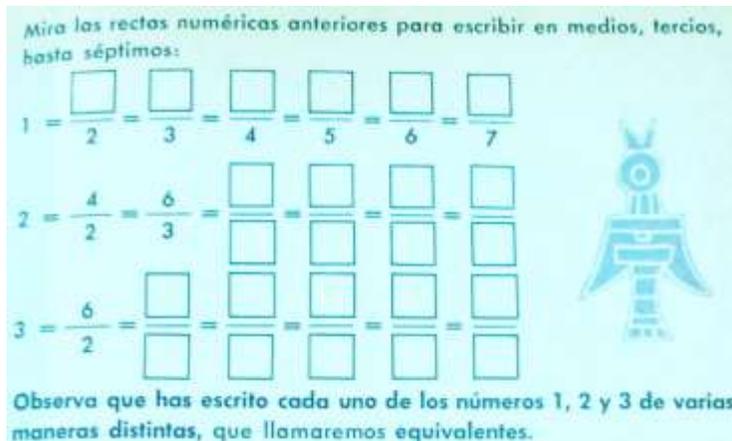


Figura 3. Ejercicio típico referido a equivalencia de fracciones. Mi cuaderno de trabajo de Aritmética y Geometría. Quinto Año (SEP, 1961: 80).

El espacio de aplicación de mayor interés de la equivalencia en este currículum fue la simplificación de fracciones, pues la resolución de problemas no se había incorporado como preocupación educativa, al menos no en este tema.

El currículo incorporado en 1972. Este es el currículo conocido como de “las matemáticas modernas”. En este caso, las ideas sobre las fracciones se ensancharon y se incorporó, además del significado parte-todo, el de la fracción como medida y como cociente, las cuales fueron también utilizadas para introducir la noción de equivalencia (por ejemplo, SEP, 1974: 109).

En esta oportunidad, según se decía en los libros para el maestro: “La tónica fundamental es que sean los mismos niños quienes vayan descubriendo las nociones” (Imaz, coord., 1977: 6). Desde tal enfoque, la obtención de las definiciones y los procedimientos se promovió de manera inductiva, a partir de la mostración y resolución de ejemplos. Es decir, en las lecciones primero se mostraban los ejemplos y ejercicios, o las formas de resolución de varios de ellos, y con base en la información (regularidad, regla) derivada de la resolución de varios ejemplos, se formulaba el procedimiento o la definición que interesaba elaborar. Por ejemplo, en la Figura 4, al finalizar una actividad basada en observar que el punto o los puntos de las rectas donde se colocaron diversas fracciones es el mismo, se concluye que: a) es posible representar un mismo número de maneras distintas; b) esas distintas maneras son equivalentes.



Mira las rectas numéricas anteriores para escribir en medios, tercios, hasta séptimos:

$$1 = \frac{\square}{2} = \frac{\square}{3} = \frac{\square}{4} = \frac{\square}{5} = \frac{\square}{6} = \frac{\square}{7}$$

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

Observa que has escrito cada uno de los números 1, 2 y 3 de varias maneras distintas, que llamaremos equivalentes.

Figura 4: Lección en la que se emplea por primera vez el término equivalente en el cuarto grado. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1974: 77).

Utilizando también un procedimiento inductivo, se introducen diferentes procedimientos para obtener fracciones equivalentes. Una vez “descubierto” el concepto de equivalencia, éste se aplica en otros contenidos: comparación y orden entre fracciones; resolución de sumas y restas de fracciones; problemas con estas operaciones; simplificación de resultados de las cuatro operaciones básicas hasta su mínima expresión. El concepto de equivalencia también se aplicaba en otros contenidos de matemáticas, como en la introducción y entendimiento de los números decimales y en el aprendizaje de la probabilidad.

El número y tipo de apoyos gráficos en este currículo fue muy superior al identificado en currículo de 1960; además de representarse las fracciones mediante figuras geométricas diversas y mediante conjuntos de objetos, se incluyó de manera enfática la representación de estos números como puntos en la recta numérica. De manera distinta a lo ocurrido en los años sesenta, donde los



Figura 6. Situación que promueve un reparto equivalente. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1994:94).

Es de subrayarse que, lo largo del trabajo con el concepto de equivalencia en este currículo, no se emplea lenguaje formal para comunicar información a los niños, ni para que ellos comuniquen los resultados de su trabajo; tampoco se dan definiciones específicas ni algoritmos únicos o convencionales. En vez de eso se trabajan ejemplos y situaciones que permitan al alumno inferirlos (o construirlos) a través de procesos informales que se institucionalizan al interior del grupo (Cedillo-Osorio, 2016).

Otra cuestión similar, derivada de la interpretación dada al constructivismo, es que se omitieron casi en su totalidad las definiciones y procedimientos canónicos para formular e institucionalizar los conceptos, incluido el de equivalencia. Este concepto se aplica en la resolución de problemas sencillos y ejercicios, pero no se formaliza con algún enunciado o definición.

Currículo implementado en 2011. En el año 2011, la Secretaría de Educación Pública, introdujo un nuevo plan curricular en la educación primaria. Este currículo está aún vigente, aunque los materiales de apoyo, como son los libros para el alumno de matemáticas fueron sustituidos por otros en el ciclo escolar 2015-2016. Debido a que en esta reforma curricular no identificamos una teorización sobre el aprendizaje de las matemáticas del todo clara, y a que los libros sufrieron diversas modificaciones año con año, mientras estuvieron vigentes, decidimos no presentar los resultados de nuestro análisis, sino hasta que lo hayamos madurado un poco más.

CONCLUSIONES GENERALES

En todas las propuestas revisadas se observa una importancia considerable otorgada al concepto de equivalencia pues en todas se desarrollan secuencias de actividades y lecciones que tratan su contenido. Pero el espacio dedicado al tema, las intenciones educativas, así como los significados y representaciones de las fracciones incluidas en programas y libros de texto fueron cambiando. El cambio estuvo alimentado por la evolución en las teorías del aprendizaje y el avance de las investigaciones en educación matemática. De una centración exclusiva en el sub-constructo *parte-todo*, representado mediante círculos, cuadrados o frutas, y que se enseñaba mediante transmisión, se pasó a una propuesta donde se incorporaron diversos significados de las fracciones y se promovió el descubrimiento como vía privilegiada de aprendizaje. La reforma del período constructivista llegó aún más allá y promovió a partir de situaciones problemáticas diversas la construcción de los conceptos vinculados a las fracciones, incluido el de equivalencia.

Consideramos que propuestas curriculares futuras, deberán mirar lo que se ha propuesto sobre los distintos temas incluidos en el currículo, y considerar recuperar aquello que fue fortaleza, o procurar evitar las debilidades identificadas. Por ejemplo, la reforma de las matemáticas modernas (introducida en 1972) incorporó una importante innovación al intentar que los alumnos descubrieran por sí mismos los conceptos, incluido el de equivalencia. Igualmente, el constructivismo introducido en 1993, llevó a elaborar una propuesta valiosa para la construcción de la idea de equivalencia, donde los alumnos resolvían problemas de reparto y medición en situaciones consideradas de su interés. Sin embargo, en nuestra opinión, esta propuesta descuidó la formalización de los conocimientos, cuestión que en un futuro, en nuestra opinión, habrá que rectificar.

REFERENCIAS

- Cedillo-Osornio, J.L. (2016). *El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011*. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo no publicada. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. [Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas] Traducción de Luis Puig (2001). En Varios Autores. *Textos seleccionados de Educación Matemática*. México: Cinvestav.
- Imaz, C. (Coord). (1977). *Matemáticas. Primer grado. Libro del maestro* (6a ed.). México: Secretaría de Educación Pública.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). *Bases de datos Excale*. Recuperado de www.inee.edu.mx el 15 de abril de 2017
- Kieren, T. E. (1988). "Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development". En: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and Operations on the Middle Grades*. (pp. 162-181). EUA: Reston/National Council of Teachers of Mathematics.
- Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En C. Chamorro (coord.) *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. (pp.188-220). Madrid: Síntesis.
- Llinares, S. & Sánchez, V. (2000). La relación parte-todo. En *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
- Mancera, E. (1992). Significados y Significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática*. 4 (2), 30-53.
- Maza, C. (1999). Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de fracciones. *Suma*. 31, 87-95.
- Mochón, S. (s.f.). *Fracciones: Algo más que romper un todo*. México: Sección de Matemática Educativa del Cinvestav. (Documento no publicado).
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1960). *Mi cuaderno de trabajo de tercer año. Aritmética y Geometría y Estudio de la Naturaleza*. México: Conaliteg.
- SEP. (1961). *Mi cuaderno de trabajo de quinto año. Aritmética y Geometría*. México: Conaliteg.
- SEP. (1969). *Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría*. México: Conaliteg.
- SEP. (1993). *Plan y programas de estudio de educación básica primaria*. México: Fernández Editores.
- SEP (1974). *Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto Grado*: Conaliteg



SEP (1994). *Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.