Un signo "=", múltiples significados: análisis de libros de texto para Matemáticas en Educación Superior

Montserrat García Campos
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco

Rafael Núñez Errázuriz
Universidad de California, San Diego

Área temática: Educación en campos disciplinares.
Línea temática: El análisis cognitivo de la construcción, comunicación y desarrollo de conocimientos disciplinares.
Tipo de ponencia: Reportes parciales de investigación.

Resumen:

El signo "=" está hoy presente en toda la matemática. Aunque prototípicamente denota "igualdad", este de facto aparece con múltiples significados (polisemia), lo que lo hace un signo complejo que impacta a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles escolares. Aquí, usando técnicas de lingüística cognitiva (*frame semantics* aplicada a prosa e iconografía), estudiamos libros de texto (en español e inglés) usados en cursos de matemáticas de Educación Superior. Analizamos casos específicos de polisemia de este signo en dos áreas: álgebra y geometría. Los resultados indican que la polisemia del signo "=" a pesar del rigor formal de la matemática moderna es constitutiva de esta y de cómo se enseña. Analizamos implicaciones para la matemática educativa.

Palabras clave: signo igual, lingüística cognitiva, frame semantics, libros de texto, educación superior, matemática educativa

Introducción

El signo "=" está hoy presente en todos los campos de las matemáticas, desde los más concretos que enfrenta el niño en operaciones aritméticas (p.e., 1+1=2), hasta los más abstractos que usan matemáticos profesionales como en la aritmética transfinita (p.e., $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$). Sin embargo, este signo denota múltiples significados — polisemia (Lakoff & Núñez, 2000). A pesar de esta variabilidad semántica, en general la enseñanza de la matemática tiende a asumir que el signo "=" (y el concepto de "igualdad" subyacente) es un símbolo preestablecido, simple y ya comprendido, cuando en realidad es polisémico, complejo y multifacético.

La polisemia es un fenómeno natural y frecuente en todas las lenguas (Lakoff, 1987). La noción de igualdad, y el signo "=" que se le asocia, no son excepción. Los usos y significados del concepto de igualdad en el dominio del lenguaje natural y la comunicación cotidiana, se puede constatar, mediante expresiones lingüísticas como p.e., "da igual", "es lo mismo", "es idéntico a", "es igualito a" que a menudo denotan variados significados como "semejanza", "identidad", "equilibrio" o "resultado", entre otros (Arredondo et. al., 2015). Además, frecuentemente el lenguaje hace uso de prefijos específicos para caracterizar estos significados, como "homo" (p.e., homogéneo) o "equi" (p.e., equidistante), entre otros. Todas estas variantes semánticas requieren de coordinaciones cognitivas complejas para garantizar un uso operativo acertado, eficiente y productivo.

En educación matemática, se han realizado algunos estudios que muestran que los significados que dan alumnos en educación primaria (p.e., Byrd, McNeil, Chesney y Matthews, 2015) al signo "=" se centran en lo operacional, lo que hace difícil su comprensión cuando el signo expresa otros significados como relación o identidad. Análisis de libros de texto han producido resultados similares (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur y Krill, 2006). En matemática superior se observa un incremento natural en la complejidad conceptual, simbólica y de nomenclatura en los contenidos. Sin embargo, el signo para denotar "igualdad" sigue siendo el mismo, y esto supone un aumento de la pluralidad de significados que denota el "=". A pesar de esto, con raras excepciones (p.e., Wilhelmi, Díaz-Godino y Lacasta, 2004), la cuestión de la complejidad polisémica y conceptual en matemática superior no ha sido investigada suficientemente.

Siguiendo a Lakoff y Núñez (2000), que proponen que la matemática es un sistema conceptual humano que, aunque altamente técnico, se establece sobre la base de fenómenos cognitivos cotidianos como la metáfora conceptual y la polisemia, aquí investigamos la pluralidad de significados del signo "=" en matemática superior usando herramientas de las ciencias cognitivas. En particular, hacemos uso de técnicas de lingüística cognitiva como *frame semantics* (Fillmore 1982; Langacker, 1991) aplicadas a prosa e iconografía de material matemático impreso. Con el objetivo de informar las cuestiones de cómo se genera y cómo impacta la polisemia del signo "=" en la enseñanza de las matemáticas en Educación Superior, estudiamos libros de texto (en español e inglés) de algunas áreas de las matemáticas, aquí presentamos de álgebra y geometría.

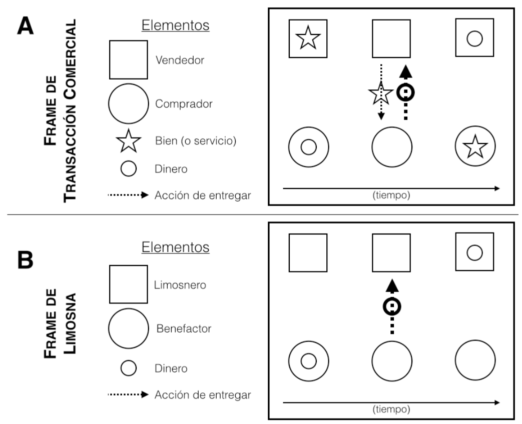
Frame Semantics aplicado al signo "="

Una corriente influyente dentro de la lingüística cognitiva, y de la semántica cognitiva en particular, es la denominada *Frame semantics*, que fue desarrollada por Charles Fillmore (1982), y que enfatiza la continuidad entre el lenguaje y las formas de hacer sentido basadas en experiencias cotidianas. Este enfoque ha encontrado otras elaboraciones similares en gramática cognitiva en las que se les denomina "dominios cognitivos" (Langacker, 1991). Este enfoque teórico ofrece un método para estudiar los significados de las palabras en contextos enunciativos y de comunicación, que se apoya en resultados obtenidos en diversas áreas de la cognición humana tales como la analogía, la categorización, y el razonamiento asociativo. Muy relevante para el estudio que aquí presentamos es el hecho de que el *frame semantics* constituye un enfoque adaptado para estudiar los principios semánticos subyacentes a la polisemia y a la creación de nuevas palabras y formas enunciativas para agregar nuevos significados a palabras ya existentes (p.e., para estudiar el uso del concepto MADRE en expresiones como "madre naturaleza", "madre patria", o "madre biológica"). En semántica cognitiva, un "frame" es "cualquier sistema de conceptos relacionados de tal manera que para entender cualquiera de ellos, es necesario entender el sistema entero" (Petruck, 1996, p. 373; nuestra traducción). Por ejemplo, el concepto de COMPRADOR (y la palabra con la que se le designa) adquiere sentido dentro de una red conceptual donde además hay un agente (o institución) — el concepto de VENDEDOR — que vende algún BIEN, donde el bien tiene algún valor monetario por el cual el vendedor recibe DINERO al traspasar el bien al comprador, etc. Fillmore argumenta que para comprender el significado de cada uno de estos términos (vendedor, comprador, etc.) es necesario operar con un "frame" conceptual que relaciona las partes de manera sistémica. En este ejemplo, se trataría del FRAME TRANSACCIÓN COMERCIAL, el cual con una red semántica específica establece el significado de sus elementos y de las relaciones entre ellos (Fillmore y Atkins, 1992). El frame aunque es genérico, puede ser adaptado y extendido a caso particulares y especializados como la compra y venta de servicios no tangibles, de seguros, etc.

De la misma manera, el concepto de HIPOTENUSA solo puede ser entendido dentro de un sistema de relaciones conceptuales que incluyen, por ejemplo, el concepto de ANGULO RECTO y CATETO (Langaker, 1991). Sin estos el concepto de HIPOTENUSA no puede ser concebido o expresado, ya que este adquire significado conjuntamente con los otros elementos del frame — el FRAME TRIÁNGULO RECTÁNGULO. Así, según Langacker (1991), cuando nos referimos al concepto de VENDEDOR lo que hacemos es evocar el FRAME TRANSACCIÓN COMERCIAL que actúa como *base* y donde se *perfila*, en este caso, el elemento "vendedor" por sobre los otros. De la misma manera, al referirnos a HIPOTENUSA, evocamos el FRAME TRIÁNGULO RECTÁNGULO que actúa como *base*, y donde se *perfila* el elemento "hipotenusa".

Para ilustrar estas consideraciones teóricas Langacker (1991) desarrolló un sistema de diagramas (el que nosotros adaptamos y simplificamos para las necesidades de este estudio). Así, por ejemplo, el FRAME TRANSACCIÓN COMERCIAL se puede ilustrar con el diagrama de la Figura 1A, que caracteriza la estructura semántica básica del frame. Allí se observa que inicialmente el vendedor está en posesión de un bien, y el comprador posee dinero. En seguida al realizar la transacción, tanto el bien como el dinero cambian de manos. Al culminar la transacción el vendedor posee el dinero y comprador el bien. El diagrama, en esta figura, perfila el concepto de ENTREGA DE DINERO, el cual adquiere otro significado cuando ocurre en un campo semántico diferente como es del FRAME LIMOSNA (Figura 1B). Si bien en ambos casos hay “entrega de dinero”, el *frame semantics* permite analizar en detalle las variaciones semánticas presentes e identificar el rol que juegan los distintos elementos en la construcción de significados. “Entregar dinero” adquiere distintos significados según si opera en uno u otro frame, lo cual puede apreciarse en los diagramas de estos frames.

Figura 1: FRAMES TRANSACCIÓN COMERCIAL y LIMOSNA



Para este estudio usamos estas herramientas de la investigación de la cognición y lenguaje humanos, para aplicarlas al estudio de la polisemia de “=” en libros de texto. Al analizar usos del signo “=” (en prosa e iconografía) en varios contextos de prácticas y publicaciones en matemática se han identificado varios FRAMES que caracterizan a las estructuras semánticas asociadas a diversos significados denotados por el signo “=”, como por ejemplo, el FRAME DEFINICIÓN, el FRAME RELACIÓN, y el FRAME OPERACIÓN-RESULTADO (Núñez y Relaford-Doyle, en preparación). Aquí, presentamos solo los dos primeros, los que describimos y analizamos con ejemplos de libros de texto (en español) usados en cursos de matemáticas de Educación Superior.

Metodología

Los datos para esta investigación provienen de dos fuentes: libros de texto de matemáticas de nivel superior y observaciones de clases. En este artículo reportamos resultados del análisis de libros de texto.

En el sentido de Cohen, Manion y Morrinson (2007, p. 201-202), revisamos libros de texto impresos, en inglés y en español, que actualmente se usan para la enseñanza de algunas asignaturas de la carrera de matemáticas, aparecen referidos en los programas de los cursos y son accesibles para la mayoría de los estudiantes de Educación Superior en México. Nos centramos en fragmentos en los que aparece el signo “=” o la palabra “igual” (en prosa o iconográfico). Estos fragmentos pueden aparecer en el contexto de definiciones, teoremas, demostraciones, párrafos explicativos, enunciación de propiedades o ejercicios. El objetivo del análisis fue identificar los diferentes usos y significados de este signo para comprender cómo se manifiesta la polisemia.

El análisis, además, nos permitió acercarnos a la propuesta didáctica de cada autor, sus preocupaciones como matemáticos profesionales y profesores, el contexto en que fueron escritos, la audiencia a la que están dirigidos y la manera en que ellos conciben aprender/enseñar matemáticas.

Los libros fueron analizados de manera individual o colectiva, y una vez identificados los usos del igual y sus signos se discutieron grupalmente. Revisamos trece libros de disciplinas como cálculo, álgebra, geometría básica, avanzada y analítica, topología y análisis complejo. Aquí presentamos ejemplos prototípicos de dos textos de álgebra y geometría que se usan en los primeros semestres en la Facultad de Ciencias, UNAM.

Análisis y resultados

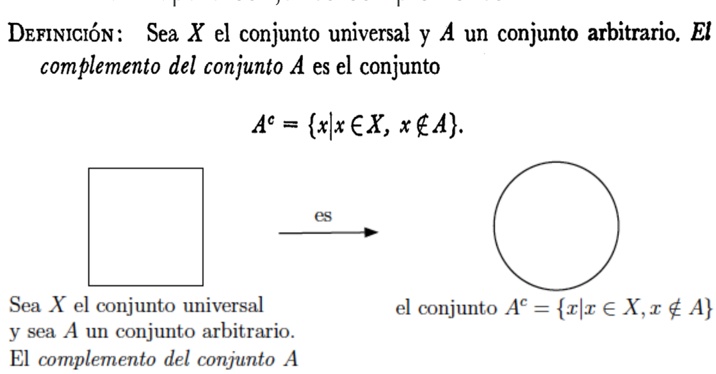
Como resultado del análisis, se generó una taxonomía de los usos identificados y se teorizaron algunos de ellos con las herramientas de *frame semantics*. Para cada uno de ellos, identificamos su estructura semántica y el rol que juegan los distintos elementos que los componen. A continuación presentamos a detalle el Frame Definición y el Frame Relación.

Frame Definición

La característica esencial de este frame es especificar (precisar, dar a entender) un *definiendum* (lo que se quiere definir) en términos de un *definiens* (como se quiere definir). Lo que se suele *perfilar* es el *definiendum*.

En la figura 2 se muestra un ejemplo tomado del libro Álgebra Superior (Cárdenas, Lluis, Raggi y Tomás, 1973).

Figura 2: Diagrama de Frame Definición para conjunto complemento



Se puede ver que para referirse a El complemento del conjunto *A* lo que actúa como *base* son el *definiendum* “ Sea *X* el conjunto universal y *A* un conjunto arbitrario. El complemento del conjunto *A*”, el verbo “es” y el *definiens* “el conjunto A^c={x| ∈ ,∉A}” ”. Lo que se *perfila* es el elemento que aparece en letras cursivas “*El complemento del conjunto A*”.

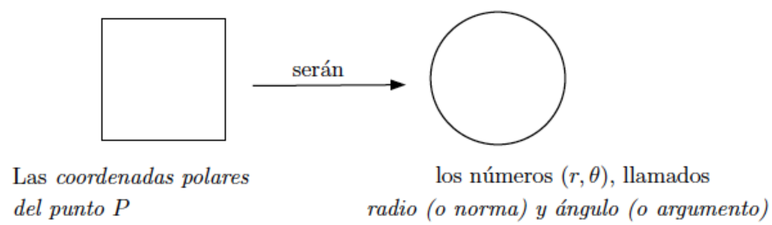
Cabe señalar que en esta definición el signo "=" se usa tanto para definir al complemento, como para indicar que ambas maneras de escribir el complemento de un conjunto (concisa y extendida) son válidas.

De la misma manera, en la Figura 3 se muestra un ejemplo del libro Geometría Analítica (Ramírez, 2011). Se puede ver que para referirse a LAS COORDENADAS POLARES DEL PUNTO *P* lo que actúa como *base* son el *definiendum* "*coordenadas polares del punto P*", el verbo "serán" y el *definiens* "los números (*r*, θ), llamados *radio* (*o norma*) y ángulo (o argumento)". Lo que se perfila es el elemento "*coordenadas polares del punto P*".

Figura 3: Diagramas de FRAME DEFINICIÓN para coordenadas polares

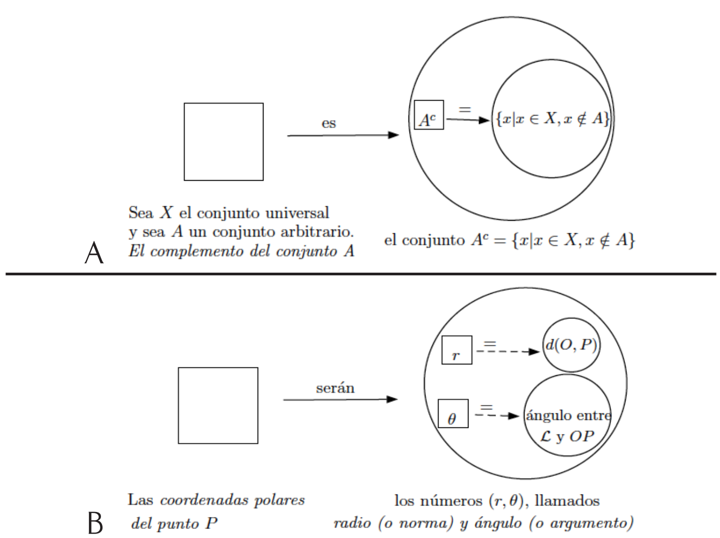
Las *coordenadas polares del punto P* serán los números (r, θ), llamados *radio (o norma) y ángulo (o argumento)*, respectivamente, donde

$$r = d(O,P) \qquad \text{y} \qquad \theta = \text{ángulo entre } \mathcal{L} \text{ y } OP.$$



En los diagramas anteriores se pueden ver signos "=" que falta identificar. Si analizamos los usos de estos "=" dentro de las definiciones resulta que los respectivos *frames* a los que evocan aparecen como diagramas dentro de los diagramas de las Figuras 2 y 3. La siguiente figura muestra el anidamiento de *frames* que ilustra la estructura semántica a la que nos referimos.

Figura 4: Diagramas anidados para las definiciones de complemento y coordenadas polares



En la Figura 4A se puede observar que en el *definiens* "el conjunto $A^c=\{x|x \in x, \notin A\}$" aparece el "=" cuyo uso evoca nuevamente al Frame Definición. En donde, "A^c" es el *definiendum* y "$A^c=\{x|x \in x, \notin A\}$" el *definiens*.

El caso de la definición de coordenadas polares es más complejo, ya que si observamos el texto completo de la Figura 3 podemos considerar como parte de la definición lo que aparece dentro del *definiens* en la Figura 4B. En este caso los signos "=" expresan la relación de igualdad entre "*r*" y "*d*(O,*P*) ", y, entre "θ" y "ángulo entre L y *OP*". El uso del signo en ambos casos evoca al Frame Relación que a continuación se presenta.

Frame Relación

La característica esencial de este frame es establecer conexiones entre entes mediante el atributo por el cual están relacionados.

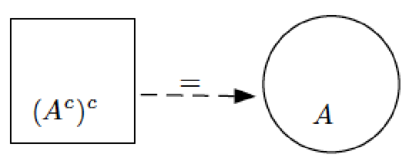
La Figura 5 muestra un ejemplo del libro Álgebra superior (Cárdenas et al., 1973).

Figura 5: Diagrama Frame Relación para la propiedad (ix) de la complementación

Son propiedades básicas de la complementación las siguientes:

ix) $(A^c)^c = A$;
x) $A \cup A^c = X$;
xi) $A \cap A^c = \phi$.

La demostración de estas propiedades se deja a cargo del lector.



En la propiedad ix el uso del signo "=" se refiere a la relación de igualdad entre los entes, en este caso, "$(A^c)^c$" y "*A*". Esto se debe a que la expresión "$(A^c)^c = A$" está en el contexto de las propiedades, es decir, que en el texto solo se están enunciado las propiedades y no se está pidiendo aplicarlas. Cuando se aplican tales propiedades en otro contexto el uso del "=" evoca al Frame Operación-Resultado mencionado anteriormente (aunque aquí no analizamos este frame, podemos señalar que su característica principal es que se compone de entes (operandos) que se operan mediante reglas específicas (operaciones) que al ser ejecutadas producen un resultado).

El uso del signo "=" en la siguiente figura (Ramírez, 2011, p. 62) se vincula con el Frame Relación. El "=" aparece dos veces en una representación iconográfica (ver Figura 6), a cada uno le corresponde un diagrama. Uno para indicar que es igual a constante y otro que *r* es igual a constante. Cabe señalar que θ y *r* no son iguales entre sí.

Figura 6: Frame Relación en ejemplo iconográfico

Entonces, en vez de la cuadrícula correspondiente a las coordenadas cartesianas, lo que resulta en este caso es la Figura 2.20, que solemos asociar con un radar.

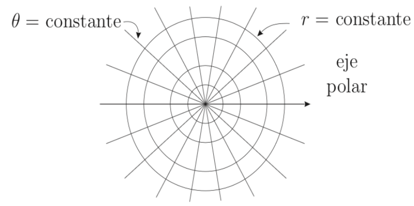


Figura 2.20: Red coordenada polar en el plano.

En este ejemplo los entes "θ", "constante", y, "*r*", "constante" están relacionados por el atributo de "ser iguales" el cual está representado en la figura con el signo "=".

En términos generales, en esta sección mostramos a detalle los elementos básicos que componen dos *frames* que hacen posible la comprensión conceptual en contextos de la vida cotidiana y en áreas de las matemáticas como álgebra y geometría analítica. También mostramos los diagramas que permiten entender la estructura semántica de algunos conceptos usados en matemáticas que aparecen en libros de educación superior.

Discusión y conclusiones

Los resultados del análisis tanto en prosa como en iconografía de algunos libros de texto nos permite mostrar cómo las variantes semánticas evidencian distintos usos del signo "=". Hemos notado que la mayoría de las investigaciones se centran en un cierto grupo de personas y cómo entienden el "=", por ejemplo, el trabajo de Wilhelmi, Díaz-Godino y Lacasta (2004) que centra su análisis en los números reales y muestra diversidad de usos de la igualdad en educación superior. Particularmente, ellos se refieren a la homonimia para la palabra "igualdad", pero un análisis más profundo nos lleva a sugerir que resulta más adecuado referir a la "polisemia" tanto del signo "=" como de la noción "igualdad".

A diferencia de la mayoría de las investigaciones, nuestro estudio amplía la mirada analizando a profundidad cómo aparece la polisema en toda la matemática. Aportamos elementos para explicar asuntos vinculados con la cognición que ejemplificamos con fragmentos de libros de texto usados actualmente para la enseñanza.

Para dar cuenta de cómo se genera la polisemia analizamos libros de diferentes áreas de las matemáticas, utilizamos técnicas de lingüística cognitiva, en particular, de *frame semantics*. Estas técnicas utilizan métodos naturales y espontáneos, propios del lenguaje vernáculo que nosotros adaptamos para identificar usos del "=" en un lenguaje altamente técnico como el de las matemáticas. Estos *frames*, por su carácter genérico y constitutivo de la cognición humana, se manifiestan en áreas tanto cotidianas como técnicas. Es decir, son los elementos básicos que hacen posible la comprensión conceptual de contextos variados de la vida cotidiana (concepto de VENDEDOR), y aplicados a casos particulares en áreas del conocimiento (COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO O COORDENADAS POLARES).

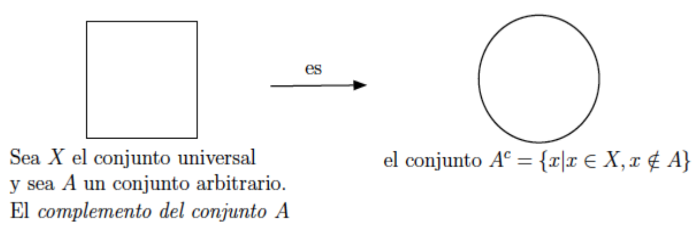
El análisis nos permite mostrar que el concepto COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO adquiere un significado según el FRAME en que se evoca, DEFINICIÓN o RELACIÓN. Los diagramas nos permiten ver a detalle la variación semántica en términos de lo que se perfila y los roles que juegan los elementos que componen cada FRAME.

Por ejemplo, en la Figura 2, el uso del signo evoca al FRAME DEFINICIÓN que actúa como *base* para *perfilar* "El *complemento del conjunto A*". En la Figura 5, el FRAME RELACIÓN actúa como *base* para *perfilar* la relación (propiedad ix) de igualdad entre los conjuntos "$(A^c)^c$" y "A". Lo anterior se muestra en siguiente figura.

Figura 8: Concepto "complemento de un conjunto" en FRAME DEFINICIÓN y FRAME RELACIÓN

DEFINICIÓN: Sea X el conjunto universal y A un conjunto arbitrario. ***El complemento del conjunto A*** es el conjunto

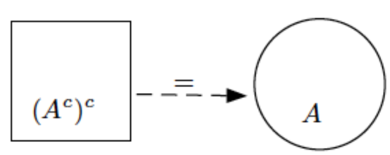
$$A^c = \{x | x \in X,\ x \notin A\}.$$



Son propiedades básicas de la complementación las siguientes:

ix) $(A^c)^c = A$;
x) $A \cup A^c = X$;
xi) $A \cap A^c = \phi$.

La demostración de estas propiedades se deja a cargo del lector.



Los resultados de nuestro análisis muestran, por ejemplo en la Figura 3, la complejidad del significado del "=" que podría implicar mayor demanda cognitiva cuando se interpreta en el contexto de prosa o iconografía donde emerge. En el caso de geometría, como se mostró en la Figura 4B, se evidencia el anidamiento de dos distintos frames (FRAME DEFINICIÓN y FRAME RELACIÓN), vinculados a un mismo concepto, a diferencia del ejemplo de álgebra (Figura 4A) en el que se evoca un mismo *frame* y podría requerir menor demanda cognitiva. Lo que se evidencia con el anidamiento en el terreno de las matemáticas es la complejidad intrínseca de usar un único signo escrito "=". En este sentido, nuestra investigación contribuye a las taxonomía de los usos ya identificados de este signo y lo amplía a otras áreas de las matemáticas en los que aparece.

Otro nivel de complejidad que identificamos en libros de texto de Educación Superior es el que se muestra en la siguiente figura, aparecen siete "=" y se identifican usos como indexación, operación resultado y relación, a cada uno le corresponde un *frame*.

Figura 9: Ejemplo de libro de probabilidad (Canavos, 1988)

Tal suma puede denotarse por

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}.$$

En particular, si $n = 2$ y $m = 3$, entonces

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23}.$$

La complejidad de evocar distintos *frames* se puede apreciar incluso en elementos muy simples de aritmética básica como es el caso de la expresión "2 + 3 = 5" (Kvasz, 2008), en el que se pueden identificar al menos seis variantes semánticas (ver Tabla 1).

Tabla 1: Variantes semánticas de un ejemplo prototípico del signo "="

Elemento perfilado (en negrita)	Lo que se dice del elemento perfilado
2 + 3 = 5	(a dos) se le suma 3 y se obtiene 5
2 + 3 = 5	se le suma 2 (a tres) y se obtiene 5
2 + 3 = 5	(cinco) es la suma de 2 y 3
2 + 3 = 5	(la suma de dos y tres) es igual a 5
2 + 3 = 5	cuando se aplica (la operación suma) a 2 y 3 se obtiene 5
2 + 3 = 5	(la igualdad) se verifica para 2+3 y 5

Las primeras cinco evocan a un mismo *frame*, el de Operación- resultado, la diferencia radica en el elemento *perfilado*. La última variante evoca al de Relación. Aun en un ejemplo prototípico la evocación de estos dos *frames* muestra los distintos significados que pueden constituir dificultades inherentes.

Desde la perspectiva de la práctica educativa y la investigación en educación matemática, este análisis muestra que dada la complejidad en los usos del "=", tanto en prosa como en iconografía (Figura 6), se pueden predecir algunas dificultades para el aprendizaje de la noción de igualdad. En este sentido, la construcción de significados depende del profesor, del alumno y sus experiencias implícitas con distintos *frames*. Lo que se pretende lograr a lo largo de la educación es que, alumnos y profesores, relacionen de manera sistémica los elementos que constituyen cada *frame* y usarlos según el contexto en el que está inmersa la actividad matemática. Además, estos resultados tienen implicaciones en diversas áreas de la investigación pues se pueden generar hipótesis empíricas sobre el aprendizaje en los estudiantes así como para la formación de profesores.

Se han identificado esfuerzos específicos para adaptarse a esta situación compleja derivando en la proliferación de signos, adaptando el "=" y que refieren a igualdad en otros sentidos, por ejemplo, desigualdad "≠", congruencia "≌", equivalencia "≡", etc. Sin embargo, resulta que la notación también es polisémica, ya que algunos signos varían extensión y el glifo pero permanece el mismo grafema.

El uso de esta notación y sus distintos significados impacta la comunicación de ideas matemáticas y su enseñanza, pues son parte esencial de las matemáticas mismas. La hipótesis que seguimos investigando es que los mecanismos cognitivos (*frames*) son los mismos para conceptos avanzados en campos más abstractos de las matemáticas.

Agradecimientos

Este material está basado en trabajo realizado gracias al financiamiento del Instituto México-Estados Unidos de la Universidad de California (UC MEXUS) y el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT), en el marco del proyecto CN-17-47 "Plurality of meanings in the notion of equality in mathematics: A comparative study with higher-education teachers in Mexico and California". En el equipo de investigación también participan las becarias Josephine Relaford-Doyle (UCSD-EEUU) y Andrea Ortiz (UPN-México).

Referencias

Arredondo, E.; Francis, K.; García-Campos, M.; Núñez, R.; Sandoval, I.; Solares, D., y Uicab, R. (2015). Pensando en el concepto de "igualdad". En García y Sandoval (Eds). *Memorias CMO-BIRS 2015: Concept Study – Profound Understanding of Teachers' Mathematics 15w5151. PRISM: University of Calgary Digital Repository* http://hdl.handle.net/1880/51529

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., y Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, 38, 61-67.

Canavos, G. (1988). *Probabilidad y estadística, aplicaciones y métodos*. México: McGrawHill/ Interamericana de México, SA.

Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F. y Tomás, F. (1973). Álgebra Superior. México: Editorial Trillas S.A. de C.V..

Cohen, L., Manion, D., & Morrison, K. (2007). *Research methods in Education*. New York: Rutledge.

Fillmore, C.J. (1982). Frame semantics. In The Linguistic Society of Korea (Eds.), *Linguistics in the Morning Calm* (pp. 111-137). Seoul: Hanshin.

Fillmore, C.J. y Atkins, B.Y. (1992). Toward a frame-based lexicon: the semantics of RISK and its neighbors. *Frames, Fields and*

Contrasts: New Essays in Semantic and Lexical Organization (pp. 75-102). En A. Lehrer, E.F. Kittay (Eds.). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change*. Basel: Birkhäuser.

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire, and Dangerous Things*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics to Being*. New York: Basic Books.

Langacker, R. (1991). *Concept, Image, and Symbol: The Cognitive Basis of Grammar*. Berlin: Mouton de Gruyter.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., y Krill, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385.

Petruck, M. R. (1996). Frame semantics. En J. Verschueren, J.-O Östman, J. Blommart, y C. Bulcaen (Eds.), *Handbook of pragmatics*, Amsterdam: John Benjamins.

Ramírez, A. (2011). *Geometría Analítica: Una Introducción a la Geometría*. México: Las Prensas de Ciencias, UNAM

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(79), 77.