Variantes de un tipo de tarea para favorecer la expresión de razones con fracciones

David Francisco Block Sevilla
Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Juan José Sosa
Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Área temática: A.6 Educación en campos disciplinares.
Línea temática: El análisis epistemológico y metodológico de un campo de saber disciplinar y de su enseñanza.
Tipo de ponencia: Reporte final de investigación.

Resumen:

Se presenta un análisis de situaciones didácticas que buscan favorecer la expresión de razones mediante fracciones. Se incluye el análisis de algunos resultados de su implementación en un grupo de primer grado de secundaria. El estudio constituye una experiencia de ingeniería didáctica, y se realiza en el marco de la Teoría de la Situaciones Didácticas. Los resultados dejan ver dificultades por parte de los alumnos para usar fracciones en los problemas planteados, pero también progresos, y rutas por las que sería posible continuar, lo que a su vez revela el papel fecundo del andamiaje didáctico.

Palabras claves: Razón, Fracción, Enseñanza de las Matemáticas, Secundaria.

Introducción

Algunos estudios han puesto en evidencia las posibilidades que tienen los alumnos, desde tercer grado de primaria hasta la secundaria, para abordar problemas sobre relaciones proporcionales, y más específicamente de comparación de razones, sin utilizar fracciones, mediante la manipulación de pares de cantidades del tipo "a de cada b", indistintamente de si la razón corresponde a un entero o a una fracción (Block, 2003 y Block, 2006). Para ello, los alumnos acuden a diferentes procedimientos, utilizando solo números naturales. Por ejemplo, ante la tarea de decidir qué trato de los dos siguientes conviene más: "por cada 3 naranjas que recojas te doy, 2" y "por cada 10 que recojas, te doy 9", la mayoría obtuvo parejas de cantidades a partir de cada uno de los tratos, con la idea de igualar un término para poder comparar. Obtuvieron, por ejemplo: por 30, te doy 20 vs por 30, de doy 27 (Block, 2003).

Así mismo, se han destacado las ventajas de favorecer dichos procedimientos, tanto desde el punto de vista del desarrollo del pensamiento proporcional (cuestionar el modelo aditivo, a favor del multiplicativo), como de la construcción de una base a partir de la cuál puedan introducirse las fracciones en el papel de expresar razones.

En la presente ponencia mostraremos algunos tipos de tarea, que son variantes de uno más general (comparar razones), orientados a favorecer el paso de la expresión de las razones mediante dos números naturales (expresión clásica "a por cada b"), a su expresión con fracciones. Las tareas fueron aplicadas en un grupo de primer grado de secundaria. Como veremos, los logros son significativos, y las dificultades dejan ver rutas aparentemente claras para seguir avanzando.

Antecedentes

La noción de razón se encuentra en la intersección de dos temas, la proporcionalidad y los números racionales. Una tendencia ha consistido en integrar el estudio de estas dos problemáticas. Vergnaud (1998) considera que la adquisición de aspectos fundamentales de la noción de número racional se registra en el marco de las relaciones de proporcionalidad:

> *… No resulta sensato estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones y de las razones independientemente de las estructuras multiplicativas. Es sólo hasta que todos estos significados se sintetizan en el concepto de número racional que es posible pensar en las fracciones y las razones como puros números* (p. 156).

Brousseau (2004), al desarrollar una experiencia amplia de ingeniería didáctica para la enseñanza de los números racionales, mostró el importante papel de la proporcionalidad como andamio en una construcción de los racionales, en la que las razones son una especie de crisálida de estos, a la vez que articulan toda la construcción.

En varias publicaciones más (Davis, 2003; Clark, Benson y Cavey, 2003) se ha seguido destacando la necesidad de considerar y estudiar la significación de las fracciones como razones. La noción de la que hablamos aquí subyace a nociones fundamentales del campo multiplicativo, tales como el interés, escala, tasa, densidad, probabilidad.

Hipótesis, marco teórico de referencia y metodología.

La hipótesis que estamos estudiando es que el conocimiento que los alumnos adquirieron en sus primeros años de estudio de las fracciones en tanto partes de un todo, puede articularse con el significado más amplio de las fracciones como razones, si éstas (las fracciones) se hacen aparecer en contextos muy favorables a la consideración de la razón y si, además, dichas fracciones coexisten con expresiones de las razones familiares para los alumnos, tales como la clásica mediante dos números naturales ("a de cada b"), o la del porcentaje, o como la fracción clave "la mitad".

Cabe precisar una diferencia importante con el proyecto de Brousseau, (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2004): en éste último, las fracciones se construyen de entrada como razones (y como cocientes). En nuestro estudio, en cambio, partimos de que los alumnos ya tienen un conocimiento de fracciones como partes de un todo (eventualmente, de una unidad), y buscamos enriquecer dicho conocimiento.

El estudio está centrado en el diseño de situaciones didácticas a partir de un análisis epistemológico de las nociones en juego (la razón y la fracción), y de una concepción de aprendizaje de las matemáticas en las que éstas se construyen como herramientas para resolver determinados problemas. Por ello, optamos por la Teoría de la Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) como marco de referencia. La metodología es la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995): consta de un análisis preliminar de la problemática de la enseñanza de la noción, de un diseño de situaciones acompañado del análisis previo que fundamenta cada una, de la experimentación en aula, y del análisis que contrasta lo previsto con lo ocurrido.

Las experiencias que se reportan aquí son parte de una tesis de maestría (Sosa, 2018). La experimentación se realizó en un grupo, con 42 estudiantes, de una secundaria pública. Las situaciones fueron implementadas por la maestra del grupo (con 2 años de experiencia), quien pudo conocer y comentar previamente la secuencia. La observación corrió a cargo de cuatro investigadores, cada uno a cargo de un equipo de alumnos. Las clases fueron video grabadas

Resultados de la experiencia

Presentaremos a continuación los cuatros tipos de tareas que fueron implementados en el grupo de 1º se secundaria, y una síntesis de lo ocurrido con cada uno.

1. **Comparar pares de razones expresadas con dos números naturales**

Este tipo de tarea constó de varias comparaciones que no involucran fracciones. La primera fue:

En el recreo Juan tiró 7 veces al aro y encestó 3; en cambio, José tiró 4 veces y encestó 2. Teniendo en cuenta el número de veces que tiró cada uno, ¿quién te parece que es mejor tirando al aro?

Enseguida se plantearon más casos: Pedro (4 de 6) vs Martín (3 de7); Silvia (4 de 5) vs Vanessa (6, de 10)

Como se puede observar, la comparación de razones se facilita de varias maneras: el contexto pretende ser accesible; las razones se expresan mediante pares de cantidades; hay razones iguales a la mitad, como 2 de 4, o una mayor que ½ y la otra menor, como 4 de 6 vs 3 de 7, o un término es el doble de otro, como 4 de 5 vs 6 de 10.

Efectivamente, fueron numerosos los alumnos quienes pudieron tomar en consideración las razones, apoyándose en la posibilidad de usar la razón ½ como intermediaria, o bien, en la posibilidad de usar los porcentajes con relativa facilidad.

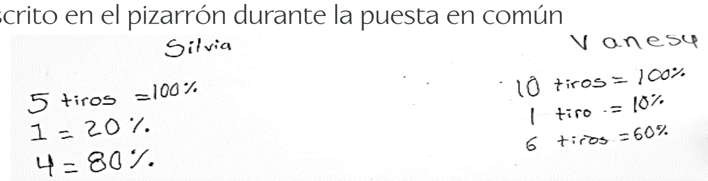
Edu (escribe): "José (es mejor), porque Juan tiro menos de la mitad y José tiro la mitad"

Lupita (escribe): "José, porque Juan tiró 7 veces y encestó 3 que es menos del 50% en cambio José tiró 4 y encesto 2 que es el 50%"

Byron (escribe): "Pedro encestó más de 50% y Martín menos de 50"

En la puesta en común, la profesora institucionalizó el recurso al porcentaje. Con la participación de Byron, quedó asentado lo siguiente (figura 1):

Figura 1: Procedimiento escrito en el pizarrón durante la puesta en común



Notemos que, más allá de ½, no aparecieron las fracciones. En el otro extremo, algunos alumnos se deslizaron, en algún momento, hacia el modelo aditivo, incluso cuando en algún ítem anterior habían logrado considerar la razón.

Edu: De que Pedro tuvo 4 por lo tanto <u>le faltaban 2</u>, por eso saco mayor… y este… Martin sacó 3 y para 7_ <u>faltaban 4</u>: tiene menos.

2. **Ordenar razones, teniendo las fracciones que las representan a la vista.**

Este tipo de tarea se planteo a continuación del anterior. El propósito fue que los alumnos usaran fracciones para expresar razones, junto con otras formas de expresión. La consigna fue la siguiente.

En la siguiente tabla, están anotadas las veces que tiró cada uno de los chicos, las veces que encestó y qué parte del total de tiros encestó.

Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto		6	
Mary	24		
Manu	25	10	
Valeria	(21)	14	
Tatiana	(24)	16	
Daniel	20		

Ubica a los jugadores, indicando quiénes son los mejores y quiénes los peores encestadores al aro.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto

Con el inciso a) se pretendía que los alumnos entraran en relación con las fracciones, calculando uno de los tres valores: la fracción parte todo, o la parte, o el todo, a partir de conocer los otros dos. Este ejercicio fue resuelto por un buen número de alumnos con pocas dificultades.

Las dificultades aparencieron en el inciso b). Contra lo que supusimos, el hecho de tener a la vista las fracciones, aunado al conocimiento que demostraron tener sobre ellas, no los llevó a considerarlas para ordenar a los jugadores del mejor al menos bueno. Ordenar a los jugadores, en base su desempeño, causó en los equipos intensas discusiones. Los alumnos oscilaron entre la comparación aditiva y la multiplicativa. A continuación mostramos algunos fragmentos expresivos.

i) Lo aditivo empieza imponiéndose: comparar mediante la cantidad de tiros no encestados.

Aline: Aquí de 12 a 20 son 8. Le voy a apuntar 8 aquí, chiquito. Luego de 16 a 24…8 [De última fila hacia arriba en la tabla]

Mauro: De 14 a 21… 7

(...)

Aline: Los números que anoté aquí son las veces que perdieron.

Mauro: Entonces los peores serían éstos tres de aquí [Señala en la hoja de Aline]. El 7, 15 y el 16.

ii) Emerge tímidamente la consideración de una razón fraccionaria: la de los tiros no encestados con respecto al total de tiros.

Mauro: (*refiriéndose a Mary*) ¡Le faltaron dos tercios!

Aline: No porque Mary tiró 24 veces. Es muchísimo. Y encestó… encestó 8. Perdió 16 tiros.

Mauro: Por eso, esa es peor, ¡Le faltaron dos tercios!

Aline: ¡Ah, sí!

El episodio anterior muestra que los alumnos entretejen, en su interacción, argumentos aditivos y multiplicativos: Mary falló en 16 tiros, cantidad absoluta que se ve grande, pero también ven que esa cantidad representa 2/3 del total de tiros, fracción que confirma que lo fallado es considerable.

iii) Pese a las fracciones “tiros encestados/total de tiros” explícitas e iguales, domina el hecho de que una cantidad de tiros no encestados es mayor que otra.

Hay una discusión entre Mauro (quien sostiene que Valeria tiene el primer puesto), y Axel y Aline (quienes sostienen que a Tatiana le corresponde el primer puesto), sin que entre en juego que ambas jugadoras encestaron la misma fracción de sus tiros: 2/3.

Mauro: El mejor puesto sería Valeria. [Pausa] Solo le faltaron 7. Y a Tatiana le faltaron 8. [Escribe] “Valeria primer puesto”.

Axel: Aquí, primero es Tatiana [*Indica el primer puesto*]

Mauro: No

Axel: SíAline: Tú dijiste que Tatiana tiró mejor.

Mauro: Sí, pero los que no encestó, le faltaron cuánto: le faltaron 8 [Indica en su hoja]

En cierto momento, Mauro y Axel optaron por igualar el número de tiros realizados por las dos jugadoras, para compararlas más fácilmente, pero lo hicieron también aditivamente.

Mauro: [Enfático] Si éste tuviera 24 [Refiriéndose a los 21 tiros de Valeria], le sumamos 3. Entonces a Valeria le sumamos 3 de los que anotó, serían 17. Serían 17, para que estén parejo 24 y 24. Serían 17. ¡Y aquí sólo anotó 16! [Refiriéndose a Tatiana]. ¡Y aquí serían 17! [Sonríe. Axel queda dudando]

Durante la puesta común, emergieron las contradicciones. Para unos el mejor jugador ha sido Manu, y para otros Mary. Para algunos equipos, Valeria fue mejor jugadora que Tatiana y para otros ambas deben estar en el primer puesto. Frente a esto, y probablemente por la presión del tiempo, la profesora no insistió en las contradicciones y optó por dar lugar a que se mostraran dos resoluciones correctas.

Llama la atención que las fracciones, explícitas y visibles en la tabla desde el principio, no les aportan información significativa para decidir quién jugó mejor. En los equipos anteriores, la idea misma de porporción parece estar en ciernes.

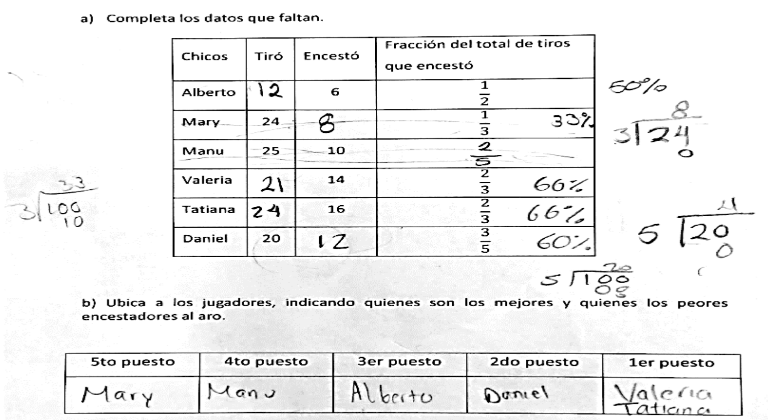
iv) La comparación de fracciones mediante el uso de técnica del común denominador

El equipo 4 ordenó las relaciones mediante la obtención de fracciones equivalentes con el mismo denominador (30). Es la resolución que se esperaba favorecer. Para una parte del grupo, sin embargo, podría no ser claro el motivo por el cual el orden entre esas fracciones es a la vez el orden de los desempeños de los jugadores.

v) Comparación mediante el cálculo de porcentajes de tiros encestados respecto del total de tiros realizados

Un equipo puso en juego a los porcentajes como expresiones de las razones. Los porcentajes emergieron nuevamente como expresiones más conocidas y fáciles de manipular, que la expresión fraccionaria (ver figura 2). La profesora también le dio un espacio en la puesta en común.

Figura 2: Calculo de porcentajes para comparar cantidades. Ana. Equipo 6.


a) Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto	12	6	$\frac{1}{2}$ 50%
Mary	24	8	$\frac{1}{3}$ 33%
Manu	25	10	$\frac{2}{5}$
Valeria	21	14	$\frac{2}{3}$ 66%
Tatiana	24	16	$\frac{2}{3}$ 66%
Daniel	20	12	$\frac{3}{5}$ 60%

b) Ubica a los jugadores, indicando quienes son los mejores y quienes los peores encestadores al aro.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto
Mary	Manu	Alberto	Daniel	Valeria Tatiana

3. Ubicar razones entre fracciones en la recta numérica

El contexto del tercer tipo de tarea consiste en comparar el desempeño de escuelas en base al número de alumnos que aprueban un examen, considerando el total de alumnos (por ejemplo, en la escuela A de 300 alumno, aprobaron 70). Despues de un trabajo preliminar sin fracciones (incisos 1 y 2a de la tarea que se muestra abajo), se buscó que los alumnos analizaran el papel que pueden jugar las fracciones para expresar razones mediante la ubicación de estas últimas en una recta numérica, entre fracciones clave (inciso 2b).

Todos los años, las cuatro escuelas de una pequeña ciudad, realizan un concurso de dibujos, videos y cuentos sobre el cuidado del medio ambiente. Los alumnos que pasaron a la siguiente etapa fueron los siguientes:

Escuela	Alumnos
A	70
B	28
C	28
D	12

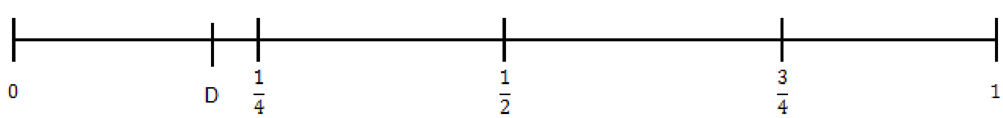
¿Se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados? Explica tu respuesta.

Los alumnos en cada escuela son

Escuela	Total de alumnos
A	300
B	30
C	120
D	120

a. Considerando esto, ¿qué escuela tuvo los mejores resultados?, ¿y los peores?

b. En la escuela D, menos de la cuarta parte de los alumnos pasó a la siguiente etapa de la competencia. Esa escuela se ubica en el primer intervalo de la recta de abajo. Ubica las otras escuelas. No necesitas ponerlas en el lugar exacto, solamente en el intervalo que les corresponde.



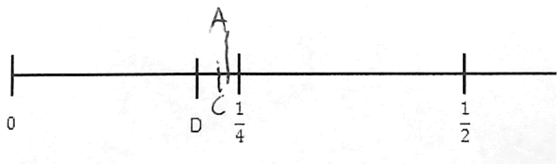
Centraremos la atención en las actividades que implican fracciones. Veamos primero el inciso b), ubicar a las escuelas en la recta numérica, entre los números 0, ¼ . ½, ¾ y 1, según su desempeño. Varios alumnos lograron ubicar las escuelas viendo a cuántos alumnos corresponde ¼ de cada escuela, o ½, tal y como lo sugiere la instrucción. Veamos cómo lo hace Axel.

(…)

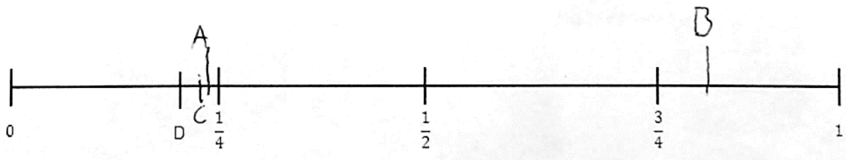
Axel: Oigan, el C [28 de 120], es ***menos de la cuarta parte*** *[Interrumpe]… Porque* ***la cuarta parte de la D sería 30****.*

(…) [Ubica C entre D y ¼]

Axel: [Continua su cálculo mental, ahora aplica ¼ a los 300 alumnos de la escuela A] 300 entre 2… 150… 75… Ah, no, sí, sí. [Escribe A entre C y ¼]



Finalmente, Axel ubica B entre ¾ y 1 y entrega su hoja, a partir de una estimación de que 28 de 30 es casi todo.



Obs$_2$: ¿Y no te faltó la A?

Axel: No, ya la ubiqué. También se ubica dentro del cuarto. ***El cuarto de 300 son 75****. Y los alumnos que pasaron fueron 70.*

Varios alumnos pudieron hacer razonamientos similares.

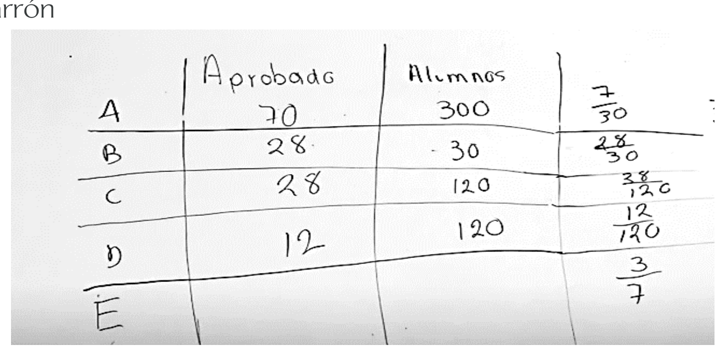
4. **Comparar una razón expresada mediante una fracción con otras razones expresadas mediante dos números.**

Nos centraremos ahora en la tarea siguiente:

Se sabe que 3/7 del total de alumnos de la escuela **E** pasaron a la próxima etapa del concurso, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

La mayoría de los alumnos pareció descartar de entradala posiblidad de que la fracción 3/7 aportara información. Para "desatorar" la situación, la profesora les ofreció varias ayudas: anotó en el pizarrón los datos de todas las escuelas, y añadió la escuela E; planteó comparaciones de la razones contra la razón "la mitad" (por ejemplo, 70 es menos de la mitad de 300), con lo que les hizo ver que la fracción 3/7 sí aportaba información. Luego los llevó a expresar todas las razones con fracciones (Figura 3).

Figura 3: Escrito en el pizarrón



	Aprobado	Alumnos	
A	70	300	$\frac{7}{30}$
B	28	30	$\frac{28}{30}$
C	28	120	$\frac{38}{120}$
D	12	120	$\frac{12}{120}$
E			$\frac{3}{7}$

A pesar de ello, en un primer momento del trabajo en equipos, se pudo observar que la mayoría de los alumnos no prestó a atención a las fracciones recien puestas en el pizarrón. La mayoría seguía considerando que la escuela E no se podía comparar con las demás escuelas. Veamos el trabajo de algunos equipos

La potencia de la razón ½

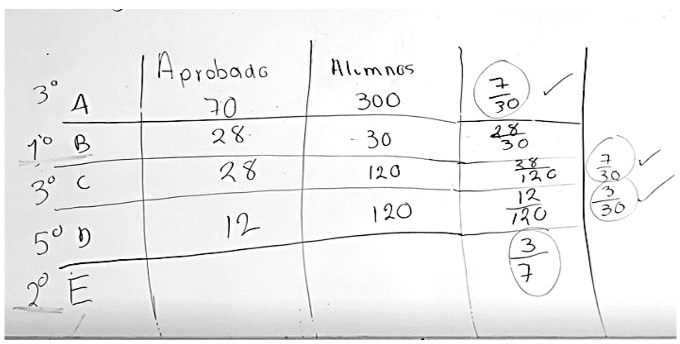
En el equipo 3 convirtieron las fracciones a 30 avos, pero varios consideraron que no era posible comparar con la escuela **E** (3/7). La profesora aprovechó la intervención de un alumno para cuestionar la idea de la imposiblidad, mediante comparaciones con la razón ½

(…)

Andrés: (…) convertimos la C y la D a treinta avos

(…)

Profesora: Okey, y entonces aquí teníamos treinta avos, treinta avos, treinta avos, treinta avos… ¿y qué pasó aquí? ¿Cómo lo compararon? [*Indicando la fila de la escuela E, con la fracción 3/7*]



Andrés: Porque…estuvo a punto de llegar a la mitad de (…)

Profesora: Bien, eso es importante. Dicen ellos: casi hizo la mitad. ¿Alguno de los anteriores hizo menos de la mitad?

Aos: Sí

Profesora: ¿Quién hizo menos?

Alumnos: la A, C y D.

Profesora: Ellos hicieron menos [*Coloca una viñeta en el pizarrón*]. *Entonces, ¿quién es mejor?... en relación a la E… o la A, o la B… o la C o la D.*

Alumnos: La B

Profesora: Pero si yo les pregunto la A, la C, y la E, ¿quién es mejor?

Alumnos: La E

Profesora: ¿Por qué la E, Byron? [*Indica la C: 3/30*]

Byron: Porque la E casi llega a la mitad, y en la C le falta mucho para…

(…)

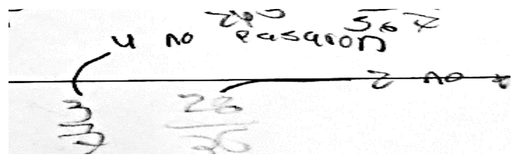
Identifican un par de cantidades cuya razón es 3/7

Poco a poco más alumnos descubren un par de datos cuya razón es 3/7, a saber, 3 aprobados de 7.

Byron: Nosotros diremos que lo hicimos así: [*escribe*] *"Eran 3… eran 7 alumnos y nomás 3 pasaron, faltaron 4. Y la B, tuvieron 28…* [*Con el cuerpo encogido y en el centro del grupo*]

María: De 30

Byron: De 30. Y nada más faltaron 2.



5. Un par o infinitos pares

La siguiente intervención de Byron es importante, pues a la vez que deja ver que es posible encontrar varias parejas de datos cuya razón es 3/7, considera que algo está mal pues no se sabe cuál de ellas es la correcta, como si existiera una sola correcta:

Byron: ¡De cuántos alumnos eran!... pues pueden ser ¡30, los que pasaron de 70!... ¡300 de 700!...¡¡3000 de 7000!!... nunca sabremos la verdad... [*pausa*]

Esta observación encierra una cuestión esencial de la noción de razón: que expresa la relación que guardan infinidad de pares de números, –y no un solo par– y que esa relación, –y no las cantidades–, e--s el objeto de la comparación. Lamentablemente no hubo condiciones de tiempo para que la observación fuera retomada.

6. El porcentaje.

Una vez más, la noción de porcentaje surge como portadora accesible de la noción de razón. Algunos alumnos lo proponen en la puesta en común, pero esta vez la maestra no da lugar a calcularlos:

Marian: (…) *sí se puede comparar porque…* [*Interrumpe*]. *Porque… haga de cuenta, los que restan… puede… los podemos convertir en porcentaje del total y así podemos saber esteee…, cuán… ¿qué porcentaje fue más grande o qué porcentaje fue menor y el menor porcentaje fue…?*

(…)

Axel: Marian, lo que dijiste fue del total de alumnos sacamos un porcentaje [Gesticula con la mano con dedos extendidos]... Por ejemplo, el 7 es el 100 porciento, ¿no? Y hay que investigar cuánto... un alumno, cuánto tiene de porcentaje en ese 100 porciento.

7. **La comparación de fracciones.**

El equipo 1 explicó que comparó convirtiendo todas las fracciones al denominador común 210. Así, en vez de identificar parejas de cantidades cuya razón sea 3/7, obtienen las fracciones que corresponden a los pares de cantidades de las otras escuelas. El procedmiento es rápido, pero queda sin saberse cómo conciben a la fracción 3/7.

Conclusiones

1. Efectivamente, en los cuatro tipos de tarea presentados, el trabajo con razones expresadas como dos naturales, en un contexto favorecedor, es decir, accesible, con razones susceptibles de compararse a simple vista, o mediante el intermediario de la mitad, o mediante porcentajes fáciles de obtener, dio lugar a que cada vez más alumnos tomaran en consideración las razones. Algunos, pocos, tiendieron a quedarse en el modelo aditivo.
2. Desde el punto de vista de integrar a las fracciones en el papel de razones, los tipos de tarea más productivos fueron el tercero (ubicar razones en la recta, entre fracciones clave) y el cuarto, dada una razón expresada con una fracción, compararla con otras expresadas de manera clásica. En la tercera tarea, la posiblidad de comparar contra la fracción unitaria ¼ ayudó a tender un puente entre ambos conceptos. La recta numérica jugó un papel como representación visual del orden. En la cuarta tarea, descubrir que una fracción como 3/7 se puede comparar con razones expresadas de manera clásica, con dos naturales, fue difícil pero constituyó un paso importante en el proceso de vincular los conceptos. De nuevo, la fracción ½ jugó un papel como intermediaria clave. Quedó pendiente, avanzar en la comprensión de un aspecto fundamental: 3/7 es la expresión de la razon de infinitos pares de cantidades (y no solamente de "3 de 7"), y todos ellos son equivalentes en cuanto al "desempeño de la escuela".
3. Dos resultados más que nos parecen relevantes son: se confirmó el papel fecundo de ciertas fracciones (sobre todo de ½) así como de la expresión de la razón con un porcentaje, para acceder a la noción de razón, y para facilitar su expresión numérica.
4. En todas las tareas, sobre todo en la 3 y 4, se manifestó la necesidad de un mayor número de réplicas.
5. No pudimos incluir aquí, por la necesidad de acotar, el análisis de la gestión de la profesora. Hacerlo ayudará a aquilatar más las dificultades que presentan las situaciones, y las estrategias docentes posibles.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 7-24). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Block, D. (2003). De la expresión "2 de cada 4" a la expresión "1/2 de". La noción de razón, precursora de la noción de fracción. En: *Memoria Electrónico del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa* (8 pp.). Guadalajara, Jalisco: COMIE, Sede CUCEA. UDG.

Block, D. (2006). Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón "múltiplo" y su vinculación con la multiplicación de números naturales. *Educación Matemática, 18*(2), 5-36.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G., Brousseau, N y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 1-20.

Davis, G. (2003). From parts and wholes to proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 213-2016.

Clark, M., Berenson, S. y Cavey, L. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, **22**, 297-317.

Sosa, J. J. (2018). *La probabilidad como lugar de encuentro de razones, fracciones y decimales. Un estudio didáctico en primer grado de nivel secundaria.* (Tesis de maestría inédita). Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Ciudad de México.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and operations in the middle grades. Vol 2.* (pp. 141-161). Hillsdale, N.Y: Lawrence Erlbaum Associates National Council of Teachers of Mathematics.