Estudio sobre el proceso de la argumentación en el bachillerato: el Teorema de Thales

Irma Joachin Arizmendi
Maestría en Innovación de la Práctica Docente de Matemática
Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas

Área temática: Educación en campos disciplinares.
Línea temática: Análisis epistemológico y metodológico de un campo del saber disciplinar y su enseñanza.
Porcentaje de avance: 30 %.

Resumen:

Presentamos un estudio acerca del proceso de argumentación para la comprensión del Teorema de Thales. Como marco teórico-metodológico consideramos el Modelo argumentativo de Toulmin, que permite interpretar los datos en la secuencia interpretativa. Nuestro objetivo es caracterizar los procesos de argumentación matemática entre profesor-alumnos que permitan la descripción cualitativa de la gestión de la actividad en el aula. La investigación se realiza con estudiantes de matemáticas de Educación Media Superior (16-18 años).

Palabras clave: argumentación, bachillerato, modelo de Toulmin, Teorema de Thales.

Introducción

En los últimos años, se ha incrementado notablemente el número de investigaciones que destacan el papel fundamental que tiene la argumentación no sólo en relación con la demostración matemática, sino en la actividad matemática en general, tanto entre los matemáticos profesionales como entre los alumnos de matemáticas de distintos niveles (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007; Aberdein y Dove, 2013). Algunos de estos trabajos se centran en la exploración y caracterización de las dificultades que los alumnos evidencian cuando se enfrentan a tareas que implican demostraciones (Healy y Hoyles, 2000; Mamona-Downs y Downs, 2011; Pfeiffer, 2010). Diversos estudios desde la perspectiva interaccionista (Bauersfeld, 1995; Krummheuer, 2011; Knipping, 2008) han definido formatos o patrones de interacción del profesor con sus estudiantes, en el que por medio del discurso argumentativo los significados matemáticos son construidos interactivamente en el salón de clases.

El Sistema Educativo Nacional plantea que el principal sustento del proceso de enseñanza-aprendizaje en las matemáticas es despertar el interés entre los alumnos por reflexionar, pensar, resolver problemas, buscar estrategias, argumentar y validar argumentos. En este marco institucional, la argumentación es una habilidad básica que se desarrolla de manera progresiva a lo largo de las etapas de la educación obligatoria.

Los planes y programas de bachillerato, se le da poca importancia a la argumentación matemática. Para ello, es esencial el desarrollo de las prácticas argumentativas, donde se aprenda a reconocer los argumentos válidos que permita resolver problemas matemáticos en la escuela.

En particular, es necesario comprender los procesos en los que alumnos y profesores construyen y validan el conocimiento matemático. Para contribuir en este sentido, el presente estudio tiene el interés de caracterizar y analizar los procesos de argumentación en el aula, tanto en la dimensión de la enseñanza como en la del aprendizaje, en el tratamiento del Teorema de Thales.

Respecto al contenido que nos interesa, Lemonidis (1991) reporta una experiencia con estudiantes de secundaria en el Sistema Educativo Francés. Realiza una exploración cuya hipótesis es que para la adquisición de la noción semejanza se debe partir de una experiencia previa de percepción de diferentes tipos de figuras. Entre sus conclusiones, Lemonidis destaca que es necesario articular, previa separación, los aspectos figurativo y numérico de las tareas pedidas a los alumnos. En este tenor, Cordier y Cordier (1991) estudiaron la tipicidad del Teorema de Thales en alumnos de segundo grado. Ellos demuestran que hay diferencias cognitivas entre los estudiantes a partir de las representaciones posibles que éstos pueden asociar con el teorema, considerando que algunas de ellas son asociadas más fácilmente que otras. Asimismo, explican que las figuras no típicas exigen mayor tiempo en su tratamiento didáctico que las figuras típicas.

La importancia del estudio del teorema de Thales se relaciona con la cantidad de restricciones que pesan en su enseñanza, además de su potencialidad como articulador de nociones matemáticas, como la proporcionalidad y la semejanza. En la actualidad, existe un consenso al señalar su preponderancia respecto a situaciones matemáticas de referencia y de relaciones con el contexto del mundo real (NCTM, 2000).

Tal situación, nos permite delimitar y centrar el problema de investigación a través de la siguiente pregunta: ¿cuáles son los procesos de argumentación matemática en estudiantes de bachillerato? En particular, nos planteamos como objetivo de investigación, caracterizar los procesos de argumentación matemática entre profesor-alumnos que permitan la descripción cualitativa de la gestión de la actividad en el aula. Por ello Revisaremos dichos motivos. Para ello, referiremos en primer lugar, la forma en que éste irrumpió como objeto de enseñanza en la Reforma y en los Planes y Programas de Estudio de Educación Media Superior. En segundo lugar, la cantidad de restricciones que ha involucrado su enseñanza; así como su potencialidad articuladora de otras nociones matemáticas. Y en último lugar, el poco interés por su estudio, evidenciado en las investigaciones realizadas.

Desarrollo

La argumentación es todo tipo de razonamiento intrínsecamente comprometido con el uso del lenguaje común y su funcionamiento es consecuente con el de la práctica espontánea del discurso. De acuerdo con Toulmin (2007) "Los argumentos justificatorios utilizados para apoyar afirmaciones en las estructuras que pueden tener, en el valor que pueden reivindicar para sí y en el modo en que nos enfrentamos a ellos para justificarlos, nos formamos un juicio sobre ello y los criticamos". En este sentido, la argumentación tiene un lugar importante en el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de bachillerato.

La argumentación matemática actualmente es un campo de interés en investigaciones en Matemática Educativa. Las investigaciones han adquirido una diversidad de intereses y orientaciones. Toulmin (2007) destaca términos que caracterizan las fases de la argumentación: *posible, necesario y probable*. Señala además que al enfrentarse a cualquier tipo de problema, hay una etapa inicial en la que se ven obligados a admitir que deben ser considerados con un número de diferentes propuestas. Por su parte Duval (1999), distingue dos tipos de pasajes que caracterizan la funcionalidad de un proceso de razonamiento: la inferencia y la concatenación. El primero es el pasaje de las proposiciones dadas como premisas o hipótesis a una proposición dada como tesis, mientras la concatenación es la transición que lleva de un paso de razonamiento al siguiente. Duval (1999) establece que en las argumentaciones las proposiciones no tienen un reconocido estatuto operativo y por tanto, la distinción entre el contenido y estatuto operativo de las proposiciones se tiene solo en el razonamiento deductivo, y en las argumentaciones, la inferencia se debe a las relaciones semánticas entre ellas más cercanas a la retórica que a la lógica formal. El autor busca entender si el pasaje de la argumentación es un pasaje que crea una ruptura cognitiva o si en cambio existe una especie de continuidad.

Goizueta y Planas (2013) consideran que una argumentación matemática en situaciones de enseñanza y aprendizaje es una práctica discursiva y situada, cuya comprensión requiere ubicarse a medio camino entre la práctica matemática y la práctica educativa. Además señala que la argumentación debe entenderse en el contexto donde se produce.

Para la presente investigación considera a la argumentación matemática como una práctica discursiva y situada, en donde el contexto influye en el proceso de la argumentación. En este sentido (Mejía-Ramos y Inglis, 2008) señalan que para cualquier parte de las matemáticas hay tres actividades generales asociadas: hacerla, presentarla y asimilarla. En el contexto de la prueba y la argumentación, estas tres actividades generales corresponden a: construir un argumento nuevo, presentar un argumento disponible y leer un argumento dado.

La presente investigación pretende caracterizar las diversas interpretaciones de los alumnos del bachillerato en los procesos de argumentación matemática. Para tal fin se diseñó e implemento una serie de situaciones de aprendizaje que aborda el contenido temático "Teorema de Thales" en un curso de Geometría. La experiencia educativa se desarrollo con estudiantes de matemáticas de Educación Media Superior (16-18 años). Para la recopilación de la información se videograbaron sesiones aproximadamente de 50 minutos en cada una de las clases.

A continuación se da a conocer las situaciones de aprendizaje.

La propuesta didáctica está pensada para aplicarse en el nivel medio superior (Bachillerato), segundo semestre (Geometría plana y trigonometría).

Consta de tres fases: *Inicio, desarrollo y cierre.* A continuación describiremos cada una de ellas:

Actividad 1

- Fase de Inicio (*recuperación de conocimientos previos*). *Trabajo con paralelas cortadas por una transversal, razón, proporción y semejanza de triángulos* (*manipulación con material concreto*).

Con estas actividades queremos asegurar que el estudiante posea estos conocimientos, ya que son importantes y están relacionados con el Teorema de Thales. A demás en esta fase desarrollará la argumentación.

Tiempo: 50 minutos.

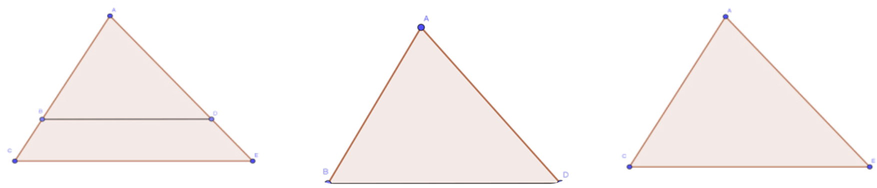
Actividad 2

- Razón, proporción y semejanza de triángulos.

Material: Hojas impresas, tijeras, regla, lápiz y calculadora.

Es esta actividad se pretende trabajar la proporción y la semejanza de triángulos, trabajaran por parejas para encontrar la relación que se da entre segmentos y triángulos.

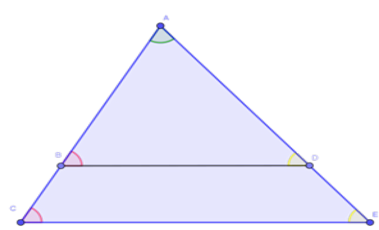
Figura: 1



Triángulos Triángulo ABD Triángulo ACE

Los alumnos observaran la primer imagen superior y se les inducirá a que argumenten respecto a los ángulos correspondientes entre las rectas paralelas, también encontraran la razón entre los segmentos midiéndolos, completando la tabla y observando cómo son, además que comentaran y discutirán sobre el ángulo común entre dichos triángulos y el criterio, recortaran los triángulos restantes y el del profesor los conducirá a identificar las propiedades que en este caso muestran que los triángulos son semejantes.

Figura: 2



Triángulo	Medidas del lado menor en (cm)	Medida del lado mediano(cm)	Medida del lado mayor (cm)
ABC			
ACE			

Se espera que los alumnos observen y comuniquen: que los lados correspondientes en los triángulos son iguales y que en triángulos semejantes la razón entre la medida de dos lados correspondientes siempre es la misma.

- *Desarrollo (Orientando a la conjeturación y generalización)*

Tiempo: 40 minutos

Material didáctico: Software (GeoGebra)

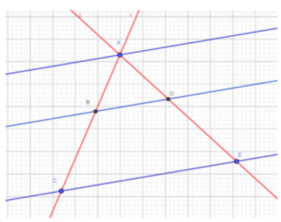
Actividad 3

Uso del GeoGebra, por parejas comprobaran mediante la exploración, visualización y el movimiento de los trazos que se conserva la proporción y la semejanza en triángulos. (*Situación dinámica, observación de una propiedad invariante y formulación de la conjetura*).

"si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales"

Con la actividad 1 y 2 se trabajaron los ángulos correspondientes así como también la proporción y semejanza entre triángulo, esto nos viene a formar parte elemental para ser incorporada ahora a la actividad con el GeoGebra, ya que se le pedirá encontrar la razón entre los segmentos correspondientes e interactuar con otros equipos para compartir sus resultados.

Figura: 3



Aquí observaran la construcción y podrán decir que por lo trabajado anteriormente se pueden indicar los ángulos correspondientes $\measuredangle ABD = \measuredangle ACE$ y $\measuredangle ADB = \measuredangle AEC$, sabiendo también que el ángulo $\measuredangle CAE$ es común en ambos triángulos.

De la misma forma que la actividad 2, en su cuaderno expresaran los dos triángulos de la construcción: $\triangle ABD$ y $\triangle ACE$.

Las parejas deben comentar y argumentar que por el criterio AAA los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACE$ son semejantes: $\triangle ABD \sim \triangle ACE$.

Como los triángulos anteriores son semejantes el profesor inducirá al alumno a que compare los lados correspondientes y encuentre la proporción (igualdad entre dos razones):

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DE}$$

Se les pedirá cambiar de lugar los antecedentes con los consecuentes esto no afecta la igualdad:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

Se les indicará expresar el lado AB y el lado DE como la suma de AB+BC y AD+DE , los alumnos se espera que lo expresen de la siguiente forma:

$$\frac{AB + BC}{AB} = \frac{AD + DE}{AD}$$

Se les conducirá a repartir cada término entre el denominador:

$$\frac{AB}{AB} + \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

Los alumnos deberán ver que hay casos donde los numeradores son igual que los denominadores y quedará como sigue:

$$1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{DE}{AD}$$

Cancelando los números iguales quedará la siguiente igualdad:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

Se indicará que inviertan nuevamente los antecedentes con los consecuentes:

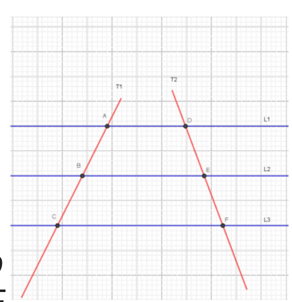
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

De esta manera llegaran a una propiedad útil para la justificación.

Actividad 4

En esta actividad pretendemos que el alumno *valide y generalice la conjetura* respecto a las dos transversales cortadas por varias paralelas, de tal manera que observé y se convenza que sucede para cualquier caso, utilizando la propiedad anterior:

Figura: 4



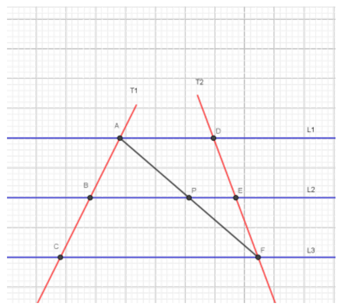
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

- *Cierre: Justificación del Teorema de Thales*

Tiempo: 25 minutos

En esta fase se realizará la demostración del Teorema partiendo de la propiedad utilizada en la actividad anterior y se realizará un trazo auxiliar para observar que se generan triángulos semejantes y con lo aprendido en las actividades logren demostrar que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$.

Figura: 5



Consideraciones finales

Tanto en los planes y programas de estudio como las diversas investigaciones relacionadas a la enseñanza de las matemáticas dan cuenta de la poca importancia que se le atribuye al Teorema de Thales. De modo, que no se reconoce al Teorema como generador para la comprensión de otros contenidos asocialdos a él, como la semejanza, razón y proporción.

Actualmente, el interés de varios investigadores en la comprensión de los procesos argumentativos, han evidenciado que la argumentación cumple una función didáctica para el logro de los contenidos escolares.

Los resultados parciales de este estudio refleja que la argumentación, puede contribuir al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes del bachillerato.

Referencias

Bauersfeld, H. (1995). Language games in mathematics classroom: Their function and their effects. En Cobb and Bauersfeld (Eds.). *Emergence of Mathematical Learning: Interaction in Classroom Cultures.* Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Cordier, F. y Cordier, J. (1991). L`application du théoréme de Thales. Un exemple du role des représentations typiques comme biais cognitifs. Recherches en *Didactique des Mathématiques* 11(1), pp. 45-64.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México:Grupo Editorial Iberoamérica.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. PNA, 7(4), 155-170

Healy, L., y Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 396–428.

Inglis, M., Mejía-Ramos J. P. y Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3-21

Mejía-Ramos, J. P. y Inglis, M. (2008). What are the argumentative activities associated with proof? In M. Joubert (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28(2). Loughborough: U.K.

Knippling, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *Mathematics Education*, 40, 427- 441.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion "learning-as-participation" in everyday situations of mathematics classes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), 43(12), 81-90.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. Recherches en *Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), pp. 295-324.

NCTM, 2000. Principles and standards for school mathematics. NCTM, Reston, VA.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2011). Proof: A game for pedants? In M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), P*roceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 213-222). Rszéskow, Polonia: ERME.

Pfeiffer, K. (2010). A schema to analyse students' proof evaluations. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.192-201.) Rszéskow, Polonia: ERME

SEP. (2011). *Plan y programas de estudio. Educación secundaria.* México: SEP.

Toulmin, S. (2007). Los usos de la argumentación. Barcelona: Ediciones Península.