Estudio de covariación trigonométrica: el caso de la función seno

Marcela Ferrari Escolá
Facultad de Matemáticas-Universidad Autónoma de Guerrero

María Esther Magali Méndez Guevara
Facultad de Matemáticas-Universidad Autónoma de Guerrero

Área temática: Educación en campos disciplinares.
Línea temática: El análisis cognitivo de la construcción, comunicación y desarrollo de conocimientos disciplinares.
Tipo de ponencia: Reportes finales de investigación.

Resumen:

Centramos esta investigación en el estudio de la covariación como aquella simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente, entrelazándola con elementos de modelación matemática como un medio de provocar la profundización del acercamiento a función. En este trabajo reportamos la producción de tres estudiantes de bachillerato en la primera sesión de un experimento de enseñanza donde consideramos que su razonamiento covariacional evolucionó desde una exploración gráfica intuitiva a un estudio sobre las características de una función seno mediante la modelación de un fenómeno físico en un ambiente de geométrica dinámica.

Palabras clave: educación matemática, covariación trigonométrica, bachillerato.

Introducción

Centramos esta investigación en el estudio de la covariación como aquella simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente, entrelazándola con elementos de modelación matemática como un medio de provocar la profundización del acercamiento a función.

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2002) consideran que el razonamiento covariacional involucra actividades cognitivas para coordinar dos cantidades que varían mientras se examina el modo en el que cambia una en relación a la otra. En tanto que la modelación como construcción continua de conocimiento, busca aminorar la tensión entre la matemática escolar y la matemática funcional, en tanto sea útil a quien la construye y posibilite su desarrollo en otros escenarios (Méndez & Cordero, 2014).

Razonamiento covariacional en funciones particulares

En búsqueda de fortalecer el desarrollo del razonamiento covariacional se percibe mayor sensibilidad hacia el estudio de funciones particulares tales como funciones cuadráticas (Ellis, 2011), funciones exponenciales (Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan & Amidon, 2016), funciones logarítmicas (Ferrari, Martínez & Méndez, 2016; Kuper & Carlson, 2018); funciones trigonométricas (Moore, 2013, 2014), entre otras; donde posicionamos nuestra investigación, en particular sobre la función seno diseñando las tareas desde la modelación matemática.

Modelación matemática

Coincidimos con Schukajlow, Kaiser y Stillman (2018) en que existe una larga tradición de enseñanza-aprendizaje de modelación en matemáticas, en la cual el enfoque cognitivo ha dominado el desarrollo de investigaciones empíricas en las últimas décadas.

Efectivamente, para Blomhoj (2004) la modelación matemática constituye una práctica de enseñanza que focaliza el proceso de enseñanza y aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática.. Otros autores como Rodríguez y Quiroz (2015) la exponen como el proceso cíclico consistente en la creación o uso de modelos matemáticos para la resolución de una problemática basada en fenómenos de naturaleza física o social relacionados con la realidad.

Schukajlow, et al. (2018, p.9) evidencian que: “se están realizando más investigaciones para medir las competencias de modelación metacognitiva (Vorhölter 2017), identificando las competencias de modelación matemática necesarias en contextos específicos (Alpers 2017); o diseñando unidades de enseñanza dirigidas a la competencia de modelación global de los estudiantes; así como la motivación (Kreckler 2017; Reit y Ludwig 2015); o el apoyo de los docentes a los estudiantes al implementar matemáticas orientadas a modelos matemáticos (Besser et al. 2015; Stender et al. 2017); o el papel mediador de las herramientas digitales en el desarrollo de modelación matemática y la competencia lingüística (Greefrath y Siller 2017; Rodríguez Gallegos y Quiroz Rivera 2015)", entre otros. Observamos entonces que se busca promover la reconceptualización y reorganización de las matemáticas escolares desde la modelación.

Reportes sobre funciones trigonométricas

Según Demir y Heck (2013), las dificultades en estudiantes y su visión fragmentada de la trigonometría se derivan de la poca relación entre triángulo rectángulo y trigonometría en el tratamiento curricular. Moore (2013), por su parte, discute usar la medición de ángulos como una base sobre la cual construir una presentación coherente del círculo unitario y la trigonometría del triángulo rectángulo. Moore, LaForest y Kim (2015) observan en su investigación que para relacionar la longitud de un arco de circunferencia con el radio surge el círculo unitario como estrategia de cálculo, reforzando su acercamiento a la covariación trigonométrica. Martínez-Planell y Cruz Delgado (2016), sostienen que observar la comprensión del alumno sobre trigonometría pone de manifiesto la sutil interacción entre el pensamiento geométrico y analítico involucrado en la construcción mental de las funciones seno y coseno.

En nuestras investigaciones exploramos sobre cómo desarrollar el razonamiento covariacional trigonométrico de estudiantes y profesores donde se entremezcle lo estático (razones trigonométricas) con lo variacional (funciones trigonométricas) desde la modelación de fenómenos físicos.

Propósito de la investigación

Con base en la revisión precedente, consideramos que es necesario profundizar sobre el razonamiento covariacional de las funciones trigonométricas, en particular, la función seno. El propósito de esta investigación es explorar el desarrollo del razonamiento covariacional trigonométrico en estudiantes de bachillerato que aún no han tenido acercamiento al estudio de la variación, es decir, no han participado en cursos de cálculo.

Nuestra hipótesis es que al trabajar con estudiantes de nivel medio superior y que no han recibido aún instrucción escolar sobre funciones, se generarán argumentos y explicaciones matemáticas para describir un fenómeno físico desde la intuición y donde la modelación propiciará el desarrollo del razonamiento covariacional trigonométrico.

Desarrollo: Marco teórico

Sustentamos nuestra investigación desde constructos teóricos del razonamiento covariacional moviéndonos de lo discreto a lo continuo en tanto se modela un fenómeno físico diseñando las tareas desde los elementos proporcionados por la modelación escolar.

Modelación escolar

En nuestra concepción sobre modelación un elemento primordial es la experimentación o la evocación de experiencias, porque genera un marco de significación para las prácticas, motivando en primera instancia la toma de decisiones sobre la relación entre las variables que se van a estudiar. En la modelación inevitablemente se estudian fenómenos que involucran cambios o variaciones, lo cual exige a los estudiantes a explorar situaciones en las que identifiquen, interpreten y analicen los comportamientos locales y globales de los datos del fenómeno, porque esto conlleva a caracterizar al tipo de funciones tratadas, en nuestro caso, la función seno.

En la modelación escolar se explicitan elementos (Fig. 1) tales que formulan un eje de argumentación en las tareas y son vinculados mediante actividades como: interpretar, organizar, especular, calcular, ajustar, postular, adaptar y consensuar, entre otros. Esto provoca el uso de tablas de datos, de gráficas y de expresiones analíticas así como su articulación, base de la modelación matemática.

Fig. 1: Esquema de los elementos de la modelación escolar

Razonamiento covariacional trigonométrico

Para analizar los datos de nuestra investigación utilizamos los niveles propuestos por Thompson y Carlson (2017) agregando nuestras conjeturas sobre el razonamiento covariacional trigonométrico (Tabla 1)

TABLA 1: Razonamiento covariacional

Razonamiento covariacional		
Nivel	Razonamiento Covariacional (Thompson y Carlson, 2017)	Razonamiento covariacional trigonométrico
	Descripción	Conjeturas de los autores
Sin coordinación	No se tiene una imagen de cantidades que varían simultáneamente, sólo nos enfocamos en la variación de una u otra variable sin coordinar los valores.	Exploran con la simulación del movimiento circular, considerando el tiempo como una de las variables y observan la trayectoria del punto y quizás la reproduzcan gráficamente.
Pre-coordinación de valores	Se visualiza los valores de dos cantidades que varían, pero de forma asíncrona, una variable cambia, luego la otra cambia, luego la primera, y así sucesivamente. No anticipamos la creación de pares de valores como objetos multiplicativos.	Observan que, al pasar el tiempo, también cambia la posición del punto respecto a un eje de referencia (altura) o respecto al centro del círculo (ángulo).
Coordinación burda de valores	Se percibe que los valores de cantidades varían juntas tal como "esta cantidad aumenta mientras que esta cantidad disminuye" pero no se visualiza simultáneamente los valores individuales de esas cantidades. Además, se concibe un vínculo no multiplicativo entre cambios generales en los valores de las dos cantidades	Coordinar la dirección del cambio en las variables; identifican intervalos de crecimiento o decrecimiento de la altura del punto en tanto el ángulo o el tiempo aumenta.
Coordinación de valores	Se coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x,y)	Cuantifican variables y coordinan valores de una variable con los de otra variable al construir puntos de la curva que describe el movimiento. Determinan el período de la función.
Covariación continua a trozos	Se percibe que los cambios en el valor de una variable suceden simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y se concibe que ambas variables varían con una variación a trozos.	Ajustan los puntos construidos con una expresión algebraica pero no perciben la densidad entre puntos.
Covariación continua suave	Se conciben cambios (aumentos o disminuciones) en el valor de una cantidad o variable tal como ocurre simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, y se abstrae que ambas variables varían de manera continua y suave.	Ajustan los puntos construidos con una expresión algebraica y perciben los números reales en el dominio como en la imagen de la función.

En estos términos nuestro objetivo es enfrentar a un individuo a tareas matemáticas para que construya su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las acciones que las tareas requieren. Nos interesa que los estudiantes se cuestionen sobre qué y cómo varían los elementos involucrados en las tareas del experimento de enseñanza; donde se los invita a describir el movimiento circular de un punto desde una simulación en geometría dinámica.

Nos cuestionamos entonces sobre ¿Qué evolución del razonamiento covariacional trigonométrico se percibe en estudiantes de bachillerato cuando modelan un fenómeno físico con anterioridad a su instrucción formal sobre la función seno?

Metodología

Consideramos como metodología, el experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000), ya que nuestro propósito es percibir el desarrollo del razonamiento covariacional de estudiantes de bachillerato provocado por un diseño de tareas en un ámbito discursivo que propicia GeoGebra analizando las producciones en interacción con sus compañeros.

Participantes y contexto

El experimento de enseñanza fue desarrollado en dos sesiones de cuatro horas (Tabla 1), con 6 estudiantes de cuarto semestre de bachillerato. Los estudiantes, de 16 y 17 años, fueron organizados en dos equipos de tres jóvenes. De acuerdo a los programas de bachillerato, estos estudiantes han cursado Geometría y Trigonometría donde se les han presentado: razones trigonométricas, círculo unitario, identidades y resolución de triángulos; pero no han recibido aún instrucción sobre cálculo pero sí un curso de física.

Tareas

En la primera sesión, se propone describir el movimiento de un mosquito parado en el aspa de un ventilador (adecuación de actividad de More, 2014) mediante un applet realizado en GeoGebra. Se propicia así la observación del fenómeno y se solicita a los estudiantes describir gráficamente el movimiento. En la segunda sesión, se utiliza GeoGebra para construir geométricamente puntos de la gráfica que representaría el movimiento del mosquito, sesión que no se reporta en este trabajo.

Recolección y análisis de datos

Las dos sesiones fueron desarrolladas por un profesor en formación apoyado, como testigo, por un investigador, autor principal de este reporte. Las sesiones fueron videograbadas así como recopilado las evidencias escritas de los estudiantes. En cada equipo se colocó una videocámara y un grabador que fueron controlados por dos auxiliares de investigación.

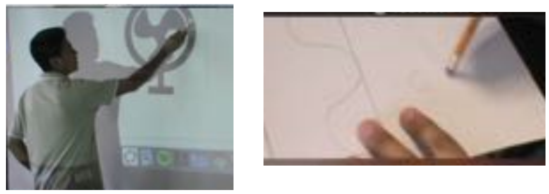
Para el análisis de los datos se transcribieron los vídeos y se vincularon con el escaneo de las producciones escritas de los estudiantes. Los autores de este artículo trabajaron para detectar extractos que evidencien evolución en el razonamiento covariacional en tanto articulan elementos para modelar el fenónemo. En sesiones de trabajo, los investigadores triangulan las observaciones de sus análisis y se consensuó cada extracto para dar evidencia de los resultados del equipo 1 conformado por los estudiantes E3, E4 y E5 (pseudónimos).

Resultados

Reportamos en esta sección el análisis de la producción del Equipo 1 en la primera sesión del experimento de enseñanza donde consideramos que su razonamiento covariacional evolucionó desde una exploración gráfica intuitiva a un estudio sobre las características de una función seno mediante la modelación de un fenómeno físico en un ambiente de geométrica dinámica.

En la primera sesión, observando el movimiento del mosquito (simulación en GeoGebra) E4 traza los ejes cartesianos dibujando, en el primer cuadrante, dos semicircunferencias. Explica a sus compañeros sus ideas usando la proyección de la simulación del fenómeno (Fig.2) para describir el movimiento, pero no explicita ni discute sobre las variables que involucra.

Fig. 2: primera descripción gráfica del fenómeno



La primera descripción del movimiento es una reproducción exacta de lo que ven, asociando el cuarto de semicircunferencia creciente de la gráfica con la subida del mosquito desde la parte más baja del ventilador; y la bajada del mosquito con el cuarto decreciente de la semicircunferencia de la gráfica. Consideran que el diámetro de la circunferencia es de 50 centímetros.

E3 y E4 se enfrascan en discutir sobre cómo representar la parte en la que el mosquito sube y luego baja en dirección de derecha a izquierda, para luego hacerlo de izquierda a derecha del centro del ventilador en tanto que para E5 es necesario aclarar qué variables se utilizan en la gráfica (Extracto 1).

Extracto 1: Decidiendo variables

E4: aja… como que hay… como que hay un brazo o mmmm… o algo que se va estirando… algo que va representando esta línea… pero pues… el movimiento lo va marcando… lo va dibujando acá (siguiendo la gráfica con su dedo)

E3: pues sí… quedaría como algo así…

E4: si algo así…

P1: [dirigiéndose a E5] ¿estás de acuerdo?

E5: pues sí… si la gráfica está bien pero no viene explicada…

E3: si… de alguna manera tenemos que.. no sé… ponerles sus variables… sus variables como por ejemplo aquí sería el tiempo (indicando eje x) y acá no se… quizás los centímetros del…

E4: pues sí… habría que verlo

E3: pues el tiempo pues… da igual… es casi lo mismo… digamos que podemos ponerle cualquier valor cuando baja…mmmm… cuando está de arriba abajo del ventilador que de abajo arriba… pero por ejemplo aquí (indicando el eje y) digamos que un ventilador de quizás 50 centímetros (hace una marca en el eje a la altura de su semicircunferencia) y así describimos básicamente que aquí está subiendo los centímetros o que baja… que luego sube… y baja… pues sí… aquí se ven los 25 centímetros (hace la marca a la mitad de la semicircunferencia) y aquí los ceros…

E3 y E4 interpretan de manera distinta lo que representan con las semicircunferencias. Para E3 la primera semicircunferencia ya representa el período del movimiento, es decir, la vuelta completa del mosquito, en tanto que E4 la considera la mitad, de allí que en la gráfica que propone (Fig. 3) coloca dos semicircunferencias consecutivas (Extracto 2).

Extracto 2: Discusión sobre el período del movimiento

E3: Cada medio círculo que representamos es …

E4; es media vuelta?…

E3: es una vuelta completa porque aquí es donde sube y aquí donde baja…

E4; aquí lo estás tomando como un círculo o cómo?

E3; eh??? No… es como el punto intermedio donde aquí empieza un medio círculo y aquí otro… y aquí dice que termina el recorrido del mosquito… a los 8 segundos…

E4; a…ok… aquí es cuando sube (*repasa la curva creciente*) y acá es donde baja (*recorre la curva decreciente hasta el 0 en x*)…mmmm espera… es que no entiendo… es esta otra… (*la segunda semicircunferencia*)… no entiendo… pues mira… es cuando subió … va para arriba… y aquí es cuando bajó… y aquí (*a la mitad de la siguiente subida*) es cuando … yo entiendo… es ahí donde terminamos un círculo… da la vuelta y se prepara para dar otra vuelta… (*marca el fin de la gráfica*)

Una vez consensuado el período del movimiento comienzan a discutir si lo que están representado es la trayectoria del mosquito o la distancia que recorre, discusión que es incentivada por el profesor (Extracto 3).

Extracto 3: trayectoria versus distancia

PI: ¿tú estás de acuerdo que se trata de distancia? (se dirige a E4)

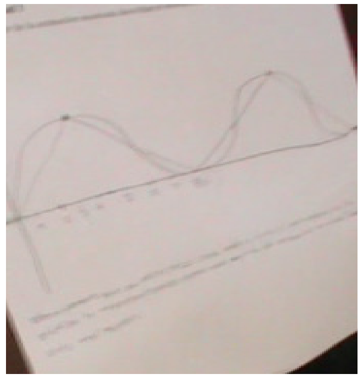
E4: mmmm…. Pues de hecho… no…mmm sería más como hablar de su posición….

E3: es que si decimos distancia… estamos diciendo por ejemplo que una vuelta son 50 centímetros… entonces aquí está dando dos vueltas… y llegaría a 100… y la gráfica debería seguir subiendo…

PI; ¿y si fuera posición como dices tú?

E3: aja… sería que llega a esta posición y se regresa…

Fig. 3: Gráfica lineal para representar posición del mosquito



E4 propone una gráfica lineal pues reconoce que la velocidad del ventilador es constante, por lo que considera que la distancia que recorre el mosquito debería ser representada por líneas rectas. Construye entonces triángulos (Fig. 3), sobre la gráfica original, respetando los máximos y mínimos considerados inicialmente lo cual dispara una discusión sobre qué gráficas es la más adecuada (Extracto 4).

Extracto 4: Trayectoria versus posición

E4: tal vez sería que de esta manera (*repasando la curva*) sería trayectoria…

E3; ¿trayectoria?

E4; y si sería la trayectoria entonces no serían las líneas verdad? (*le pregunta a P1*)

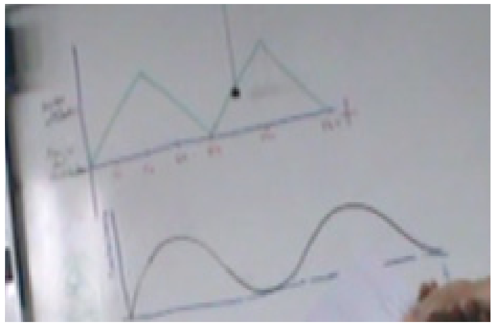
P1: y tú que crees

E3; pues sí… yo creo que trayectoria quedaría bien con las curvas… como estamos marcando de posiciones serían las líneas rectas…. Porque … por que estamos aquí diciendo que… que en 1…que en 1 segundo llegó que.. a más o menos 25 centímetros en cambio en el otro segundo recorrió mucho menos… y así… en cambio si hacemos las líneas rectas en las posiciones serían básicamente que en ese punto llego a 12.5… aquí a 25…. mmm aquí a 37.5… y aquí a 50 (saca proporciones)

Observamos que consensuan que la gráfica de semicircunferencias representa la trayectoria del mosquito, en tanto que las líneas rectas representan su posición ya que se mueve con velocidad constante, por tanto debería crecer o decrecer de manera proporcional en cada intervalo. Incluso particionan el tiempo en unidades y calculan la altura del mosquito respecto a una horizontal de la circunferencia de manera proporcional.

Para cerrar la primera sesión, se les solicita que compartan con el Equipo 2 sus conclusiones. Inician graficando en el pintarrón (Fig, 4) su descripción del movimiento del mosquito usando las variables "posición-tiempo" como una gráfica lineal en trozos. Explican que se debe a que la velocidad del mosquito es constante, por tanto debe describirse la posición con rectas. Luego presentan la gráfica "trayectoria-tiempo" reproduciendo la forma de una semicircunferencia, en ambos casos como eventos periódicos que inician en (0,0) y se desarrollan por encima del eje *x*.

Fig. 4: Descripción del movimiento del mosquito



En la segunda sesión se les solicita trabajar con ángulo-altura y emerge, en la gestión de las tareas, un uso intuitivo de los radianes en tanto se construye un acercamiento a la función seno ampliando la discusión a los parámetros que se involucran en la expresión analítica de esta función, elementos que no se presentan en este reporte.

Conclusiones

El equipo 1 discute, en la primera sesión, cómo describir el movimiento del mosquito con las variables "tiempo-posición" sin considerar el papel que juega el ángulo que forma la posición del punto sobre la circunferencia con el eje horizontal de referencia.

La simulación proyectada inhibió la posibilidad de que los estudiantes midieran los elementos presentes, y propició la idea de que se trataba de repetir la semicircunferencia superior que representaba la trayectoria de las aspas del ventilador desfasada de la semicircunferencia inferior. Sin embargo, se observa cierta evolución en su razonamiento covariacional trigonométrico (Tabla 2) pese a haber descrito "ángulo-tiempo" y no "altura-tiempo" que era lo esperado.

TABLA 2: Síntesis de resultados

Síntesis de resultados	
Nivel	Razonamiento covariacional trigonométrico
	Evidencias
Sin coordinación	Los estudiantes dibujan dos semicircunferencias en un sistema de coordenadas cartesianas sin explicitar las variables que están visualizando.
Pre-coordinación de valores	El tiempo es la variable que implícitamente está presente en su exploración. Estudian con cuidado la posición del punto, considerando sólo la altura respecto a una horizontal, pero no cuantifican. No reparan en el ángulo como variable por tanto no visualizan que cada segmento que consideran en cada posición del punto es el seno del ángulo.
Coordinación burda de valores	Discuten sobre qué cuarto de semicircunferencia que dibujaran corresponde al aumento de la altura cuando sube el punto y cuál a la disminución de la misma al bajar. Genera esto una discusión sobre el período del movimiento.
Coordinación de valores	Deciden que el diámetro del ventilador sea de 50 centímetros, punto máximo de su gráfica y que la primera vuelta completa demore 8 segundos. Al tomar en cuenta que la velocidad de giro es constante, la gráfica de la posición del punto debería ser lineal a trozos.
Covariación continua a trozos	
Covariación continua suave	En su producción describen gráficamente "ángulo-tiempo", no como ellos pensaban "posición-tiempo". Consideran que el punto (4seg; 50 cm) es el máximo de su gráfica, punto que se repetiría regularmente. Son coherentes con su idea de velocidad constante, uniendo el (0, 0) con su máximo con una recta creciente y desde él hasta el punto (8seg, 0 cm) una recta decreciente considerando que describen la "posición" del punto, no la distancia, ambos conceptos que reclaman la función senoidal como respuesta.

Los estudiantes, no conocían la función seno al participar en el experimento de enseñanza sólo había estudiado, en su curso de trigonometría, las razones trigonométricas, mismas que se utilizaron en la segunda sesión para discutir con ellos que en realidad habían graficado la variación del ángulo respecto al tiempo, de allí lo lineal de su gráfica e inducirlos a conocer la función seno desde la construcción geométrica de puntos de la misma

Los resultados encontrados en esta investigación nos dan aliento a continuar explorando las tareas propuestas pues se vislumbró articulación de los estudiantes entre las razones trigonométricas y el estudio de variaciones periódicas.

Referencias

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling- A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K. Walby (Eds.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* Suecia: National Center for Mathematics.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378.

Demir, Ö., & Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. En E. Faggoano & A. Montane (Eds.) *Proceeding of ICMTM 11* (pp. 119-124). University Bali, Italy.

Ellis, A. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 215–238). Berlin, Germany: Springer.

Ellis, A., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M & Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning 18*(3), 151–181.

Ferrari, M, Martínez, G. & Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior* (42). 92–108.

Kuper, G. & Carlson, M. (2018). Sparky the saguaro: A teaching experiment examining a student's development of the concept of logarithms. En *21th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. San Diego, CA.

Martínez-Planell, R. & Cruz Delgado, A. (2016) The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior 43*, 111–133.

Méndez, M. & Cordero, F. (2014). *La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos.* En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1603-1610). México.

Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225–245

Moore, K. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138

Moore, K., LaForest, K. & Kim, H. (2015). Putting the unit in pre-service secundary teacher´s unit circle. *Educational Studies in Mathematics 92*(2), 221-241.

Rodríguez, R., & Quiroz, S. (2015). Developing modelling competencies through the use of technology. En G. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 443–452). Cham: Springer.

Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh, & A. Kelly (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–307). Hillside, NJ: Erlbaum.

Schukajlow, S., Kaiser, G. & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM 50*(1-2), 5–18.

Thompson, P.W. & Carlson, M.P. (2017). Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically. In Cai, J. (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.