

LOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS SOBRE EL TRIÁNGULO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA VIGENTES.

GRISELDA GONZÁLEZ ARRIAGA

ESCUELA NORMAL RURAL "GRAL. MATÍAS RAMOS SANTOS", SAN MARCOS,
ZACATECAS

FIDEL DELGADO CASTILLO

ESCUELA NORMAL RURAL "GRAL. MATÍAS RAMOS SANTOS", SAN MARCOS,
ZACATECAS

LUIS MANUEL AGUAYO RENDÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL UNIDAD 321, ZACATECAS

TEMÁTICA GENERAL: CURRÍCULUM

Resumen

La presente ponencia muestra los resultados de la investigación realizada en los libros de texto de educación primaria vigentes con respecto a los conceptos geométricos sobre el triángulo. Las valideces de las conjeturas geométricas rebasarán la comprobación empírica mediante razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación. Para que lo anterior suceda, se precisa de una adecuada transposición didáctica (Chevallard, 1997), entre aquellos saberes que conforman el estudio científico de la geometría y los que pueden ser plausibles de estudiar en el contexto escolar. El presente trabajo analiza los conceptos geométricos del triángulo que aparecen en los libros para el maestro y el alumno, el tipo de tareas que se proponen y el paradigma geométrico dominante. En los resultados, se da cuenta el cómo el tipo de actividades sugeridas, confiere la responsabilidad al profesor sobre la transposición de saberes mediante el diseño de tareas que enriquezcan el razonamiento geométrico. Para lo cual, el docente requiere de herramientas teóricas y didácticas que deben ser adquiridas en los distintos procesos de formación.

Palabras clave: *Conceptos geométricos del triángulo, libros de texto, educación primaria, espacio de trabajo geométrico.*

INTRODUCCIÓN

La geometría ha sido objeto de estudio desde tiempos antiguos, las primeras civilizaciones se enfrentaron a la necesidad de comprender las características de la arquitectura en el diseño de sus construcciones, en la medición y distribución de los terrenos de cultivo y en el espacio ocupado por un cuerpo. Éstas y otras problemáticas mantuvieron el interés por el estudio sistemático de sus propiedades.

Los primeros conocimientos geométricos de carácter práctico se atribuyen a civilizaciones como la Babilónica, con el invento de la rueda contribuyeron al conocimiento de la circunferencia; posteriormente, fueron los egipcios y griegos quienes profundizaron en su estudio, prueba de ello es que la geometría como ciencia surge en el siglo VI. El geómetra Tales de Mileto sostuvo que los hechos geométricos deben sustentarse por postulados en vez de la experimentación y observación y luego Euclides, fija una serie de axiomas como punto de partida para otras proposiciones geométricas que actualmente son las que se aprenden en la escuela. En el transcurso se conformaron cambios que han influido en la construcción de lo que conocemos como geometría. (Cañizares & Serrano, 2001).

Por otra parte, es importante señalar que las primeras experiencias del individuo con el exterior son de tipo espacial, a través de la aprehensión del mundo se activan los sentidos y se da paso a las representaciones mentales, a decir de Piaget, estas representaciones superan la percepción cuando se evocan los objetos sin estar presentes, Cañizares y Serrano (2001), describen el conocimiento del espacio a partir del esquema corporal, los desplazamientos, la exploración y un proceso de abstracción que genera la representación mental.

El estudio de la geometría establece relaciones que no implican solamente al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado y en determinado momento, la validez de las conjeturas geométricas rebasarán la comprobación empírica mediante razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación y en particular, la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen. Para que lo anterior suceda, se precisa de una adecuada transposición didáctica (Chevallard, 1997), entre aquellos saberes que conforman el estudio científico de la geometría y los que pueden ser plausibles de estudiar en el contexto escolar, con base en ello, el objetivo del presente trabajo es analizar el saber (en este caso el triángulo), como objeto geométrico y posteriormente como un objeto de enseñanza, para ello se revisarán los libros de texto del alumno y del maestro, con la finalidad de identificar los conceptos geométricos que se incluyen y el tipo de actividades sugeridas para su estudio.

DESARROLLO

A) EL TRIÁNGULO, UN OBJETO MATEMÁTICO

La geometría euclidiana es la disciplina matemática que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional, se basa en las definiciones y axiomas descritos por Euclides en su tratado *Elementos*. Esta geometría comprende puntos, líneas, círculos, polígonos, poliedros y secciones cónicas, fue el primer sistema axiomático al plantear un cierto número de postulados que se presumen verdaderos. La geometría plana es parte de la geometría euclidiana y estudia los elementos cuyos puntos están contenidos en un plano además, se relaciona con la geometría espacial que se ocupa de las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional o espacio euclídeo. La geometría del espacio amplía las proposiciones de la geometría plana y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio y la geometría descriptiva.

En la idea de analizar al objeto geométrico elegido, puede decirse con Baldor (2004), que:

“...el triángulo es la porción de plano limitado por tres rectas que se cortan de dos a dos [...] los puntos de intersección son los vértices [...] los segmentos determinados son los lados del triángulo [...] un triángulo tiene tres elementos: 3 ángulos, 3 lados y 3 vértices...” (p.54).

El triángulo es el más simple de todos los polígonos, su importancia radica en que sirve de base para el desarrollo de los polígonos y figuras planas (Puertas & Vega, 1991). En el libro I de Euclides hay 48 proposiciones, postulados y axiomas, 26 de ellas tratan sobre las propiedades y teoremas del triángulo. Dichas definiciones constituyen el conjunto de “saberes sabios”, de los cuales algunos pueden estar contenidos en el currículo escolar. En la educación primaria se estudian una serie de conceptos que podemos denominar conocidos en el proceso de enseñanza, tales como: lados, vértices, clasificación por ángulos, clasificación por lados, perímetro, base, área, entre otros. Para el presente análisis, obviaremos algunos de ellos y centraremos la atención en aquellos conceptos geométricos que constituyen los saberes sabios, y que son construidos a partir de las nociones básicas ya mencionadas. El conocimiento y comprensión de estos conceptos, así como la relación que existe entre cada uno, es parte del proceso de la preparación la versión didáctica del saber (Chevallard, 1985), por lo tanto, se describen a continuación. Dichas definiciones presentadas derivan de la revisión de autores como Baldor, Barredo, Jara & Ruiz.

Tabla 1. Definición de conceptos relacionados con el triángulo.

Aspectos	Definición
-----------------	-------------------

<p>Propiedad del triángulo</p>	<p>Un triángulo siempre tiene tres lados cumpliéndose la siguiente propiedad:</p> <p><i>"La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo suman 180°"</i>.</p>
<p>Teoremas del triángulo rectángulo</p>	<p>Teorema de Pitágoras</p> <p><i>"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"</i></p> <p>Teorema de Altura</p> <p><i>"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa"</i></p>
<p>Teoremas de cualquier triángulo</p>	<p>Teorema de Pitágoras generalizado</p> <p><i>"El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él"</i></p>
<p>Rectas notables del triángulo</p>	<p><u>Mediatriz</u></p> <p>Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.</p> <p>Propiedad:</p> <p><i>"Los puntos de la mediatriz de un lado de un triángulo equidistan de los vértices que definen dicho lado"</i></p> <p><u>Altura</u></p> <p>Segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.</p> <p>Propiedad:</p> <p><i>Una altura puede ser interior al triángulo, exterior al mismo, o incluso, coincidir con alguno de sus lados (según el tipo de triángulo):</i></p> <p><u>Mediana</u></p> <p>Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.</p> <p>Propiedades:</p> <p><i>"Las tres medianas de un triángulo son interiores al mismo"</i></p> <p><u>Bisectriz</u></p> <p>Segmento que divide al ángulo en dos partes iguales.</p> <p>Propiedad:</p> <p><i>"Los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo"</i></p>
<p>Puntos notables del triángulo</p>	<p><u>Circuncentro</u></p> <p>Punto de intersección de las mediatrices</p> <p><u>Incentro</u></p>

	<p>Punto de intersección de las bisectrices <u>Baricentro</u></p> <p>Punto de intersección de las medianas. <u>Ortocentro</u></p> <p>Punto de intersección de las tres alturas</p>
Congruencia de triángulos	<p>“Dos triángulos son congruentes si dos lados de uno tienen la misma longitud que dos lados del otro triángulo, y los ángulos comprendidos entre esos lados tienen también la misma medida”.</p> <p>“Dos triángulos son congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente”.</p> <p>“Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo”.</p>
Igualdad de triángulos	<p>“Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y un lado, no comprendido entre los ángulos, tienen la misma medida y longitud, respectivamente”.</p> <p>“Dos triángulos son iguales si tienen un lado igual, y respectivamente iguales los lados adyacentes a ese lado”.</p> <p>“Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales respectivamente”.</p>
Fórmula de Herón	<p>Se calcula el área de cualquier polígono, regular o no, con descomponerlo en triángulos. La fórmula que permite calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados, se llama fórmula de Herón, Esta fórmula es la más útil para calcular áreas de triángulos, ya que la medida de los lados es una operación fácil.</p>
Teorema de Tales	<p>1.- Sobre la condición del paralelismo en dos rectas: Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.</p> <p>2.- Enfocado a los triángulos rectángulos, las circunferencias y los ángulos inscritos. Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC y centro "O", distinto de A y de C. Entonces el triángulo ABC, es un triángulo rectángulo donde $\angle ABC = 90^\circ$.</p>

B) EL TRIÁNGULO, UN OBJETO ESCOLAR

Lo que comúnmente tiene que ver con la enseñanza de la geometría apunta hacia la construcción del razonamiento deductivo (INEE, 2008), bajo esta postura se apuesta por la enseñanza de la geometría con una utilidad práctica. Sin embargo, Broitman & Itzcovich (2003) consideran que una condición indispensable es la adquisición de un tipo de actividad intelectual propia de la construcción de conocimientos matemáticos, la cual apuntaría hacia dos objetivos esenciales: la construcción de conocimientos de saber geométrico y un modo de pensar sobre el saber geométrico. En el sistema didáctico (profesor-alumnos-saber), el profesor requiere claridad respecto a los conocimientos que debe enseñar y de las situaciones para su adquisición, y “entre las diversas geometrías existentes es posible considerar que la geometría euclidiana involucra un nivel de complejidad accesible a los alumnos de este nivel de escolaridad” (Broitman & Itzcovich, 2003, p. 301).

De acuerdo con Brousseau (citado en Broitman & Itzcovich, 2003), el saber es un producto cultural de una institución, además, los saberes tienen su referencia en la disciplina y comunidad matemática. La selección y secuenciación de los saberes matemáticos “a enseñar” forma parte del proceso de transposición didáctica de (Chevallard, 1997), y su enseñanza es siempre la realización de un proyecto social. La textualización de este saber, consiste en incluir en los libros de texto ciertas normas para la progresión y adquisición del conocimiento. La manera como se incorporan los saberes geométricos sobre el triángulo y las formas en las que se propone su enseñanza son el objeto de nuestra indagación, se trata de analizar los libros de texto para dilucidar los “saberes a enseñar” sobre el triángulo y las maneras propuestas para enseñarlos.

El presente estudio se basa en la teoría de los paradigmas geométricos y el espacio de trabajo geométrico de acuerdo con Kuzniak (citado en Henríquez, 2014). Para asegurarse que un estudiante ha comprendido la lógica de una prueba (concordamos con la concepción de prueba de Balacheff para aceptar cómo válidos los razonamientos de los estudiantes desde la transposición didáctica), en la geometría, ésta debe ser expresada con palabras, es necesario un discurso para argumentar y convencer, esta probatoria del aprendizaje está centrada en la actividad cognitiva que exige la articulación entre visualización y razonamiento discursivo. La génesis discursiva exige un proceso de prueba, por ejemplo, probar que la suma de los ángulos de un triángulo son 180° . También esta prueba se encuentra en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, en la situación de validación cuando se hace presente el discurso demostrativo del alumno.

En opinión de Kuzniak (citado en De la Torre, 2008), la geometría elemental está compuesta por tres paradigmas: geometría natural (GI), geometría axiomática natural (GII) y geometría axiomática formalista (GIII) y su noción de espacio de trabajo geométrico, toma el sentido de espacio del pensamiento insertando objetos, instrumentos y una finalidad para el trabajo geométrico

sustentada en la elección del paradigma, por lo que el estudio de los libros de texto permitirá observar cuál predomina en ellos.

La Geometría I

Esta geometría es sobre objetos reales, sobre la importancia de la aproximación y la medida, trazos gráficos sobre el papel o trazos virtuales sobre la pantalla del ordenador, o incluso maquetas de objetos del entorno. Se apoya en la utilización de instrumentos como la regla graduada, compás, escuadra, transportador, pero también el plegado, recortado y calcado. Las tareas pueden ser elegidas de acuerdo con los instrumentos permitidos, la experiencia usual es el dibujo con instrumentos, el reconocimiento perceptivo, pero también el razonamiento que permite deducir nuevos conocimientos.

La Geometría II

Los objetos geométricos son descritos por una propiedad, por ello la necesidad de definiciones y axiomas como los de Euclides. Los axiomas propuestos en la geometría euclidiana, prototipo de este paradigma, se apoyan en la G1 conservando así un fuerte lazo con el espacio sensible, de ahí el calificativo de Axiomática Natural. La manera de producir conocimientos (Teoremas) es el razonamiento hipotético deductivo basado en la demostración. Los problemas deberán ser textuales porque los objetos de este paradigma son las definiciones y los teoremas. Las figuras tienden a sustituirse por axiomas y teoremas como los objetos de estudio. En este paradigma no hay instrumentos materiales, sólo instrumentos intelectuales y el razonamiento hipotético-deductivo permite construir nuevos conocimientos.

La Geometría III

Sus objetos son también ideales, el razonamiento hipotético-deductivo es el motor y la fuente de nuevos conocimientos. La diferencia con la geometría II es el hecho de que los axiomas de base cortan el cordón con la realidad y la axiomatización tiende a ser completa, mientras que en geometría II, viven en islas deductivas. La geometría III emerge con el nacimiento de las geometrías no euclidianas y por lo general su estudio no se incluye en la escuela primaria.

En relación al pasaje entre paradigmas, puede decirse que símbolos como G1/GII significan la articulación entre la geometría natural y la axiomática natural; la geometría I proporciona una heurística y experimentación, la geometría II presenta una generalización de las técnicas de la G1. Si se resuelve un problema en el GII el estudiante automatizará los del G1. Durante la resolución de problemas se transita entre paradigmas III y la complementariedad y dificultad de separarlos conduce a concebir un nuevo objeto. En el espacio de trabajo geométrico, la finalidad del profesor y el objetivo de los libros

será que el estudiante construya definiciones y propiedades que generen un razonamiento articulando sus propios argumentos (Henríquez, 2014).

Los libros de texto y la geometría

La Reforma del 2009 propone trabajar la enseñanza de las matemáticas en un enfoque por competencias, SE organiza la malla curricular por campos formativos y en el de Pensamiento matemático se enfatiza la resolución de problemas; como metodología incluye precisiones acerca de la Teoría de las Situaciones Didácticas. El estudio de la geometría se centra en explorar características y propiedades de las figuras geométricas, en el trabajo deductivo de los alumnos y el conocimiento de los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométrico.

Desde el 2009 hasta el 2012, los libros de texto fueron elaborados de acuerdo a los contenidos del programa de estudios, sin embargo, en el 2013 se editan nuevos libros para el alumno y para el maestro, aunque no se generen cambios en los programas de estudio. Actualmente estos libros continúan siendo utilizados en la educación primaria a nivel nacional.

Metodología

La metodología de análisis consiste en: a) identificar y seleccionar los textos (libros del alumno y del maestro) de matemáticas de primero a sexto grado actualmente vigentes, y b) analizarlos a partir de tres categorías de análisis:

1. El discurso geométrico (definiciones y propiedades del triángulo incluidos).
2. El tipo de tareas que se sugieren para el alumno (visualización, cálculo, reconocimiento, clasificación, construcción, superposición, trazado, etc.)
3. Paradigma en el que se inscriben las actividades

Tabla 2. Análisis de los libros vigentes para el maestro y el alumno.

r ado	Conceptos	Tipo de actividades	Paradi gma geométrico
2 o	Clasificación de triángulo por sus lados	Reconocimiento visual de las figuras Uso de material recortable	Geom etría I/gII

		<p>Comparación de figuras (forma, número de lados)</p> <p>Uso de tangram (transformación)</p> <p>Descripción verbal de características</p>	
3	<p>Ángulos, clasificación</p>	<p>Cantidad de lados de una figura.</p> <p>Distinguir y clasificar ángulos.</p> <p>Medición empleando transportador</p>	GI/gII
4	<p>Clasificación del triángulo por lados y ángulos</p> <p>Congruencia de triángulos</p> <p>Probar que "un triángulo equilátero no tiene ángulos rectos"</p> <p>Triángulo rectángulo</p>	<p>Lectura de definiciones, escritura de características</p> <p>Material recortable para manipular, superponer y construir</p> <p>Utilización reglas, compás, escuadra,</p> <p>Plegado</p> <p>Trazado siguiendo una secuencia ordenada</p> <p>Verificación mediante construcción y medición</p> <p>Transformación para construir figuras diferentes (cuadrilátero)</p> <p>Discurso descriptivo de la construcción</p>	GI/gII
5	<p>Teoremas de Tales</p> <p>Altura</p> <p>Fórmula de Herón (área)</p> <p>Congruencia de triángulos</p> <p>Igualdad de triángulos</p> <p>Propiedades de las alturas de acuerdo al triángulo</p>	<p>Construcción con instrucciones</p> <p>Superposición y reconstrucción de figuras</p> <p>Propiedades y características, lectura y escritura</p> <p>Reconoce, traza y clasifica rectas y triángulos</p> <p>Deduca fórmula del área del triángulo</p> <p>Trazar y localizar alturas</p> <p>Trazar triángulos dentro de la circunferencia</p>	<p>GI/gI en las actividades iniciales</p> <p>GI/gII En las deducciones</p>

		<p>Descomposición</p> <p>Afirma y niega enunciados a partir de la verificación o construcción</p> <p>Construye con base en medidas establecidas</p>	
6	<p>Simetría</p> <p>Área</p> <p>Perímetro</p>	<p>Identifica simetría en triángulos</p> <p>Reconfiguración a partir de una figura inicial</p> <p>Transformar figuras en otras</p> <p>Utilización del tangram</p> <p>Dibujo siguiendo un modelo</p> <p>Reproducción cambiando la escala de magnitud</p>	GI/gII

CONCLUSIONES

Un elemento relevante es que el profesor cuenta con el libro para el maestro. En él se describen los contenidos e intenciones didácticas de cada desafío del libro para el alumno y hace mención en algunos casos sobre los saberes geométricos que se deben lograr (concepto y definición). El libro para el maestro sugiere la realización de un análisis a priori de las situaciones, menciona que "...es trascendental que el docente, previamente a la clase, resuelva el problema de la consigna, analice las consideraciones previas y realice los ajustes necesarios" (SEP, 2014, p. 8) sin embargo, no hay una propuesta para diseñar situaciones iniciales que puedan ser aplicadas antes de usar el libro de texto. Tampoco propone dar continuidad a aquellas situaciones donde no existe una institucionalización del saber y en algunos casos (como el de sexto grado), no se retoma el estudio de los temas que se llevó a cabo en el grado anterior. Esta serie de decisiones quedan a criterio del profesor.

La mayoría de las actividades propuestas proponen utilizar el proceso de construcción para la adquisición y comprensión de conceptos. El paradigma geométrico dominante es la geometría natural, aunque las tareas se mueven entre los paradigmas GI y GII, partiendo del empleo de instrumentos y objetos para reconocer, manipular, reproducir y construir los conceptos geométricos. El discurso argumentativo se presenta a partir de segundo grado, cuando se solicita al alumno describir las características y propiedades generales de las figuras (incluyendo al triángulo), posterior a la visualización y comparación. Esto a pesar de que en primer grado, no existe ningún acercamiento con el tema.

La medición y el cálculo son tareas recurrentes a partir de tercer grado, se inicia en el estudio de los ángulos al que se dedica un bloque completo en el siguiente grado. En cuarto grado, las actividades de clasificación y trazado de triángulos se centra en la definición existente en el libro desde el primer desafío de este tema, no hay tareas previas al conocimiento de estos conceptos, y no se solicita un discurso argumentativo para explicitar las tareas realizadas. La congruencia de los triángulos rectángulos solamente se explica en los saberes a enseñar en el libro para el maestro.

La mayoría de los conceptos del triángulo aparecen en quinto grado (ángulos, vértices, lados, área, perímetro, etc...), hay una gran cantidad de tareas matemáticas entre las que destacan el trazado y localización de las alturas como una noción previa a la deducción de la fórmula; la construcción, la transformación y la verificación son procedimientos por medio de los cuales se genera la demostración y el discurso. Otros conceptos geométricos notables que se construyen a partir de las actividades son los teoremas de Tales y el de la fórmula de Herón. Se trazan las rectas notables del triángulo sin embargo se omiten los puntos que se forman con ellas. Este contenido podría ampliarse en este o el siguiente grado, para ampliar el razonamiento de conceptos geométricos pero no sucede así. En el último grado, solamente se estudian los conceptos de simetría, área y perímetro mediante la identificación y reconfiguración de figuras utilizando el tangram. Los saberes adquiridos anteriormente quedan sin profundizar. A pesar de que en segundo grado se incluyen tareas de visualización, en primero no hay actividades geométricas. Es en tercero, donde se da el “brinco” a las tareas que implican cálculo y la medición, se deben reconocer y clasificar conceptos con los cuales tuvo un escaso acercamiento.

Para un adecuado proceso de transposición didáctica, se deben comprender los saberes sabios y de referencia, y las relaciones entre conceptos, teoremas, propiedades o postulados que se construyen con las nociones básicas, en este sentido, el libro es el recurso más próximo con el que cuenta el profesor para realizar este proceso. Sin embargo, se presentan ciertos factores que lo dificultan: las actividades propuestas no tienen una secuencia adecuada, los contenidos complican la didactización de los mismos, el estudio de los conceptos se deja a medias durante el trayecto escolar, se confiere la total responsabilidad al profesor en la toma de decisiones acerca de abordar el tema con situaciones previas y existe una escasa definición de conceptos y definiciones.

El espacio de trabajo geométrico tiene relación con el tipo de tareas que puede diseñar el profesor y que posteriormente propone a los estudiantes, estudia el tránsito entre paradigmas y el trabajo con los planos epistemológicos y cognoscitivos de la geometría. Dicha teoría se convierte en una posibilidad que plantea de forma muy pragmática, como formularse actividades que apoyen a los formadores sobre la transposición de saberes y el enriquecimiento de razonamientos geométricos para que pueda emplear herramientas teóricas basadas en el espacio de referencia y les sea posible tomar conciencia en su accionar en el proceso de transposición didáctica.

REFERENCIAS

- Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio con una introducción a la trigonometría*. Vigésima reimpresión, Publicaciones Cultural, México, D.F.
- Barredo, D. *La geometría del triángulo*. Recuperado en <http://ficus.pntic.mec.es/dbab0005/triangulos/>
- Barrantes, M. & Zapata, M. (2008). *Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas*. Campo abierto, volumen 27, no. 1, 55-71.
- Broitman, C. & Itzcovich, H. (2003). *Geometría en los primeros años de la E. G. B.: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza*. En Enseñar matemáticas en el nivel inicial y en el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas. Mabel Panizza, compiladora. Editorial Paidós.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas*. Traducido por Dilma Fregona, Libros del Zorzal, Argentina.
- Cañizares, J. & Serrano, L. (2001). *Introducción a la geometría*. En Didáctica de la matemática en la Educación Primaria. Coordinador Enrique Castro, 369-378.
- De la Torre, E. & Pérez, M. (2008). *Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la E.S.O.* (texto de la ponencia presentada en la reunión del Grupo durante el 12º Simposio de la SEIEM).
- Duval, R. (2004). *Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta*. En Números, formas y volúmenes en el entorno del niño. Aulas de verano, Instituto superior de formación del profesorado. Ministerio de educación y ciencia, 159-188.
- Henríquez, C. (2014). *El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario*. Tesis doctoral. Valparaíso, Chile.
- Jara, P. & Ruiz, C. (2008). *Geometría del Triángulo. Actividad para Estalmat I*. Granada, España.
- López, O. & García, S. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Instituto Nacional para la Evaluación Educativa, México.
- Londoño, R. (2006). *Geometría Euclidiana*. Guía para el curso de Geometría Euclidiana en el curso de Ingeniería en Telecomunicaciones, Universidad de Antioquía, Medellín, Colombia.
- Puertas, M. & Vega, L. (1991) *Euclides. Elementos. Libro 1*. Editorial Gredos, Madrid. Recuperado en <https://es.scribd.com/doc/30548814/Gredos-Euclides-Elementos-Libro-1>
- SEP (1972). *Educación primaria. Plan de estudios y programas*. México.



- SEP (1993). *Plan y programa de estudios 1993. Educación primaria*. México.
- SEP (2009). *Programas de estudio 2009. Primer grado de educación primaria*. México.
- SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica primaria. Primer grado*. México.
- SEP (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado*. México.
- SEP (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Segundo grado*. México.
- SEP (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado*. México.
- SEP (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Cuarto grado*. México.
- SEP (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Quinto grado*. México.
- SEP (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado*. México.