Pensamiento relacional: la escolarización del álgebra temprana y jerarquía de operaciones en niños de tercer grado de primaria

Uriel Escobar Durán
Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Iztacala

Felipe Tirado Segura
Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Iztacala

Área temática: Educación en campos disciplinares.
Línea temática: El análisis cognitivo de la construcción, comunicación y desarrollo de conocimientos disciplinares.
Tipo de ponencia: Ponencia (reporte final de investigación/intervención educativa).

Resumen:

El pensamiento relacional favorece el aprendizaje tanto de las propiedades fundamentales de la aritmética, como de los tipos de conocimiento que sustentan al álgebra, entre los cuales se encuentra la jerarquía de operaciones. En el presente estudio, se desarrolló una experiencia educativa evaluando, en 30 niños de tercer grado de una primaria de la Ciudad de México, la relación entre la representación de relaciones cuantitativas, el entendimiento de representaciones algebraicas y de la jerarquía de operaciones, promoviendo el pensamiento relacional por medio de la representación y el entendimiento de relaciones cuantitativas. El estudio constó de 10 sesiones de una secuencia psicoeducativa, mismas que se basaron, en una primera etapa, de la manipulación de líquidos y su relación con el concepto de igualdad por equivalencia; en una segunda etapa de la manipulación de bolsas y dulces y su relación con el pensamiento relacional; y en una tercera etapa de la representación de cantidades desconocidas y de la resolución de problemas de representación algebraica y de jerarquía de operaciones. Adicionalmente se realizó una evaluación situada y un análisis semántico a través de entrevistas. Los resultados muestran que el 26.6% de los participantes lograron entender representaciones algebraicas (literales y relaciones de cantidad) y el 43.3% de la jerarquía de operaciones a través del pensamiento relacional. Los resultados se discuten en términos de la relación entre el pensamiento relacional, el entendimiento de la representación algebraica, la jerarquía de operaciones y la operatividad cognitiva que implica la manipulación fenoménica de objetos.

Palabras clave: Pensamiento relacional, álgebra temprana, jerarquía de operaciones, educación básica.

Introducción

Uno de los problemas más importantes en los primeros años de la educación primaria, es enseñar a los niños a pensar matemáticamente. Kieran (2006) indica que una de las dificultades de los niños de primaria, es que están habituados a pensar solamente en cómo obtener una respuesta y no por qué se resuelve con determinadas operaciones que tienen que usar, para comprender y representar las relaciones de orden matemático subyacentes.

Lins y Kaput (2004) indican que existe un dominio del constructivismo Piagetiano en la idea de enseñar álgebra después de la aritmética, bajo el argumento de que el álgebra requiere un pensamiento formal de acuerdo a las etapas de desarrollo; la aritmética se enseña primero y luego el álgebra. Una de las maneras de atender el problema, es romper con esta lógica a través de la introducción de conceptos y operaciones algebraicas desde los primeros niveles de educación primaria, por medio del desarrollo del pensamiento relacional, utilizando al álgebra como vía de comprensión de relaciones de cantidad (álgebra como una aritmética generalizada), así lo proponen organizaciones como la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Tal como indica Hewitt (2010) "la aritmética se ocupa de obtener respuestas. El álgebra desplaza la atención de las respuestas a lo que se debe hacer para obtener una respuesta, es decir, las operaciones" (p. 21). Esta cita sugiere que es inevitable un entendimiento aritmético sin una base algebraica y viceversa, un entendimiento del álgebra elemental sin una base aritmética adecuada.

El problema de la comprensión de las matemáticas en el ámbito cognitivo se encuentra desde las primeras fases de la formación escolar, y en la carencia en la enseñanza de las propiedades abstractas y transferencia de los conceptos no contables. Hacen falta intervenciones tempranas, orientadas al entendimiento relacional de conceptos matemáticos abstractos, basadas en didácticas que permitan a los alumnos tener experiencias significativas con los conceptos aritméticos y algebraicos.

El desarrollo del pensamiento algebraico en la primaria ha sido parte de las didácticas escolares en gran parte del mundo. Pero no fue sino hasta finales del siglo XX que esas didácticas fueron parte de una mayor cantidad de líneas de investigación (Cai & Knuth, 2011). Estas publicaciones han derivado de los aportes de las propuestas curriculares del aprendizaje del álgebra (Davydov, 1962; Freudenthal, 1974). Los factores estructurales de la transición de la aritmética al álgebra, las investigaciones curriculares y de conceptos algebraicos entre otros enfoques han sido sustentados por diversos autores como Filloy & Rojano, 1989; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kaput, Carraher & Blanton, 2008; Kieran, 2006. Esta serie de investigaciones se han centrado en el entendimiento de relaciones cuantitativas de diversos modos y en diversas áreas educativas. A pesar de esta diversidad, el núcleo de las investigaciones citadas es el análisis de las relaciones cuantitativas basadas en el pensamiento algebraico.

Kieran (1996) define el pensamiento algebraico en la educación primaria, como una aproximación a situaciones y desarrollo de modos de pensamiento que enfatizan los aspectos generales relacionales del álgebra (análisis de relaciones entre cantidades, estructura subyacente, estudio de cambio, generalización, solución de problemas, modelamiento, justificación, prueba y predicción) con herramientas no necesariamente simbólicas (literales), pero que pueden ser usadas como un soporte cognitivo para introducir y nutrir el discurso tradicional del álgebra escolarizada.

Desarrollo

Durante muchos años, se han tratado de brindar indicios de posibles causas didácticas de los problemas de entendimiento matemático en primaria, como una interpretación meramente operativa en el signo igual, un uso indiscriminado de la aritmética hasta en problemas que no requieren soluciones numéricas. Una serie de investigaciones sugiere cambiar a una relación entre el aprendizaje de la aritmética y el álgebra elemental; así como en el tipo de enseñanza; en tanto los alumnos de primaria son capaces de simbolizar relaciones aritméticas de un modo algebraico (Carpenter et al., 2003), es decir, tener pensamiento relacional.

El pensamiento relacional es definido por Carpenter, Franke & Levi (2005) como el atender al conjunto de las relaciones numéricas estructurales que están implicadas en las expresiones y ecuaciones. El pensamiento relacional puede ayudar a que los alumnos piensen de un modo integral, que aprenda a ver el signo igual no como una expresión procedimental basada en el cálculo, sino como una expresión de una relación de equivalencia, donde la cantidad de la izquierda equivale a la cantidad de la derecha del signo ($4 + 5 = 9$), lo que en realidad equivale a $9 = 9$; y con esto concebir nuevas relaciones en los procedimientos matemáticos.

El uso del pensamiento relacional en la aritmética funciona como un auxiliar en la disminución de operaciones numéricas, aumentando la necesidad de examinar relaciones, pensar en propiedades de las operaciones, manipular expresiones numéricas y su efecto en las mismas expresiones en su conjunto. Con esto, es más probable el desarrollo de un aprendizaje significativo de la aritmética y la adquisición de nociones de álgebra elemental (Carpenter, et al., 2003; Molina, 2009).

¿Cuál sería la aportación del pensamiento relacional en el entendimiento de relaciones de cantidad, tanto en la aritmética como en el álgebra elemental? Hacer más sencilla la integración de las propiedades aritméticas en el aprendizaje del álgebra (Carpenter et al., 2005). La aritmética no se entiende sin la comprensión de las relaciones estructurales, en tanto un cálculo aritmético implica encontrar su estructura. Hewitt (2010) indica que la búsqueda de una estructura en un cálculo aritmético es buscar la estructura algebraica, es una "conciencia de conciencia".

Es precisamente Davydov quien da un ejemplo de esta integración, al concebir a las expresiones aritméticas y algebraicas como parte de un mismo continuo conceptual. Davydov desarrolló un planteamiento curricular basado tanto en postulados propios y de Lev Vygotsky, el cual consistía en una serie de secuencias instruccionales y didácticas basadas en problemas que requieren métodos de solución progresivos y en ideas cada vez más generales (Schmittau, 2004).

Vygotsky (1988) indica que, en el desarrollo de los conceptos en la niñez, se pueden clasificar los conceptos en dos clases: espontáneos y científicos: los conceptos espontáneos versan sobre las reflexiones del alumno acerca de su experiencia cotidiana. Por otra parte, los conceptos científicos surgen de una actividad estructurada -comúnmente en un aula de clases- definidos de modo lógico.

Para Davydov (1990), el eje rector de su currículum es el desarrollo cognitivo a partir del conocimiento teórico. En el centro del currículum están tanto el pensamiento como las estructuras algebraicas, el empleo de símbolos y algoritmos, tanto aritméticos como algebraicos (Lee, 2014).

Schmittau (2011) indica que, como ejemplo de estas actividades, los alumnos emplean herramientas psicológicas, las cuales orientan la atención de los niños hacia las relaciones básicas que están inmersas en las cantidades, en vez de orientarlos a las características empíricas de un problema o de un número. Ejemplos de herramientas psicológicas que orientan hacia relaciones básicas de cantidades son las tablas, el esquema "parte-todo", el uso de literales y las agrupaciones de elementos comunes (objetos, propiedades, números).

Para el pensamiento relacional es crucial comprender la jerarquía de operaciones. Como se indicó, para operar correctamente un cálculo aritmético es necesario entender su estructura algebraica. Los componentes en una ecuación contienen diversas expresiones como signos, coeficientes, exponentes y literales, donde alguno constituyen unidades numéricas o de cantidad. Por ejemplo, en la operación $5 + 4 \times 3 = Y$, el resultado es 17, pero frecuentemente se estima que es 27; porque no se aprecia ni jerarquiza que 4×3 es una unidad numérica por resolver, sino se suele jerarquizar el orden de la ecuación de izquierda a derecha, sumando primero $5 + 4$. Romper con esta linealidad implica operar relacionarlos con los principios algebraicos.

La jerarquía de operaciones implica que se tiene que realizar una operación para resolver otra subsecuente, pero de un modo estructural, ya que se pone énfasis en las relaciones jerárquicas de las operaciones, en vez de únicamente en su posición lineal (ver figura 1.1). De este modo, se mantiene la propiedad conmutativa de las relaciones previamente establecidas y se establecen jerarquías en las operaciones cuantitativas, rompiendo con la inercia posicional de resolución de problemas (de izquierda a derecha) y siguiendo la línea de investigación de autores que han propuesto alternativas al uso de mnemotecnias en el tema (Ameis, 2011; Zorin & Carver, 2015). La jerarquía de operaciones, incluyendo las reglas y el uso del paréntesis, constituyen un esencial parte del algebra y distingue el lenguaje algebraico del lenguaje de la vida cotidiana (Freudenthal, 1974).

La jerarquía de operaciones ha sido enseñada principalmente a través de mnemotecnias las que resultan inapropiadas en tanto no contribuyen a su adecuada aplicación, ya que no se comprende el principio jerárquico de resolver la unidad numérica. Glidden (2008) afirma que la enseñanza de la jerarquía de operaciones no ha logrado tener un énfasis en su significado, incluso en los más avanzados niveles de cursos de matemáticas.

Las preguntas de investigación en este estudio son: ¿Es posible que niños de tercer grado de primaria logren abstraer y formular en una expresión algebraica con jerarquía de operaciones para resolver un problema matemático? Y ¿Cuál es la relación entre el pensamiento relacional, el álgebra elemental y la jerarquía de operaciones en el entendimiento matemático?

El objetivo general es: promover el pensamiento relacional, a partir del álgebra temprana y la jerarquía de operaciones, a través de la representación y el entendimiento de relaciones cuantitativas de manipulación de objetos, con niños de tercer grado de primaria. Los objetivos particulares son: a) evaluar el entendimiento de conceptos matemáticos complejos – álgebra y jerarquía de operaciones – por medio de la resolución y representación de tareas en una dinámica escolarizada; y b) indagar el significado que le otorgan los niños a expresiones algebraicas y jerarquía de operaciones.

El presente estudio contempla el desarrollo cognitivo desde una perspectiva histórico-cultural. Los postulados de Lev Vygotsky relacionados con las matemáticas de acuerdo con el currículum de Davydov. Se planteó un experimento de enseñanza basado en un diseño psicoeducativo para promover el pensamiento algebraico a partir de operaciones fenoménicas, con 30 niños de tercer grado de una primaria. La estructura de las sesiones se encuentra en la figura 1.2. Se aplicaron dos sesiones de pretest a los alumnos en donde se evaluó sus competencias aritméticas, a través de dos pruebas estandarizadas: PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes), y la prueba WISC IV en su apartado de aritmética, de la versión estandarizada para población mexicana. Esta evaluación sirvió para, además de indagar las competencias aritméticas con las que contaban los alumnos, integrar equipos de 4 alumnos de modo balanceado por rendimiento, de manera que hay un estudiante de: alto, medio alto, medio bajo y bajo rendimiento. Durante el final de cada sesión, los alumnos contestaban problemas relacionados con la secuencia, de un modo individual y en equipo. Se registraron las puntuaciones de cada alumno.

En las tres primeras sesiones de la secuencia psicoeducativa, los escolares manipularon magnitudes de agua, intercambiado cantidades en dos contenedores (contenedor A y B), con la intención de representar una constante y generar estructuras algebraicas en los niños (figura 1.3).

En la cuarta sesión y quinta sesión, los escolares representaban equivalencias entre dulces de diferentes formas y colores, observando las relaciones funcionales que se establecen entre las magnitudes, para establecer el esquema parte-todo, propuesto por Davydov (1962). La intención del esquema parte-todo (ver figura 1.4) es representar expresiones aritméticas de un modo relacional y estructural.

La sexta y séptima sesión versaron sobre la representación de relaciones de cantidad de un modo algebraico, esto es, a través de literales algebraicas (variables e incógnitas), por medio del uso de ecuaciones y funciones basadas en bolsas de dulces no contables (números escondidos / unidad numérica). En la octava y novena sesión, los alumnos representaban equivalencias entre sumas y multiplicaciones (4 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3), con la intención de resolver expresiones de jerarquía de operaciones (3 + 5 x 4, 6 + 7 x 3 + 5 x 2), utilizando bolsas de dulces contables.

La décima sesión se basó tanto en pensamiento relacional, como en representación de literales algebraicas y jerarquía de operaciones, utilizando bolsas de dulces contables, no contables (números escondidos / unidad numérica), problemas numéricos de jerarquía de operaciones y equivalencias entre sumas y restas.

Por último, los escolares fueron evaluados con tres mediciones: WISC IV, PLANEA, y otra basada en los conceptos de jerarquía de operaciones y representación algebraica (evaluación situada). Para analizar el efecto de la secuencia en los conceptos, se profundizó en las representaciones de los escolares por medio de un análisis semántico derivado de entrevistas semiestructuradas, tanto en el la prueba de jerarquía de operaciones y de representación de literales algebraicas, como de equivalencias entre sumas y multiplicaciones (evaluación de jerarquía de operaciones), y un problema que implicaba utilizar cantidades no numéricas (evaluación de representación algebraica a través de literales). El entendimiento se analizó en 5 escalas: nulo (sin suficiente información de entendimiento), operativo (realiza correctamente la operación y/o representación, pero no expresa información que dé indicio de comprensión), genérico (expresa nociones verbales de una solución o representación adecuada, pero no puede transferirlo al ámbito operativo), potencial (opera adecuadamente con operaciones, representaciones y expresa información que puede indicar un entendimiento de los conceptos, aunque presenta imprecisiones en ciertos problemas u operaciones) y existente (opera adecuadamente con operaciones, representaciones y expresa información que puede indicar un entendimiento de los conceptos). Las últimas dos categorías, potencial y existente, serían en las que se ubicarían los alumnos que lograron entender ambos conceptos.

El entendimiento de los alumnos fue evaluado a partir del análisis semántico de las entrevistas realizadas. Los resultados del entendimiento de los escolares en relación a la representación de literales algebraicas y de la jerarquía de operaciones se muestran en la tabla 1.1. (las cinco categorías) y en la tabla 1.2 (entendimiento vs. falta de entendimiento).

El 26.6% de los participantes lograron entender representaciones algebraicas utilizando literales, ya que el 13.3% de los alumnos alcanzaron un entendimiento potencial y un 16.6% un entendimiento existente. Por otra parte, el 70% de los alumnos no lograron entender las representaciones de literales algebraicas. En el caso de la jerarquía de operaciones, el 43.3% de los participantes lograron entender el concepto de jerarquía de operaciones, debido a que el 20% de los alumnos alcanzaron un entendimiento existente, y el 23.3% un entendimiento potencial. El 56.6% de los participantes no consiguieron un entendimiento de la jerarquía de operaciones, debido a que el 23.3% de los alumnos se ubicaron en un entendimiento operativo, el 10% en uno genérico, y el 23.3% en un nulo entendimiento.

Las evaluaciones durante las sesiones se correlacionaron con la puntuación final de entendimiento de los alumnos, tanto en el campo de la representación de literales algebraicas como de la jerarquía de operaciones. La correlación que se obtuvo de la puntuación individual de los participantes (ver tabla 1.3) utilizando el estadístico Rho de Spearman fue de 0.769 ($r<0.000$) en el caso del entendimiento de las literales algebraicas, y de 0.733 ($r<0.000$) en el caso del entendimiento de la jerarquía de operaciones.

Finalmente, la correlación entre el entendimiento algebraico y de jerarquía de operaciones fue de 0.733 (r<0.000).

En relación a la correlación entre las competencias aritméticas de los participantes y su entendimiento, tanto de las representaciones algebraicas como de la jerarquía de operaciones, las correlaciones fueron las siguientes:

Entendimiento algebraico y desempeño en Planea: 0.530 (r<0.000).

Entendimiento algebraico y desempeño en WISC aritmética: 0.531 (r<0.000).

Entendimiento de jerarquía de operaciones y desempeño en Planea: 0.649 (r<0.000)

Entendimiento de jerarquía de operaciones y desempeño en WISC aritmética: 0.564 (r<0.000)

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos, un porcentaje importante de los participantes lograron alcanzar un entendimiento de jerarquía de operaciones (43.3%), lo cual implica en sí mismo un hallazgo con esta población, ya que en la literatura consultada no se han reportado resultados con niños de tan temprana edad. Los reportes más cercanos de entendimiento de jerarquía de operaciones en relación a la edad fueron de Lee (2007), quien en un grupo de tercer grado de primaria (bajo el currículo de Davydov), descubrió que era necesario hacer un especial énfasis en la jerarquía de operaciones para resolver un problema, pero no reporta resultados de grupo sino de sólo un caso.

Por otro lado, el 26.6% de los participantes logró un entendimiento de las relaciones algebraicas inmersas en la representación de literales. Aunque parece un porcentaje bajo en relación al total de participantes, hay que recalcar que el concepto que comprendieron se trata de relaciones algebraicas en tercer grado de primaria. Esto implica que los niños pueden operar con conceptos algebraicos, aun cuando estos se encuentran fuera del currículo, tal como el concepto de jerarquía de operaciones.

¿Por qué pueden operar los alumnos con conceptos tan complejos? Una de las razones puede ser el potencial que poseen las actividades fenoménicas de las que fueron parte, es decir, a la manipulación de objetos y el descubrimiento de propiedades matemáticas a través de ellos.

Aunque todos los participantes fueron parte de estas actividades, como se mencionó, solamente un porcentaje parcial logró un entendimiento tanto de las representaciones algebraicas como de la jerarquía de operaciones. Una posible razón, además de las actividades fenoménicas, tiene que ver con el entendimiento previo en aritmética que los niños poseen. Las correlaciones moderadas y significativas entre el entendimiento aritmético y el algebraico y jerarquía de operaciones, coincide con la visión de Hewitt (2010), en relación a la necesidad de entendimiento de propiedades aritméticas para el entendimiento de relaciones algebraicas. Freudenthal (1974) también mencionaba que la jerarquía de operaciones constituía un esencial parte del álgebra y distingue el lenguaje algebraico del lenguaje de la vida cotidiana. En el presente estudio, la relación entre la aritmética, el pensamiento relacional y la jerarquía de operaciones puede verse en el nivel de correlación de los puntajes de estos conceptos, así como en el significado que le otorgan los alumnos a las representaciones algebraicas y a la jerarquía de operaciones.

¿Las propiedades aritméticas generan una instrumentación cognitiva favorable o no para el pensamiento algebraico? En unos niños parece servir de auxiliar en el entendimiento del pensamiento algebraico, en otros parece ser un obstáculo, ya que existe en ellos una *sobrearitmetización* al momento de operar con problemas matemáticos, y otros aprecian que no es necesario, ya que pueden operar con relaciones de cantidad abstractas sin la necesidad de operar con números. Sin embargo, cabe destacar que, en estos casos, los alumnos posiblemente logren abstraer las relaciones estructurales de la aritmética y operar con ellas en el álgebra elemental, es decir, sí operan con propiedades aritméticas, aunque no sean numéricas; se puede multiplicar con los dedos, lo que no es una relación univoca simple (uno a uno), sino una relación esquemática que puede hacer referencia a las unidades como equivalencias de un número dado, no solo de un número fijo.

Algo interesante es que hay niños que pueden tener poca operatividad aritmética (concreta) y una muy buena capacidad de abstracción (entendimiento de las relaciones). Lo que es anti Piagetiano y sigue la línea sugerida por Lins y Kaput (2004) en relación a la falta de evidencia que sugiera que el aprendizaje del álgebra deba llevarse a cabo después de la educación básica.

La aritmética, enseñada lejos de sus propiedades y únicamente desde el conteo o la operatividad numérica, puede empobrecer enormemente la forma de afrontar un problema matemático, echando mano solamente de recursos aritméticos primarios, por ejemplo, un niño sugiere como solución a la formulación de un problema algebraico que implicaba una división, utilizando el procedimiento más rudimentario de repartir, que es por relaciones unívocas, lo que es muy válido y valioso, pero en los estadios más elementales del desarrollo cognitivo relacionado con la operatividad matemática.

Tablas y figuras

Figura 1.1

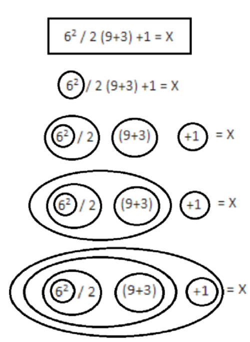

Figura 1.2: Estructura de las sesiones de la secuencia psicoeducativa

Sesiones	*Fase*	*Actividades*
1	CONSTANTE/IGUALDAD POR EQUIVALENCIA	Comparación de volúmenes y establecimiento de una constante para medir la cantidad de agua
2		Representación de las cantidades en tablas y gráficas
3		Igualdad por equivalencia
4	PENSAMIENTO RELACIONAL	Representación de equivalencias entre sumas y multiplicaciones
5		
6	REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA	Comparación de cantidades de bolsas y objetos dentro de vasos
7		Representación y solución de problemas con cantidades desconocidas
8	JERARQUÍA DE OPERACIONES	Comparación de cantidades y expresiones calculándolas sumando y multiplicando
9		Representación de la equivalencia entre sumas y multiplicaciones a través de problemas con bolsas y dulces
10	PENSAMIENTO RELACIONAL + JERARQUÍA DE OPERACIONES + REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA	Problemas de jerarquía de operaciones y de representación algebraica

Figura 1.3

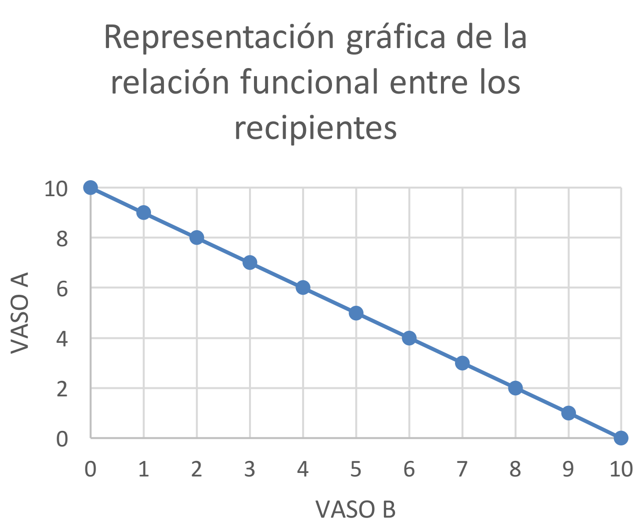

Figura 1.4: Esquema parte-todo propuesto por Davydov (1962).

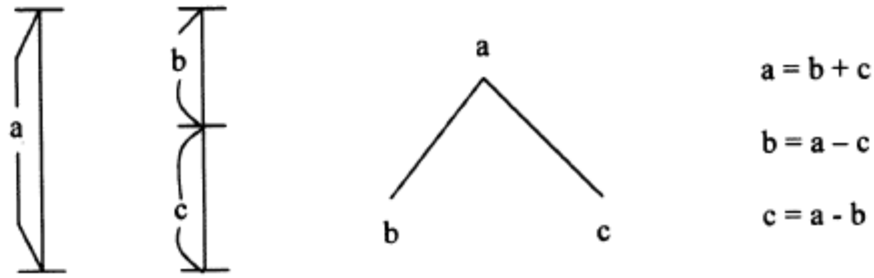

Tabla 1.1

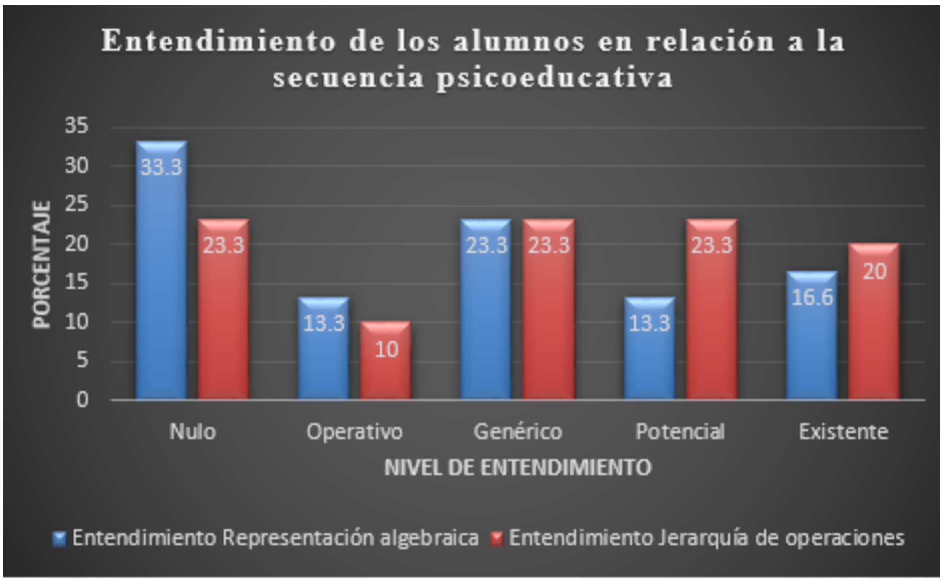

Tabla 1.2

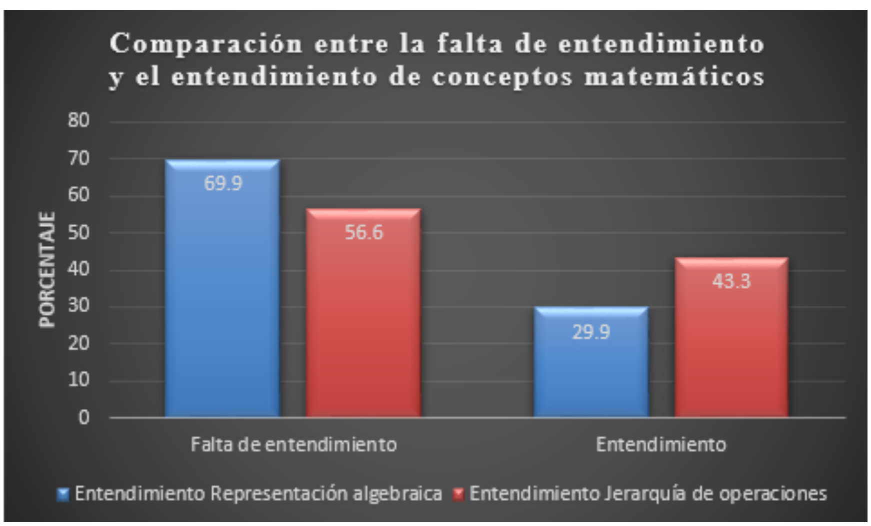

Tabla 1.3: Correlaciones entre el promedio de la calificación de los alumnos, su entendimiento algebraico elemental y el de jerarquía de operaciones.

Correlaciones

			Jerarquía	Promedio
Rho de Spearman	Jerarquía	Coeficiente de correlación	1.000	.733**
		Sig. (bilateral)	.	.000
		N	30	30
	Promedio	Coeficiente de correlación	.733**	1.000
		Sig. (bilateral)	.000	.
		N	30	30

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

			Promedio	Algebra
Rho de Spearman	Promedio	Coeficiente de correlación	1.000	.769**
		Sig. (bilateral)	.	.000
		N	30	30
	Algebra	Coeficiente de correlación	.769**	1.000
		Sig. (bilateral)	.000	.
		N	30	30

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

			Algebra	Jerarquía
Rho de Spearman	Algebra	Coeficiente de correlación	1.000	.733**
		Sig. (bilateral)	.	.000
		N	30	30
	Jerarquía	Coeficiente de correlación	.733**	1.000
		Sig. (bilateral)	.000	.
		N	30	30

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

			Algebra	WiscPost
Rho de Spearman	Algebra	Coeficiente de correlación	1.000	.531**
		Sig. (bilateral)	.	.003
		N	30	30
	WiscPost	Coeficiente de correlación	.531**	1.000
		Sig. (bilateral)	.003	.
		N	30	30

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

Rho de Spearman	Jerarquía	Coeficiente de correlación	1.000	.649**
		Sig. (bilateral)	.	.000
		N	30	30
	PlanPost	Coeficiente de correlación	.649**	1.000
		Sig. (bilateral)	.000	.
		N	30	30

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

			Jerarquía	WiscPost
Rho de Spearman	Jerarquía	Coeficiente de correlación	1.000	.564**
		Sig. (bilateral)	.	.001
		N	30	30
	WiscPost	Coeficiente de correlación	.564**	1.000
		Sig. (bilateral)	.001	.
		N	30	30

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

Referencias

Ameis, J. A. (2011). The Truth About PEMDAS: A hierarchy-of-operators triangle shapes students' conceptual understanding or the order of operations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 16* (7), 414-421.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. United Kingdom: Heinemann.

Davydov, V. V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: logical and psychological problems in the structuring of school curricula*. Soviet Studies in Mathematics Education, 2, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transformations from Arithmetic to Algebra. *From Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 391-412.

Glidden, P. L. (2008). Prospective Elementary Teachers' Understanding of Order of Operations. *School Science and Mathematics*, 108 (4), 130-137.

Hewitt, D. (2010) Approaching Arithmetic Thinking Algebraically ATM 2010. Disponible en: http://www.atm.org.uk/journal/archive/mt163files/ATM-MT163-19-29.pdf (descargado el 26 de febrero del 2018).

Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En A. Grouws, Handbook of *Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In: C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (271-290). Seville, Spain: S. A. E. M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8 (1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.

Lee, J. E. (2007). Talking about Order of Operations. *From the Learning of Mathematics, 27* (3), 25-26.

Lee, L. (2004). *An analysis of difficulties encountered in teaching Davydovs's mathematics curriculum to students in a US setting and measures found to be effective in addressing them*. Tesis Doctoral. New York: State University of New York at Binghamton.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (47-70). Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria, *PNA*, 3 (3), 135-156.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica: un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. *Actas del encuentro de Investigación en Educación Matemática*, 27-51.

Schmittau, J. (2011). The Role of Theoretical Analysis in Developing Algebraic Thinking: A Vygotskian Perspective. En J. Cai y E. Knuth, ed., *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*. Berlin: Springer-Velag, 71-86.

Schmittau, J (2004). Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education*, 19 (1), 19-43.

Vygotsky, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Zorin, B. & Carver, D. (2015). Mathematics Teaching in the Middle School. *National Council of Teachers of Mathematics, 20* (7), 438.443.