Significados y sentidos emergentes en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales: Una propuesta de enseñanza usando la modelación matemática

Fredy Peña Acuña
Cinvestav-IPN

Área temática: Educación en campos disciplinares.
Línea temática: El análisis cognitivo de la construcción, comunicación y desarrollo de conocimientos disciplinares.
Tipo de ponencia: Reporte parcial de investigación.

Resumen:

En este documento se presentan avances de una investigación que busca describir el proceso mediante el cual, estudiantes de segundo grado de secundaria se apropian de la sintaxis correspondiente a la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se parte de la idea de que la modelación matemática constituye una vía de trabajo que permite dotar a los objetos algebraicos de significados ligados a objetos o relaciones que se extraen del fenómeno que se está modelando, por ello, en este documento, se describen los significados y sentidos que se hacen presentes cuando los estudiantes enfrentan por primera vez una tarea que involucra el manejo de dos cantidades interrelacionadas mediante condiciones provenientes de un problema de modelación matemática.

Palabras clave: Modelación matemática, sintaxis algebraica, producción de sentido, construcción de significados.

Introducción

Estudios llevados a cabo desde la década de los ochenta (como los de Kieran, 1981; Filloy y Rojano, 1989; Gallardo 2002 y Filloy, Rojano y Solares, 2010 entre otros) ponen de manifiesto cortes didácticos en el estudio del álgebra escolar, por ejemplo, en los usos de las literales, del signo igual y en la solución de ecuaciones. De igual manera, se han aportado diversas estrategias para introducir el álgebra y su sintaxis que tratan de solventar las dificultades que comúnmente presentan los estudiantes y otorgar sentido a la manipulación sintáctica de los objetos algebraicos.

Tomando como referente teórico los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy 1999), los resultados encontrados por Filloy, Rojano y Solares (2010), en lo que tiene que ver con un segundo nivel de abstracción de las literales y la perspectiva de modelación matemática propuesta por Blum y Leiß (2007), este documento presenta resultados de la aplicación de la primera tarea de una secuencia de enseñanza para *sistemas de ecuaciones lineales* (SEL) que hace uso de la modelación matemática como fuente de significados para las ideas matemáticas que los estudiantes usan en su desarrollo.

Se parte de la idea de que la modelación matemática constituye una vía de trabajo que permite dotar a los objetos algebraicos de significados ligados a las ideas que se extraen del fenómeno a modelar. Esto gracias a su naturaleza de trabajar partiendo de referentes del mundo real, (Cirillo *et al*., 2016). Se propone que el trabajo en modelación matemática y el aprendizaje de la sintaxis algebraica pueden realizarse de manera simultánea y en los primeros años de secundaria.

De acuerdo con lo anterior se plantea como pregunta de investigación: *¿Cuál es el rol de la actividad de modelación matemática en la construcción de significados y producción de sentidos para el aprendizaje de la sintaxis algebraica de los SEL?*

Dos diferentes niveles de representación de la incógnita

En los ochenta, Filloy y Rojano (1989) identificaron un *corte didáctico* al momento que los estudiantes resuelven ecuaciones en las que deben manipular la incógnita, es decir en ecuaciones de la forma . Concluyeron que, para este *primer nivel de representación* de la incógnita, era necesaria una reconceptualización de ideas provenientes de la aritmética.

Posteriormente, Filloy, Rojano y Solares (2010) presentaron un estudio que tenía por objetivo observar el proceso mediante el cual los estudiantes adquieren la sintaxis de la solución de SEL ; en dicho estudio se proponían problemas de palabras de dos tipos, primero los de tipo para los cuales el valor de una de las incógnitas puede obtenerse en una sola de las ecuaciones. El segundo tipo de problemas, , se caracteriza por la presencia de ambas incógnitas en las dos ecuaciones.

Los autores manifiestan que el hecho de que en los problemas de tipo se haga necesario la escritura de una de las incógnitas en función de la otra, implica un *segundo nivel de representación* que presume además un *corte didáctico* pues se requiere de la construcción de nuevas maneras de representar y operar con las incógnitas.

Los resultados del estudio ponen de manifiesto la necesidad de proporcionar contextos reales y cercanos a los estudiantes, de manera que las relaciones encontradas entre las variables permitan la elaboración de expresiones algebraicas acordes al problema sin que se pierdan de vista los contextos de los que se generan. Esto además permitirá que se realice un proceso de modelación matemática en el que el contexto problema en cuestión sea un referente para dotar de sentido y significado a los elementos del planteamiento y solución de los sistemas.

Sistemas Matemáticos de Signos

La noción de Sistema Matemático de Signos (SMS) introducida por Filloy aparece por primera vez en Kieran y Filloy (1985) como una herramienta de análisis de los textos que producen los estudiantes a medida que se van haciendo competentes en matemáticas. Filloy (1999) manifiesta que el aspecto matemático de los SMS, no se debe al uso de signos comúnmente atribuidos a las matemáticas, por el contrario, lo que se denomina matemático es al sistema en sí, es decir al conjunto de signos, sus relaciones, formas de manipulación y significados.

Filloy (1999) pone de manifiesto que hay que hablar de SMS cuando existen convenciones socialmente establecidas de asignar funciones sígnicas, aun cuando éstas sean establecidas en situaciones de enseñanza de manera pasajera. También considera la necesidad de tomar en cuenta las producciones idiosincráticas del estudiante, aun cuando surjan por correspondencias que no pertenecen al constructo social del aula.

La noción de SMS constituye la principal herramienta de análisis para interpretar los procesos de producción de significado y de sentido que los estudiantes atraviesan durante una secuencia de enseñanza/aprendizaje.

Sobre la construcción de significados

Una concepción amplia de los SMS debe permitir unificar en una misma noción de signo el significado formal que les otorgan las matemáticas, así como el significado pragmático que se construye en su uso. Filloy (1999) considera cuatro tipos de fuentes de significado:

1. De transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS.
2. De traducciones a través de SMS distintos.
3. De traducciones entre SMS y Sistemas de Signos Matemáticos.
4. Con la consolidación y rectificación de procedimientos y conceptos de los SMS intermedios creados en el desarrollo de secuencias de enseñanza/aprendizaje.

Para objetos de este estudio se usan las fuentes de significado recién descritas para categorizar las acciones de los estudiantes en el desarrollo de las tareas propuestas.

Sobre la producción de Sentido.

Filloy (1999) comparte la distinción entre *significado* y *sentido* establecida por Talens y Company (1984) quienes aseguran que todo lenguaje (entendido como una construcción social) tiene significado y de alguna manera también lo es; sin embargo, el sentido depende de una producción propia que requiere una vinculación de los textos presentados (no necesariamente escritos) con otros textos que el sujeto tenga presente gracias a su experiencia.

Puig (2003) plantea que "un texto es el resultado de un trabajo de lectura-transformación realizado sobre un espacio textual, cuya intención no es extraer o desentrañar un significado inherente al espacio textual sino producir sentido. (p.182)"

Los sentidos de uso que el estudiante gesta durante el desarrollo del modelo de enseñanza, le permiten trabajar en SMS más abstractos con los que pueden decodificar un texto en términos de otro, si esta decodificación no es posible por medio del SMS que el estudiante se encuentra usando en ese momento es porque ese SMS aun no es lo suficientemente abstracto y que los textos correspondientes son transversales entre ellos. En ese aspecto, en este estudio se rastrean los momentos de producción de sentido que los estudiantes logran cuando se enfrentan a las tareas de modelación matemática propuestas.

El modelo de enseñanza

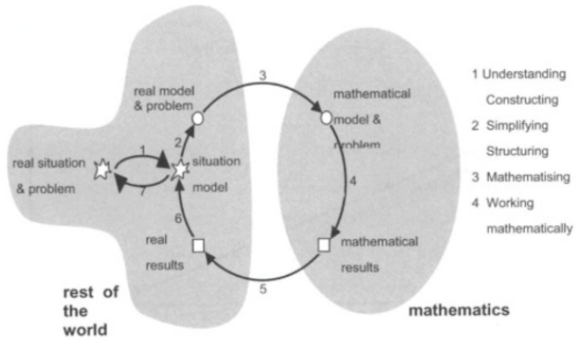
Los MTL plantean cuatro componentes para enfocar el objeto de estudio, estas son el modelo de competencia formal, el modelo de enseñanza, el modelo de procesos cognitivos y el modelo de comunicación, todos ellos estrechamente interrelacionados, en este estudio se plantea un modelo de enseñanza por medio del uso de la modelación matemática para el trabajo con SEL .

Para el diseño del modelo de enseñanza de este estudio se tomó como referente el planteamiento Blum y Borromeo (2016, p.72) para la elaboración de "buenas tareas" de modelización. Los autores plantean que las tareas deben ser *abiertas*, suficientemente *complejas*, *realistas* o de ser posible *auténticas*, *problemáticas*, *accesibles* y por último deben requerir que el estudiante transite por *todas las fases* del ciclo de modelación matemática, este ciclo se describe en la siguiente sección.

Sobre la modelación matemática

Para Blum y Borromeo (2016) la modelación matemática implica la totalidad del proceso de resolver problemas del mundo real por medio de las matemáticas. El esquema propuesto por Blum y Leiß (2007) presenta siete pasos que constituyen el ciclo ideal de modelación (ver Figura 1).

Ilustración 1: Esquema de modelación, Blum y Leiß (2007)



Para resolver un problema de modelación matemática el modelador deberá primero *entender el problema*, involucrando los aspectos que se presentan en la situación e identificando un objetivo al que debe llegar, posteriormente deberá construir un *modelo real*, en el que reconoce una forma de estructurar las variables que se encuentran en juego.

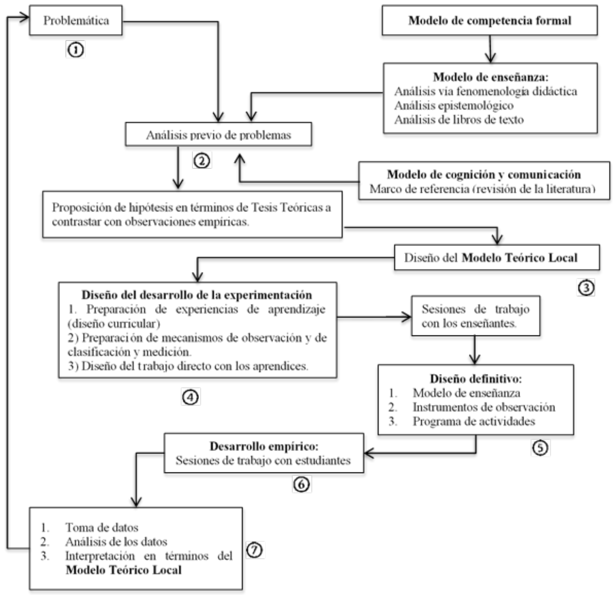
El tercer paso (*matematización*) transforma el *modelo real* en un *modelo matemático*, aquí se busca y reconoce una forma de representar matemáticamente las relaciones y variables encontradas. En el cuarto paso (*trabajo matemático*) el modelador realiza pasos propios de las matemáticas que permiten transformar los datos relacionados y encontrar nuevos datos denominados *resultados matemáticos.*

La interpretación de los *resultados matemáticos* es el quinto paso, allí se transforman en *resultados reales* que deberían incluir una solución al problema dado, no obstante, estos *resultados reales* deben ser validados a la luz del problema original (paso 6), de esta manera el modelador puede percatarse de si la respuesta es coherente con la naturaleza del problema o si es necesario repetir uno, algunos o todos los pasos previos. El séptimo paso implica la presentación de los resultados obtenidos.

Diseño de la experimentación

El método que se usa para el levantamiento y análisis de datos de esta investigación obedece a la propuesta metodológica que presenta Filloy (1999). Así, la Ilustraciones 2 esquematiza, las fases de diseño de la experimentación, la cual ya fue concluida con el levantamiento piloto de datos al aplicar la primera de las actividades de la secuencia.

Ilustración 2: Diseño de la experimentación



Caracterización de la población

El levantamiento de los datos se realizó en la Escuela secundaria técnica 36 Ingeniero Manuel Moreno Torres. El equipo escogido para el estudio fue sugerido por la maestra titular, se contó con la participación de 20 estudiantes con edades entre los 13 y 14 años los cuales no habían recibido previamente formación respecto de SEL ni de solución de problemas de modelación matemática. Se dispuso de una sala de cómputo y los estudiantes trabajaron en 9 computadores en equipos de 2 o 3 haciendo uso de una hoja de cálculo para apoyar su trabajo.

La sesión de trabajo tuvo una duración de una hora con 40 minutos en este tiempo los estudiantes realizaron la tarea propuesta y presentaron en sus hojas de trabajo los resultados a los que llegaron.

La tarea que se implementó con este grupo fue la siguiente:

> Cacahuates y Nuez: El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de $120 el kilo, un empresario desea crear 25 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $60 por kilo ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Para solucionar la tarea se propuso a los estudiantes hacer uso de una hoja de cálculo de manera que pudieran relacionar las posibles combinaciones enteras para conseguir 25 kilos de mezcla, de esta manera podrían relacionarse con el manejo de dos incógnitas y reconocer las formas en las que interactúan en relación con el problema.

Sobre la producción de significados

La observación del proceso llevado a cabo por un grupo de estudiantes para dar solución al problema revela producción de significados matemáticos de distinta naturaleza. A continuación, se presentan cada uno de estos significados describiendo el momento en el que surgen y sus implicaciones en las producciones de los estudiantes.

Variación y dependencia

Luego de la lectura inicial del problema y de que los estudiantes identificaran los datos que ellos consideraron necesarios para resolverlo (fases 1 y 2 del ciclo de modelación), surge una primera aproximación a la respuesta que se evidencia en el siguiente fragmento.

E2: Medio kilo y medio kilo

E1: [silencio] Pero necesita $60

E2: [silencio] Entonces una tercera parte de nuez

Este intercambio de palabras refleja que los estudiantes anticipan como respuesta una repartición equitativa de cantidades, pero que se niega dada la dependencia de éstas a la que llamaremos *primera condición*, es decir a la indicación de que el costo por kilo del producto sea de $60. Puede suponerse que la pausa que realiza E1 fue ocupada en ratificar si al juntar medio kilo de cada producto se obtiene un valor total de $60 para la mezcla, esto calculando, aunque no de manera explícita, el resultado de $120(1/2)+40(1/2)$.

La respuesta dada por E2 también permite suponer que ha identificado la relación de dependencia de los valores respecto de la primera condición, esto dado que la expresión $120(1/3)+40(1/2)$ sí corresponde con 60.

Observando además la facilidad con la que E2 cambia su respuesta, podemos concluir que ha *significado* a las cantidades como variables, asumiendo que pueden tomar distintos valores en función de que se cumpla la primera condición. Sin embargo, cabe aclarar que no se reconocen nociones de variable independiente y dependiente, puesto que no se obtiene una a partir de la otra. Esto lleva a suponer que las nociones de variación y dependencia se están significando desde las ideas de *covariación* y de *interdependencia*.

Intersección de funciones

Pasados algunos minutos de que los estudiantes anticiparan la respuesta al problema, surge un tercer momento de producción de significado, esta vez de la idea de *intersección de funciones*, la cual es fundamental para el entendimiento de los SEL en relación con las funciones que los definen. El siguiente fragmento ejemplifica esta idea.

E1: Lo que voy entendiendo, ¿así estaría dividido el kilo? [silencio] pero no es un kilo [silencio] eso no es un kilo [susurra] 5/6, nos falta un sexto, ¿de dónde vamos a sacar ese 1/6?

E2: ¿de un poquito más de Wichita?

E1: No, pero entonces saldría más dinero

La participación de E1 revela una verificación de la anterior respuesta (fase 6 del ciclo de modelación) en relación con la que llamaremos *segunda condición* y que corresponde a la consecución de una mezcla de un kilo del producto (no 25 como plantea el problema, este asunto se abordará más adelante). Se puede afirmar que, para este punto, el estudiante ya reconoce la presencia de dos condiciones que deben cumplirse de manera simultánea.

La respuesta de E2 a su compañero ratifica nuevamente la idea de variación de las cantidades, sin embargo, la respuesta inmediata de E1 "no, pero saldría más dinero" muestra que para ese momento él reconoce que las cantidades elegidas deben cumplir en simultaneo las dos condiciones del problema.

Los resultados recién mostrados dan cuenta de que, en efecto, la lectura e interpretación del problema permitió a los estudiantes el reconocer en principio dos condiciones para las cantidades, otorgando de esta manera significado a las ideas de dependencia y variación. Con esto en mente, ellos pudieron realizar suposiciones en relación con una de las condiciones, no obstante, el reconocimiento de la segunda condición en equivalente grado de importancia para el problema les permitió dar significado a la intersección de funciones y, de esta manera, se puede suponer que les permitirá acercarlos a consolidar una idea formal de *SEL*.

Sobre la producción de sentidos

Si bien, es interesante observar los momentos de producción de significado de los objetos matemáticos que los estudiantes usan en el problema, también vale la pena referirnos a las formas como los usan y las estrategias que llevan a cabo para solucionar la tarea.

Coordinación de variables

Particularmente la elección de cantidades en función de una de las condiciones del problema y la verificación de éstas en relación con la otra es un proceso al que se llamará en adelante *coordinación*. Luego de que E1 advirtiera que la repartición que había asumido en principio como respuesta no correspondía a la unidad, decidió verificar (por ensayo y refinamiento) cada una de las siguientes aproximaciones.

Luego de unos momentos, una intervención del docente les otorgó a los estudiantes una tabla construida en la hoja de cálculo que les permitía validar la primera condición del problema cuando ellos colocaban los dos valores iniciales. El equipo no tuvo dificultades para el llenado de la tabla haciendo que los valores iniciales verificaran la condición de completar 25 kilos. De esta manera presentaron como respuesta al problema la repartición 16 kilos de cacahuate y 9 de nuez, con la que el costo del kilo de la mezcla es de $59.2 por kilo.

El sentido dado a la coordinación de los valores en relación con las dos condiciones que el problema impone es un asunto de vital importancia para avanzar a la consolidación de un método sintáctico para la solución de este tipo de problemas. Para esta tarea el método de ensayo y refinamiento fue suficiente, aunque no otorgó una respuesta exacta, este asunto podría aprovecharse para generar la necesidad de introducir el lenguaje algebraico y los métodos analíticos para la solución de los sistemas.

Normalización del sistema

En la descripción realizada previamente sobre la producción de significado (intersección de funciones) se mencionó que los estudiantes establecieron como segunda condición del problema el que la suma de las cantidades fuera 1, en lugar de 25. Este hecho es sorprendente en esta investigación pues se esperaba que aun cuando no fuera de manera explícita, los estudiantes trabajaran con el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} (1) & 120x + 40y = 1500 \\ (2) & x + y = 25 \end{cases}\right\}$$

No obstante, los datos muestran que los estudiantes estaban trabajando sobre un sistema isomorfo resultado de una normalización al aplicar las sustituciones $u = \frac{x}{25}$ y $v = \frac{y}{25}$. y . que resulta en:

$$\left.\begin{cases} (1) & 120u + 40v = 25 \\ (2) & u + v = 1 \end{cases}\right\}$$

Este proceso seguramente no es resultado de una aplicación formal de algún método para simplificar el sistema sino más bien es obtenido luego de que la escritura del problema indicara que el costo debe ser "por kilo". Sin embargo, es importante reconocer en este caso que una mención tan pequeña en la escritura del problema puede brindar la oportunidad para ejemplificar un asunto mucho más avanzado como la sustitución algebraica o la normalización del sistema.

El rol de los coeficientes

En relación con el rol de los coeficientes, es importante rescatar el siguiente fragmento de conversación:

E1: El más caro es el Wichita

E2: Ajá

E1: Así que yo digo que hay que usar menos Wichita

E2: ¿y si ocupamos un kilo de cacahuate y una tercera parte del Wichita?

E1: No, porque el kilo de cacahuate ya sería un kilo

E2: y si ocupamos [silencio] es que dividir 40 entre 4 daría 10 [silencio] ¡$10!

E1: 20 kilogramos de cacahuate y 5 de Wichita, para que gastemos más

Acá, mientras E2 parece seguir interesado en encontrar (no de manera sistemática) una repartición de la unidad que funcione como solución al problema. E1 muestra una reacción al hecho de que el costo por kilo de nuez es mayor. La afirmación "yo digo que hay que usar menos Wichita" luego de reconocer que es la de mayor precio, refleja que reconoce una relación de tipo multiplicativo entre la cantidad del producto y el precio final de la mezcla. Puede suponerse que al observar que el precio buscado está más cerca del menor de los valores, asumió que debía usar más del producto económico y menos del costoso.

Los demás grupos

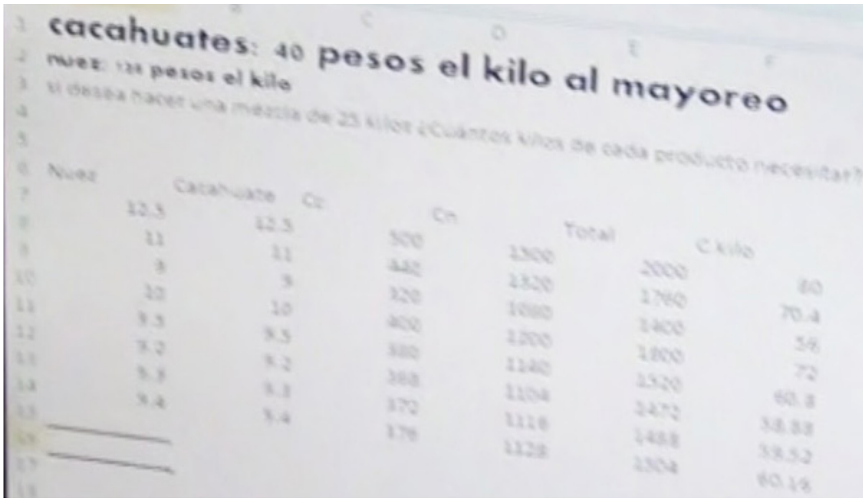
Si bien, la observación principal se realizó a una pareja de estudiantes, la cual tenía una cámara fija que filmaba todas sus producciones, durante el experimento también se lograron capturar algunas intervenciones de los demás estudiantes cuando el docente se acercaba a preguntarles sobre el avance en su proceso, esto pues se dispuso de una segunda cámara para tal fin.

Puede notarse que, al iniciar la tarea, los estudiantes generalmente optaron por hacer uso de conocimientos previos o aproximaciones intuitivas. Esto se refleja en que la mayoría supuso que una repartición de los granos a partes iguales (mitad y mitad) podría ser la respuesta al problema, o que podía aplicarse una regla de tres para hallar la solución. La Ilustración 3 evidencia este hecho.

Ilustración 3: Regla de 3 planteada por el equipo 6 y 7

Luego de que el docente indicara un procedimiento que hacía uso de la hoja de Excel para corroborar las aproximaciones, los estudiantes podían verificar si los valores que asumían como respuestas cumplían la condición del costo. *Es interesante observar cómo algunos equipos asumían valores iguales para las cantidades involucradas en el problema (ver ilustración 4). Este hecho podría reflejar la presencia de una tercera condición tomada por los estudiantes o, eventualmente, el no reconocimiento de una segunda variable.*

Ilustración 4: tabla construida por el equipo 6



A manera de resumen de lo observado en las producciones de los demás estudiantes se presenta la Tabla 1.

Tabla 1:*Resumen de los hallazgos en las producciones de los demás equipos*

Sobre los significados	Sobre los sentidos
• Noción de dependencia y variación	• Noción de dependencia y variación • Inclusión de la función identidad como condición del problema • Ensayo y refinamiento

Discusión

Los resultados de este estudio piloto muestran una gran potencialidad del modelo de enseñanza para el trabajo con SEL. Sin embargo, la estrategia de ensayo y refinamiento aplicada por los estudiantes hace suponer que no se hace necesario la introducción del SMS propio de los métodos sintácticos para la solución de los problemas.

Se hace necesario entonces, evaluar el modelo de enseñanza para considerar en qué momento conviene otorgar a los estudiantes las herramientas sintácticas propias para el planteamiento y solución de los SEL. Esto con el objetivo de observar cómo evolucionan o cambian, luego de la instrucción, los significados y sentidos que los problemas propician.

Se espera que las siguientes tareas favorezcan además la aparición de nuevos significados y sentidos en los estudiantes, esto al ampliar el SMS que los estudiantes usan mediante el trabajo con representaciones gráficas y analíticas. Será interesante observar además cómo el cambio entre representaciones y los problemas de modelación matemática se complementan para brindar a los estudiantes herramientas y estrategias de solución para los problemas.

De la observación de los datos del piloto ya se ha obtenido una primera versión de respuesta a la pregunta de investigación. Sin embargo, ésta será robustecida en las fases posteriores del estudio, con la implementación de la secuencia en su totalidad y con la intervención del docente para la introducción de las estrategias de manipulación sintáctica de los SEL. Esto en correspondencia con el trabajo de Filloy, Rojano y Solares (2010) para hacer frente al corte didáctico que el trabajo con este tópico del álgebra supone.

Como se observa, aún existe un terreno amplio en el que se puede dar continuidad a este estudio. De los resultados obtenidos del piloto, se puede afirmar que la elección teórica y metodológica, así como la estrategia usada para el análisis, parecen ser convenientes para el alcance de los objetivos de la investigación planteada.

Referencias

Blum, W., y Borromero, F. (2016). Advancing the Teaching of Mathematical Modeling: Research-Based Concepts and Examples. En C. Hirsch, & A. McDuffie (Edits.), *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pág. 65-76). National Council of Teachers of Mathematics.

Blum, W., y Leiß, D. (2007). Deal with modelling problems?. *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*, 222.

Cirillo, M., Pelesko, J., Mathew, N., y Rubel, L. (2016). Perspectives on modeling in school mathematics. En C. Hirsch (Ed.), *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (págs. 3-16). Kalamazoo, Michigan: National Council of Teachers of Mathematics.

Filloy, E. Y. col. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*. *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2010). Problems Dealing with Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal of Research in Mathematics Education,* 41(1), 52-80.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 317-326.

Kieran, C., y Filloy, E. (1985). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica (Traductor Puig, L.). *Enseñanza de las Ciencias*, *7* (3), 229-240.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual, 174-186.

Talens, J., y Company, J. M. (1984). The Textual Space: On the Notion of Text. *The Journal of the Midwest Modern Language Association* , *17* (2), 24-3.