Sorpresas con la suma

Candelaria González Polo

Área temática: Educación en campos disciplinares.
Línea temática: El análisis epistemológico y metodológico de un campo de saber disciplinar y de su enseñanza.

Resumen:

En un trabajo de investigación-acción con niños de sexto grado de Educación Básica, Primaria en México, se desarrolló una sesión de resolución de problemas matemáticos con el propósito de que los niños identificaran que la cantidad de números naturales de tres cifras con n la suma de sus dígitos, es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, para $0 \prec n \prec 10$ Los procesos inductivos utilizados, en el tratamiento de los números y las operaciones, al resolver problemas abiertos, muestran una forma de aprender matemáticas divertidas que van más allá de la mecanización de algoritmos, y que favorecen en los niños el aprendizaje de las matemáticas a partir de los conocimientos previos, a pensar por sí mismos cuando producen sus propias explicaciones y a disfrutar de lo mágico que se puede producir con el conocimiento matemático.

Este documento responde a la pregunta: ¿qué estrategias permiten que los niños participen por ellos mismos, con sus saberes previos, y que identifiquen regularidades y patrones para la construcción colectiva del conocimiento matemático?

La variedad de ejemplos realizados por los niños, a partir de los problemas abiertos planteados organizados en el pizarrón para apreciar la situación en su conjunto, les permitió identificar regularidades y diseñar estrategias propias para la generalización del problema planteado.

Palabras clave: Investigación-acción, resolución de problemas, regularidades.

Introducción

En un estudio exploratorio sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en México, con niños de 2° y 4° grado de Educación Básica Primaria, basado en algunas sugerencias del método japonés *"Estudio de Clases"*, se detectó que los niños ejecutan correctamente las sumas y restas al resolver un problema, pero no van más allá de hallar el resultado para encontrar lo mágico que se puede producir con la matemática al descubrir patrones o regularidades, es decir, los niños muestran principalmente el dominio en la mecanización de algoritmos y la memorización de procesos.

El proceso de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática en Educación Básica, Primaria en México, se limita solo al resultado, y a mantener a los estudiantes practicando el método enseñado, y el único criterio para divertirse con las matemáticas es la "respuesta correcta". Tal situación ha sido atendida por estudiosos en el área como Block D., Dávila M. y Martínez P. (1995) quienes revelan que los docentes centran su atención en la tarea de verificar el nivel de mecanización de los algoritmos de las operaciones, que en nuestra opinión, poco tienen que ver con procesos que permitan al estudiante comprender las propiedades de los objetos matemáticos; es decir, aprendan matemáticas.

De manera personal, suponemos que para lograr que los niños aprendan matemáticas por ellos mismos, depende de los propósitos, de las condiciones y del tipo de problemas que se manejan en el salón de clases. En ese sentido, el ejemplo reportado en este documento responde a la pregunta ¿qué estrategias permiten que los niños participen por ellos mismos con sus saberes previos y disfruten de sus propios procesos en la construcción colectiva del conocimiento matemático?

Para atender el supuesto y responder al cuestionamiento descrito en el párrafo anterior, se decidió trabajar la resolución de problemas abiertos con los niños en promedio de 12 años que cursan Educación Básica Primaria en México, con el propósito de suscitar en ellos aprender matemáticas a partir de los conocimientos previos, a pensar por sí mismos, y a la participación colectiva en la construcción de patrones y regularidades para disfrutar lo mágico que se puede producir con el conocimiento matemático.

Desarrollo

En el campo educativo, autores como Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010:180) coinciden en que una estrategia de aprendizaje *"es un procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) y al mismo tiempo un instrumento psicológico que un alumno adquiere y emplea intencionalmente como recurso flexible, para aprender significativamente"*. Este concepto también *"tiene que ver con las acciones intencionales que desarrolla el profesor para lograr que los estudiantes construyan cierto concepto matemático en situación escolar"* García-García, J., Rodríguez, F. M. y Navarro, C. (2015:218).

Por otro lado, Polya (1965) reporta que la investigación en educación matemática considera que el trabajo con problemas es imprescindible para que el individuo construya de manera significativa el conocimiento matemático. En el mismo sentido, un problema reúne componentes como tener varios, uno o ningún resultado final, lo cual deberá determinar la persona haciendo uso de alguna estrategia como lo mencionan (Cabañas, 2000 y Santos, 2010). Concluyendo en este rubro, García-García, J., Rodríguez, F. M. y Navarro, C. (2015:220) consideran que la resolución de problemas *"alude a todo el procedimiento que lleva a cabo el estudiante para encontrar la respuesta a la situación que se le planta* […] *importa además de qué responde el alumno, cómo lo hace porqué procede así"*. Al respecto Lester, F. K. (2013:251) menciona que la resolución de problemas es una actividad en la que se articulan una variedad de acciones cognitivas, cada una de las cuales necesita de ciertos conocimientos y habilidades, algunas de ellas no son rutinarias, como por ejemplo, coordinar experiencias previas, usar representaciones, patrones, emplear la intuición, entre otros.

La estrategia que en el caso de este estudio se utilizó en la construcción colectiva del conocimiento matemático fue trabajar con resolución de problemas abiertos. Es la estrategia que nos ha permitido asegurar el logro de ciertos resultados y no otros como acertadamente lo reportan estudiosos como Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010).

Se define un problema abierto, aquel desafío que principalmente da origen a múltiples soluciones y a un entendimiento generalizado al comprender la idea matemáticamente. Este tipo de problemas no son rutinarios, sino como lo describe Santos (1992:18) son aquellos que cuentan con varios métodos de solución o que requieren para su solución, más que la simple aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos. La intención de trabajar este tipo de resolución de problemas con múltiples soluciones, es favorecer la participación de cada uno de los niños en su solución, facilitar un desarrollo matemático por ellos mismos y no hacer tareas individuales distintas y separadas, sino enfrentar desafíos divertidos para la construcción colectiva del conocimiento matemático.

Se trata además de que los niños junto con sus amigos y profesores aprendan a obtener conocimientos matemáticos simultáneamente desde lo que ya se ha aprendido y construir escenarios heurísticos y más naturales de aprendizaje. Lester, F. K. (2013:268) significa a la heurística como un aspecto que permite a los estudiantes enfrentar y resolver un problema matemático. Se refiere a las estrategias que usan los estudiantes y manifiestan de manera autónoma, como formular métodos, reglas, así como inventar procedimientos como ensayo y error, búsqueda de patrón, resolver un problema más simple, hacer un diagrama, resolver un problema equivalente, entre otros.

A partir de los resultados del estudio exploratorio descrito y de los reportes de investigación, se diseñó un proyecto para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Educación Básica, Primaria, bajo la forma de investigación acción con características propuestas por Elliott (2005), para reflexionar sobre la propia práctica y a la vez impulsar el desarrollo profesional de los docentes con procesos de enseñanza que promuevan el aprendizaje para la comprensión.

Metodología

Elliot (2005:4) define la investigación-acción como "*reflexión relacionada con el diagnóstico*". Consideramos que representa una buena forma metodológica para entender los procesos educativos y sociales que se desarrollan en el aula o en la vida diaria, y atenderlos. Ese entendimiento se logra según Elliot porque se analizan las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por los profesores porque "*se relaciona con problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores en vez de con los problemas teóricos definidos por los investigadores puros en el entorno de una disciplina del saber*" (Elliot, 2005:5). Esta forma de hacer investigación puede ser desarrollada por los mismos profesores o por alguien a quien ellos se lo encarguen; adopta una postura exploratoria al explicar lo que sucede de forma narrativa; interpreta lo que ocurre en guiones a veces denominados estudios de caso; utiliza como herramientas para hacer tangibles los significados subjetivos a la observación participante y la entrevista, y en esta experiencia, también fueron útiles la guía de observación, las producciones de los niños en sus notas y sus explicaciones orales, lo plasmado en el pizarrón y las fotografías; y admite que la situación sea descrita y explicada con el mismo lenguaje utilizado por los implicados en el proceso.

Empleando la metodología descrita, se abordó el problema de la suma de los primeros n números naturales, con un grupo de 34 estudiantes de sexto grado de Educación Básica, Primaria en México. Los referentes empíricos descritos en este documento se obtuvieron durante la puesta en práctica del plan de clase el 27 de marzo de 2017.

Se fortaleció la metodología con algunas sugerencias de las tres de las etapas del método japonés "*Estudio de Clases*": la planificación, la puesta en práctica y la evaluación de la clase. Método que Japón comparte con países en vías de desarrollo para "ampliar y enriquecer la cooperación hacía la educación básica" (Instituto para la Cooperación Internacional. Agencia de Cooperación Internacional del Japón [JICA], 2005). En la primera etapa se consideraron entre otros aspectos, los propósitos y la forma de presentación del contenido; y se desarrolló un plan de clase donde se especificó el inicio, desarrollo y cierre del mismo, para alcanzar los propósitos planteados. En la segunda etapa, se puso en práctica el plan de clase y la inclusión de un observador, y en la tercera etapa se realizó la evaluación de lo acontecido durante la clase, proceso que se desarrolló inmediatamente después de haber concluido la misma. Durante esta fase, en plenaria, el maestro que condujo la sesión, expuso su experiencia, las dificultades y fortalezas vividas durante la clase en función a los propósitos, los contenidos y los resultados de aprendizaje esperados. Posteriormente el observador invitado, participó con los resultados de su observación plasmada en un guion de observación previamente diseñado, para reflexionar entre otros aspectos, sobre los aprendizajes logrados por los niños durante la clase.

En la forma de presentación del problema, se utilizaron procesos inductivos para propiciar razonamientos con infinidad de valores propuestos. Para esta forma, se construyó un problema con múltiples soluciones. Se planteó un propósito y se planeó la clase en tres etapas: inicio, desarrollo y cierre. En la etapa de inicio se propone a los niños la resolución de un problema para que cada uno proporcione de manera empírica y a partir de sus saberes previos, algunas respuestas al mismo. En la etapa de desarrollo, se planeó, invitar a los niños a resolver el problema con diferentes variantes y organizar la información en el pizarrón para identificar patrones o regularidades a partir de la misma; y en la etapa de cierre, se plantean variantes del problema para retroalimentar los aprendizajes logrados. Este tipo de razonamientos inductivos *"no solo se limitan a algunos que van de la parte al todo o de enunciados singulares a enunciados universales o generales, sino que se podría decir que algunos razonamientos inductivos van de una parte a otra más amplia que contiene a la primera"* (Hernández, O. H. & Parra, D. R., 2013:66).

El tratamiento del problema

Para algunos, la adición es una operación "simple" que no tiene mayores cualidades al significado de agregar y bajo esa concepción se privan de disfrutar de la magia que se produce al resolver desafíos matemáticos utilizando esta operación y sus diversos significados.

En este escrito mostramos una experiencia de las bondades de la adición en el aprendizaje de las matemáticas. Se trabajó con niños de 6° grado de Educación Básica Primaria, el plan "sumas sorprendentes". El propósito de dicho plan fue que los niños identificaran que la cantidad de números naturales de tres cifras con n la suma de sus dígitos, es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, para $0 \prec n \prec 10$

De acuerdo al Plan y Programa de estudios (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011), el tema se ubica en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico. Es un tema que favorece la identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con figuras que tengan progresión aritmética o geométrica, así como sucesiones especiales como se describe en el Bloque V del mismo plan y programa de estudios. Se especifica además como aprendizajes esperados que el alumno resuelva problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial.

En la etapa de inicio de la sesión, se sugirió a los niños encontrar ¿cuántos números de tres cifras hay con la propiedad de que la suma de sus dígitos fuese 5? Los niños propusieron ejemplos como: 311, 113, 221, 131, 122 entre otros. Se propuso el 112 y un niño expresó *"ese no porque no llega"*; se presentó el 321 y al instante los niños comentaron *"ese tampoco porque se pasa"*; y una propuesta más fue 041 a la que un niño explicó *"ese no porque no es de tres cifras, porque el cero a la izquierda no vale"*. El 100% de los niños hizo una propuesta, algunas de ellas fueron repetidas pero se consideraron haciéndoles ver que ya estaba incluida. Se aprecia con estos ejemplos que los niños tienen la noción clara de lo que significa un número de determinadas cifras; e identifican el valor posicional de un dígito en cualquier número y por lo tanto distinguen que la posición del cero dentro del orden decimal en el caso 041 es de valor nulo. Finamente se propusieron 15 posibilidades, por el momento, todas al azar. De esta forma es un primer momento donde el 100% de los niños participan en la construcción colectiva del conocimiento matemático.

En cuanto se agotaron las posibilidades se sugirió a los niños hacer el mismo desafío, pero con la propiedad de que la suma de sus dígitos fuese 2, 3 y 4. Un primer patrón que encontraron los niños para hallar las soluciones fue comenzar en cada caso con el número mayor, es decir, para el caso n=2, el primer ejemplo que plantearon la mayoría de los niños fue 200; para n=3, plantearon como primer ejemplo 300 y para n=4 propusieron como primer ejemplo 400.

En la etapa de desarrollo de la sesión, se sugirió hacer el mismo desafío con n=1, 6, 7, 8 y 9. Hasta el momento el 100% de los niños obtenían sus propuestas al azar y se les sugirió observaran las soluciones de los ejemplos en su conjunto para encontrar pistas o patrones que les permitieran dar respuesta al desafío sin tener que adivinar cada una de las posibilidades. Conforme se resolvieron las propuestas uno de los niños planteó para n=9 la siguiente estrategia

Números de tres cifras cuya suma de sus dígitos es 9.

900	810	720	630	540	450	360	270	180
	801	702	603	504	405	306	207	108
		711	612	513	414	315	216	117
			621	522	423	324	225	126
				531	432	333	234	135
					441	342	243	144
						351	252	153
							261	162
								171

El niño explicó que para el ejemplo anterior había "*una posibilidad con los novecientos, dos posibilidades con los ochocientos, tres con los setecientos y así*" sucesivamente. La regularidad expresada por el niño se observa en los ejemplos por columna del esquema anterior y se concluyó que la cantidad de números de tres cifras cuya suma de sus dígitos es 9, es igual a 1+2+3+4+5+6+7+8+9, es decir, 45 posibilidades. Lima (2014:31) llama a este tipo de aplicación de tipo aproximativo, como "*aquel en que la postura activa del alumno en la construcción del conocimiento es valorizada*". En estos procesos, el 100% de los niños mostraron tener nociones claras de la suma.

La regularidad descubierta se manifestó en los diferentes ejemplos propuestos y se organizó la información como se reporta en la siguiente tabla.

n	Posibilidades
1	1
2	2+1=3
3	3+2+1=6
4	4+3+2+1=10
5	5+4+3+2+1=15
6	6+5+4+3+2+1=21
7	7+6+5+4+3+2+1=28
8	8+7+6+5+4+3+2+1=36

En la columna dos, se forman secuencias ordenadas de números naturales que en matemáticas se llaman sucesiones. La sucesión a su vez forma un modelo de progresión aritmética que se define como "*una sucesión de números o términos de modo que uno cualquiera es igual al anterior más una cantidad constante que llamamos diferencia de la progresión*" (Sánchez, G. S. & Irene Manzanas del Pino, 2013).

Se concluyó que, para hallar las posibilidades buscadas en cada caso, bastaba con sumar los primeros números naturales hasta n. Este momento fue una oportunidad para sugerir a los niños hallaran un modelo para calcular la suma de los n primeros números naturales. Los niños plantearon sus propuestas. Uno de los niños explicó que "*a cada número anterior se le suma el siguiente*", es decir, 1+2=3, 3+3=6, 6+4=10, 10+5=15 y así sucesivamente. Opción que se caracterizó como demasiado engorrosa para la suma de los primeros números muy grandes. Se pensó entonces en buscar otra estrategia.

Para el caso de la suma de los primeros números naturales hasta n=10, se colocaron los dígitos a sumar en un orden distinto y se sugirió a los niños hallaran alguna forma de hacer la suma. Uno de los niños expresó que "*sumar los números cruzados hace que se tenga 4 veces 10 y al resultado se suman 10 y 5 que son los sobrantes, para hacer un total de 55*".

1	10
2	9
3	8
4	7
5	6

Con este razonamiento se cuestionó a los niños si esa era la única forma de sumar los primeros 10 números naturales. De pronto una niña externó que había encontrado la siguiente forma.

$$1 + 10 = 11$$
$$2 + 9 = 11$$
$$3 + 8 = 11$$
$$4 + 7 = 11$$
$$5 + 6 = 11$$

La niña expresó que *"cada pareja suma 11 y por lo tanto 5 veces 11 se obtiene como resultado 55"*. Con este ejemplo los niños evidenciaron nociones claras de la suma y la multiplicación con números naturales y procedieron a resolver la suma de los primeros 100 números naturales con la siguiente forma 101x50=5050.

Para el cierre de la sesión se presentó a los niños hallar la suma de los primeros 80, 12 y 18 números naturales. Con estos ejemplos se solicitó a los niños externar con palabras el modelo utilizado para obtener la suma de los primeros n números naturales. Una niña explicó *"al último número le agregamos más uno y lo multiplicamos por la mitad del último número"*. Efectivamente esta noción empírica coincide con *"la fórmula general para la suma de los primeros n enteros positivos, llamada Fórmula de Gauss:* $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (Pérez, S. M.L., 2004:2).

Trabajar con desafíos matemáticos que permiten varias soluciones, además de identificar patrones que tienden a la construcción de generalidades, siembra en uno mismo la necesidad y el gusto de compartir con los otros lo aprendido. Con esto confirmamos al igual que Sadovsky (2005), que los problemas abiertos, aquellos que entre otras cosas generan incertidumbre, dejan una huella en los estudiantes porque conducen al desarrollo de una idea.

Conclusiones

La estrategia que en el caso de este estudio se utilizó para permitir que el 100% de los estudiantes participara en la construcción colectiva del conocimiento matemático fue trabajar con resolución de problemas abiertos. La experiencia que describimos en este documento nos refleja las bondades de aprender matemáticas a partir de este tipo de desafíos que pueden tener múltiples representaciones y que llevan a los niños a desarrollar su autonomía para aprender matemáticas por sí mismos cuando producen sus propias explicaciones y aprendan nociones matemáticas con la ayuda de los otros en una dinámica de compartir con los amigos y el grupo.

La diversidad de ejemplos construidos por los niños que son ricas ideas matemáticas, favorecieron trabajar con múltiples representaciones y originaron un ambiente favorable para reflexionar el modelo matemático para hallar la suma de los primeros n números naturales. A través de estos procesos, organizados en el pizarrón, los contenidos matemáticos fueron surgiendo de los saberes expresados por los niños.

Los niños mostraron la noción clara de lo que significa un número de determinadas cifras; el valor posicional de un dígito en cualquier número y la posición del cero dentro del orden decimal.

Los procesos inductivos utilizados en la resolución del problema permitieron a los niños identificar regularidades y a desarrollar nociones intuitivas del modelo para sumar los primeros n números naturales. Las respuestas del 100% de los niños en un primer momento del 100% fueron a azar y conforme se desarrolló la resolución del problema en sus diferentes variantes, los niños identificaron regularidades y utilizaron diferentes estrategias que los llevaron a la construcción de sucesiones. Se concluyó que, para hallar las posibilidades buscadas en cada caso, basta con sumar los primeros números naturales hasta n. Durante estos procesos los niños evidenciaron nociones claras de la suma y multiplicación de números enteros positivos.

Se llegó de forma intuitiva a 3 modelos para calcular la suma de los n primeros números naturales. El primero consistió en sumar los dos primeros números naturales y al resultado sumar el siguiente, es decir, 1+2=3, 3+3=6, 6+4=10, 10+5=15 y así sucesivamente. El segundo fue colocar en dos columnas los primeros números naturales a sumar hasta 10. Se sumaron a las 4 parejas formadas de 10, el 10 y el 5 sobrantes. Así se concluyó que el resultado era 10x4 más 15 haciendo un total de 55.

1	10
2	9
3	8
4	7
5	6

El tercer modelo consistió en sumar 5 parejas de 11 y obtener como resultado 55.

1 + 10 =11

2 + 9=11

3 + 8=11

4 + 7=11

5 + 6=11

La noción que expresaron los niños del modelo utilizado para obtener la suma de los primeros n números naturales que a la letra dice *"al último número le agregamos más uno y lo multiplicamos por la mitad del último número"*, coincide con "la fórmula general para la suma de los primeros n enteros positivos, llamada Fórmula de Gauss: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ "

Referencias

Block, D., Dávila, M. & Martínez, P. (1995). Resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática,* DIE-CINVESTAV-IPN: Editorial Iberoamérica, 7(3), 5-26.

Cabañas, M. G. (2000). Los problemas… ¿cómo enseño a resolverlos? Distrito Federal, México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista.* Distrito Federal, México: Editorial Mc Graw Hill.

Elliot, J. (2005). *La investigación acción en educación.* Quinta edición. Madrid: Edición Morata, S. L.

García-García, J., Rodríguez, F. M. y Navarro, C. (2015). Las estrategias utilizadas por los niños Tee Savi en la resolución de problemas aritméticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime,* 18(2), 213-244.

Hernández, O. H. & Parra, D. R. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza. Universidad del Caribe. *Innovación educativa,* 13(63), 61-73.

Instituto para la Cooperación Internacional. Agencia de Cooperación Internacional del Japón [JICA]. (2005). *La historia del desarrollo de la educación en Japón. Qué implicaciones pueden extraerse para los países en vía de desarrollo*. Tokio: Shinjuku-ku.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem solving instruction. *The Mathematics Enthusiast,* 10 (1 y 2), 245-278.

Lima, A. Paula de Avelar B. (2014). O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino de Progressão Aritmética. *Revista de EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.* 22(42), 31-61.

Pérez, S. M.L. (2004). *Teoría de números. Cuadernos de olimpiadas de matemáticas*. México: Instituto de matemáticas, UNAM.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México DC, México: Trillas.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sánchez, G. S. & Irene Manzanas del Pino. (2013). *Sucesiones y progresiones*. Rescatado el 20 de marzo de 2017 de http://sucesionesbachillerato.blogspot.mx/p/blog-page.html

Santos, L. M. (1992). Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, 4 (2), 16-24.

Santos, L. M. (2010). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* Distrito Federal, México: Editorial trillas.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica primaria.* Primera ed. 2011. México, D.F.

odas las referencias deberán estar en formato APA, en su sexta versión en español (puede consultar algunos resúmenes en: https://www.slideshare.net/americoguzman/referencias-bibliogrficas-apa-6ta-edicin, o en http://ponce.inter.edu/cai/manuales/Algunos_ejemplos_referencias_APA.pdf).