XV CONGRESO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA COMIE-2019

Promoción del Pensamiento Algebraico: El caso del Pensamiento Funcional en Primaria

Felipe Tirado Segura
Facultad de Estudios Superiores Iztacala - UNAM

Un acercamiento al concepto de función en primaria. Un estudio de caso

Daniela Tierra Damián
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Ulises Xolocotzin Eligio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Promoción del Pensamiento Funcional por transferencia en estudiantes de primaria

Ana María Medrano Moya
Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV

Felipe Tirado Segura
Facultad de Estudios Superiores Iztacala-UNAM

Promoción del pensamiento funcional en niños usando diagramas

Ana María Medrano Moya
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV

Ulises Xolocotzin Eligio
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV

Matthew Inglis
Mathematics Education Center, Universidad de Loughborough

Área temática 4: Procesos de aprendizaje y Educación

Línea temática 1: Procesos cognitivos

Resumen general del simposio: El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas presenta dificultades, estas se agudizan con la aparición del álgebra, en secundaria. De aquí que existe una necesidad de introducir la enseñanza del álgebra mediante el desarrollo del pensamiento algebraico en primaria. Un eje, siguiendo a Kaput (2000), es trabajar con la idea de función en toda la primaria. Con base en esto, el presente simposio presenta evidencia empírica sobre el desarrollo que muestran estudiantes de primaria. El primer trabajo indagó si una alumna de segundo grado hace uso de la posición de los elementos dentro de conjuntos que ella misma conforma. Posteriormente, se pide que establezca correspondencias uno a uno entre los elementos de dichos conjuntos. El segundo trabajo presenta evidencia del tránsito entre representaciones partiendo de una experiencia fenoménica entre dos cantidades variables de agua que realizan estudiantes de tercer grado de primaria. Finalmente, el tercer trabajo muestra la comprensión de estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado al leer patrones de dos tipos de representación entre dos conjuntos de cantidades variables. La evidencia empírica reportada muestra diferentes procesos cognitivos involucrados tanto en la identificación de la relación funcional, como en el análisis y representación de dicha relación, asimismo, muestra tareas que pueden ser implementadas por los docentes de primaria en su práctica educativa diaria.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, pensamiento funcional, educación básica, relaciones, variables

Semblanza de los participantes en el simposio

Felipe Tirado Segura

Estudió su licenciatura en psicología en la Universidad Nacional Autónoma de México. Posteriormente, realizó la Maestría en Psicología Educativa en la University of Leicester, en Inglaterra. Obtuvo el grado de Doctorado en Educación con mención honorífica en el programa interinstitucional coordinado por la Universidad Autónoma de Aguascalientes. En 2003 realizó una estancia de investigación en la Universidad de Salamanca, España, y en 2010 en la Universidad de California en San Diego (UCSD). Actualmente en la FES Iztacala es profesor de Psicología educativa en la licenciatura y tutor en el programa de Maestría y Doctorado en Psicología de la UNAM.

Ana Medrano

Candidata a Doctor en Psicología Educativa y del Desarrollo por la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y Licenciada en Psicología por la misma institución. Realizó una estancia académica en la Universidad de Loughborough, Inglaterra, así como en el Departamento de Matemática Educativa de la Universidad de Tufts, E.U.A. Es autora de publicaciones en psicología educativa, adicionalmente, cuenta con más de treinta ponencias en congresos arbitrados internacionales y nacionales. En el ámbito profesional se desempeña como consultora en Psicología Educativa para la Educación Básica y es docente de matemáticas a nivel básico. Ha participado como organizadora de diferentes eventos científicos.

Daniela Tierra Damián

Licenciada en Educación Secundaria por la Escuela Normal Superior de México; profesora de Matemáticas de Secundaria Técnica; Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa y actualmente estudiante de Doctorado del CINVESTAV. Diplomados: “Programa de Formación Pedagógica para Maestros en Servicio” y “La ciencia en tu escuela”. Cursos: “Recursos y estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas”; “Prioridades y retos de la Educación básica”; “Estrategias didácticas para el manejo de la información”; “Mejorando conductas personales”; “Liderazgo en la gestión educativa para la transformación integral de la escuela secundaria”; “Habilidades de Escritura Científica” impartido por Latindex/AUTHORAID.

Ulises Xolocotzin Eligio

Licenciando y Maestro en Psicología por la UNAM. Doctorado en Psicología por la Universidad de Nottingham. Postdoctorados la Universidad de Bristol y Cinvestav. Fue investigador en el Instituto de

Investigaciones sobre la Universidad y la Educación de la UNAM. Desde 2014 es Investigador titular en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Su interés principal es la cognición matemática. Sus líneas de investigación incluyen: El pensamiento algebraico en la infancia, la enseñanza de las matemáticas con tecnología digital y el papel de las emociones en el pensamiento matemático.

Textos del simposio

Un acercamiento al concepto de función en primaria. Un estudio de caso

Daniela Tierra Damián

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

dtierra@cinvestav.mx

Ulises Xolocotzin Eligio

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

ulises.xolocotzin@cinvestav.mx

Resumen: Las dificultades para comprender el concepto de función en la secundaria han generado interés por la posibilidad de enseñar dicho concepto en primaria. Se indagó si una alumna de segundo grado de primaria hace uso de la posición de los elementos dentro de su conjunto para establecer correspondencias uno a uno entre los elementos de 2 conjuntos.

Se aplicó un experimento con dos factores intrasujetos: posición y correspondencia. El factor posición consistió en manipular el parámetro con el que se definió el orden de los elementos de un conjunto. Se designaron tres tipos de parámetro: Convención, Tamaño y Cantidad. El factor Correspondencia consistió en manipular el modo de relacionar los elementos de cada conjunto definidos en congruencia Posición/Propiedades e incongruencia Posición/Propiedades.

En un estudio previo se le solicitó a la alumna que relacionara los elementos de 2 conjuntos que se presentaron de forma impresa. Siendo un total de 60 relaciones. En el presente estudio se hizo uso de material manipulativo para representar los mismos elementos de cada conjunto y se empleó una metodología microgenética para conocer las estrategias empleadas por la alumna para establecer relaciones de correspondencia y corroborar si las estrategias observadas en ambos estudios difieren o son las mismas.

Los resultados muestran que la alumna establece relaciones de correspondencia a partir de generar una regla y que aplican dicha regla con respecto al tamaño y la cantidad pero no funciona para convención.

Palabras clave: Pensamiento relacional, correspondencia, pensamiento funcional, covariación y posición.

Introducción

A partir de los años 90´s, se empezaron a investigar los primeros acercamientos a conceptos algebraicos por parte de los estudiantes de los últimos grados de primaria (Impecoven-Lind y Foegen, 2010; Kieran, 2016; A. O'Brien y Ní Ríordáin, 2017)but it often poses difficulty for students with learning disabilities. Consequently, it is essential to identify evidence-based instructional strategies for these students. The authors begin by identifying three areas of algebra difficulty experienced by students with disabilities: cognitive processes, content foundations, and algebra concepts. The authors next describe three evidence-based strategies for addressing these needs: classwide peer-tutoring, cognitive strategy instruction, and explicit instructional routines. (Contains 1 figure. creándose así la línea de investigación de Álgebra Temprana, que considera que es posible introducir conceptos algebraicos a temprana edad e inclusive antes de su instrucción formal. El trabajo que aquí presentamos contribuye buscar maneras de introducir el concepto de función, tomando como punto de partida el pensamiento relacional. Esta introducción temprana de conceptos ha sido poco estudiada en los primeros grados de primaria, y se considera que puede ayudar a mejorar su comprensión en grados posteriores (Blanton y Kaput, 2011; Cai y Knuth, 2011; Godino et al., 2012; Morales et al., 2016).

En un estudio inicial encontramos que los alumnos de segundo y tercero de primaria eran capaces de establecer relaciones de correspondencia entre los elementos de los conjuntos x y y, por ejemplo, se les presentó una columna con palitos y una con figuras donde se les pedía que relacionaran los conjuntos y los unían de tal manera que el número de palitos fuera igual al número de lados. Por lo que nos interesó conocer cuáles son los procesos cognitivos, conocimientos previos y estrategias que emplean para establecer correspondencias de tipo funcional cuando no han tenido un acercamiento matemático al concepto de función. Encontramos que a partir del uso de analogías los niños son capaces de establecer relaciones y tratan de trasladar conocimientos que poseen a la aplicación de nuevas actividades que involucran establecer relaciones, teniendo en cuenta que dicho establecimiento es una habilidad cognitiva de dominio general y queremos saber si se puede aprovechar para introducir saberes del dominio específico del álgebra, específicamente la formación de pares ordenados. Por ello, se retomaron las actividades del estudio anterior, pero con la variante en formato manipulativo. para conocer más acerca de cómo establecen relaciones y observar cuál es el papel que tiene el orden y el reconocimiento de las propiedades de los elementos de los conjuntos como Tamaño, Cantidad, Convención. Esto, nos permitirá saber si se pueden diseñar actividades que reduzcan la brecha entre aritmética y álgebra y probar la hipótesis de que los niños pueden generalizar desde pequeños. Por ello nos planteamos las siguientes preguntas:

¿Qué relaciones emplea una alumna de segundo grado para establecer correspondencias entre los elementos de 2 conjuntos?

¿Cómo construye las correspondencias a partir de las relaciones que establecen?

Desarrollo

Un elemento indispensable para comprender el concepto de función es el pensamiento relacional que consideramos precursor del pensamiento funcional. Smith (2003) define a este último como la actividad cognitiva que se focaliza en la relación existente entre dos o más cantidades que varían. Blanton et al (2011 y 2015) lo definen como una actividad cognitiva que se manifiesta al describir, construir y razonar funciones, misma que implica generalizar relaciones entre cantidades covariantes y la representación y razonamiento con esas relaciones a través de un lenguaje natural, haciendo uso de notación algebraica, tablas y gráficos.

Con respecto al pensamiento relacional O'Brien (1974), lo definió como el pensamiento que conecta las ideas de una persona, provenientes de la experiencia. Enfatizando que cuando una persona tiene la habilidad de ordenar, clasificar y conectar ideas para obtener conclusiones está pensando relacionalmente. Por su parte, Doumas y Hummel (2005) lo utilizan para referirse a la capacidad de formar y manipular representaciones relacionales como lo son las analogías entre objetos diferentes, la capacidad de comprender y aprender un lenguaje; así como apreciar semejanzas perceptuales.

Algunos autores argumentan que el pensamiento relacional es apoyado por el uso de analogías que pueden conducir no sólo a adquirir nuevos conceptos, sino también el poseer un conocimiento flexible. (Richland et al.,2017; Richland y Begolli, 2016).

Autores como Confrey y Smith (1994), sostienen que los primeros acercamientos para conceptualizar las relaciones funcionales pueden presentarse por medio de 2 enfoques: de correspondencias o covariación; donde la diferencia es que la primera hace uso de reglas que permiten determinar para un único valor de x un único valor para y y que se encuentra determinado por la notación y=f(x); mientras que la covariación implica tanto moverse operacionalmente de ym a ym+1 como coordinadamente con xm a xm+1.

Algunos estudios muestran que niños de 6 a 8 años ponen de manifiesto el uso de correspondencias, al ser capaces de calcular el valor de la variable dependiente a partir de la independiente, usando adiciones, y centrándose entre los pares de valores de ambas variables, generando correspondencias entre símbolos y valores enteros (Gelman y Gallistel, 2008; Morales et al., 2016; Pinto, 2016).

Se hacen presentes 2 elementos que pertenecen al dominio de conocimientos general: el orden y la generalización. El primero permite distinguir cada elemento del que lo antecede o que le sigue (Fernández, 2009). Esta relación permite la formación del concepto de número ordinal: primero, segundo, tercero, etc. La generalización permite la construcción de reglas a partir de las similitudes de los elementos y Davydov (1978), manifiesta que los niños de primaria pueden aprender generalizaciones.

Para identificar las estrategias empleadas por una alumna para establecer relaciones se aplicó la metodología microgenética que implica conocer la evolución del aprendizaje en diferentes momentos.

Se eligió el caso de una alumna de segundo grado que tenía 7.91 años al momento de la aplicación. En un estudio previo puntuó cerca de la media (22 aciertos de 60) en una tarea de relaciones que implicaban el acomodo mental de la posición de los elementos para formar pares (ver figura 1). Obtuvo 6/10 aciertos en el parámetro de Tamaño en congruencia Posición/Propiedades en las versiones cuadrados-círculos y cuadrados-triángulos (3 aciertos en cada uno). Con respecto al parámetro de Cantidad en congruencia identifico 3/5 pares en la versión palitos-figuras y 5/5 pares en la versión palitos-estrellas; mientras que en incongruencia sólo identifico 1/5 en la versión palitos-figuras. En el parámetro de Convención, obtuvo 3/5 pares en la versión vocales-días de la semana y 1/5 en la versión abecedario-meses y en la incongruencia posición/propiedades un 1/5 únicamente en la versión vocales-días de la semana.

Debido a que la actividad requería de grabaciones de las manipulaciones que realizaba la alumna, se pidió la autorización de los padres para llevar a cabo las videograbaciones. Cabe mencionar que se tomó en cuenta la opinión de la alumna para participar de forma voluntaria.

Las actividades se diseñaron para que la alumna estableciera relaciones entre 2 conjuntos de con 5 elementos cada uno. Se presentaron tres tipos de conjuntos cuyos elementos podían ordenarse a usando uno de tres parámetros: Convención, Tamaño o Cantidad. Se pidió a la alumna que relacionara los elementos de los conjuntos con 2 tipos de correspondencia: congruencia posición/propiedades e incongruencia posición/propiedades. A continuación se proporcionará un poco más de información en cuanto a las propiedades de los parámetros (ver Figura 1) establecidos:

- Convención. Los elementos de este conjunto sólo tienen la propiedad de orden, sin tener magnitud aparentemente visible (días de la semana, vocales, abecedario, meses).
- Tamaño. Los elementos de este conjunto poseen tanto orden como magnitud.
- Cantidad. Los elementos de este conjunto poseen las propiedades de orden, magnitud y cardinalidad.

Sin importar el parámetro, se buscaba observar si la alumna en la correspondencia de congruencia Posición/Propiedades, relacionaba elementos que ocupaban el mismo lugar en el orden de su conjunto y además tenían propiedades análogas. Por ejemplo, el triángulo más pequeño correspondía con el cuadrado más pequeño, y ambos eran del mismo tamaño.

En la correspondencia en la que se muestra una incongruencia Posición/Propiedades, se observa si la alumna podía relacionar los elementos de los conjuntos usando sólo la correspondencia en orden, sin importar que sus propiedades no sean análogas. Por ejemplo, al relacionar un conjunto de triángulos de diferentes tamaños con un conjunto de cuadrados de diferentes tamaños, el triángulo más pequeño correspondía con el cuadrado más pequeño, pero el cuadrado era más grande que el triángulo.

Los elementos de cada conjunto se plasmaron en hojas imantadas y fueron recortados. Los elementos de Convención (letras, palabras) y de Cantidad (palitos) se recortaron en rectángulos; mientras que los de Tamaño y Cantidad (figuras geométricas) fueran recortadas por el contorno de la figura. Cada conjunto poseía 5 elementos que se colocaron en una cajita para representar conjuntos. Además, se empleó un pizarrón cuadriculado en 10 partes que simulaba una tabla, la cual nos permitiría apreciar cómo es concebido su uso para establecer relaciones.

La actividad fue diseñada en 3 momentos (Mayo, Junio y Julio). En cada uno de ellos la alumna realizó las mismas actividades, pero, por medio de la aplicación de un cuadro latino el orden de resolución entre los parámetros y las correspondencias siempre fue diferente.

Debido a que cada parámetro poseía un total de 8 conjuntos, se optó por dividir cada momento en 3 sesiones. Una para trabajar con Cantidad, otra Convención y otra Tamaño. Con la finalidad de no provocar dificultades ni que la alumna se sintiera hostigada ante las resoluciones.

Para iniciar, se hizo un ejercicio exploratorio que sirvió de guía para trabajar con las actividades posteriores. Se le hizo entrega del pizarrón y 2 cajitas transparentes con sus 5 elementos respectivos cada una; una poseía partes del cuerpo humano y la otra prendas que correspondían a alguna parte del cuerpo.

La participación del investigador es casi nula. Se le preguntó ¿cómo relacionarías los elementos de ambas cajitas? Posteriormente se le pidió que formara parejas y las ordenara en el pizarrón y que podía utilizarlo de forma vertical u horizontal.

Al verificar que hacía correspondencias de analogía de uso, se partió de esa información para trabajar con los parámetros establecidos con la única consiga de: Relaciona y ordena en el pizarrón y cuando terminaba se le cuestionaba sobre cuál era la forma en que asociaba sus tarjetas. Las videograbaciones y sus respuestas orales nos permitieron conocer más acerca de sus conocimientos y procesos cognitivos.

Conclusiones

A continuación, se muestran las relaciones que estableció la alumna entre los elementos de cada conjunto de cada parámetro para conocer las evoluciones o retrocesos presentados durante los 3 momentos de su aplicación.

Los elementos de las Figuras 2 y 3 se ordenaron de forma ascendente. El color verde indica las relaciones establecidas en el primer momento, el azul las del segundo y las de amarillo las del tercero.

Congruencia posición/propiedades

En la Figura 2 se ven las intersecciones de las marcas de cada línea. Muestran los 2 elementos que fueron relacionados por la alumna, por ejemplo, en el parámetro de Convención en la relación entre vocales y días de la semana, se aprecia que la vocal “u” en el primer y segundo momento la relaciona con el día “Lunes” y en el tercer momento con el “Jueves”.

Dentro de la congruencia entre la posición y las propiedades en los parámetros en general se aprecia una estrategia recurrente: extender, formar pares, acomodar en el pizarrón. En el parámetro de Tamaño la estrategia se presenta en 3 pasos que se identificaron durante el desarrollo de la actividad: 1) extiende los elementos de ambos conjuntos y observa; 2) forma parejas en la mesa de forma vertical comparando los elementos de ambos conjuntos a partir de la abstracción de las propiedades de los elementos y aplicando la regla "del mismo tamaño que" y, 3) coloca sus pares en la tabla, ya sea de forma vertical u horizontal. Durante los 3 momentos establece correctamente las relaciones en la versión cuadrados-círculos y en cuadrados-triángulos lo hace a partir del segundo momento ya que en la primera aplicación no verifica las propiedades de las figuras y esto provocó que cometiera errores en la aplicación de su regla. Mostrando que los aciertos durante los 3 momentos para la versión cuadrados-círculos son (5,5,5) y para cuadrados-triángulos son (2,5,5).

Para el parámetro de Cantidad durante los 3 momentos extiende los elementos de los conjuntos A (palitos) y B (figuras/estrellas), genera y aplica la regla " es el mismo número de palitos que de lados de las figuras", Teniendo como resultados (5,5,5) aciertos en palitos-figuras y (3,5,5) en palitos-estrellas.

Con respecto al parámetro de Convención en sus 2 versiones vocales-días de la semana y abecedario-meses genera la regla "pertenece a", por ejemplo "a" pertenece a "martes" porque la vocal está dentro de la palabra y se aprecia que dicha regla puede ser aplicada para encontrar diferentes parejas a partir de ese criterio. Muestra deficiencias en su aplicación y no es capaz de identificar las propiedades de los conjuntos para identificar la regla "ocupa el mismo lugar que" para poder formar pares ordenados. Teniendo (1,1,0) aciertos en la versión vocales-días de la semana y (1,1,3) en abecedario-meses.

Incongruencia posición/propiedades

Las relaciones establecidas por la alumna en el parámetro de Tamaño, en el primer momento en ambas versiones aplica la regla "son del mismo tamaño que" y es a partir del segundo momento que aplica la regla "ocupa el mismo lugar que". Presentando (3,5,5) aciertos en la versión cuadrados-círculos y (1,5,5) en cuadrados-triángulos.

Referente al parámetro de Cantidad, la alumna continúa aplicando la regla de congruencia de " es el mismo número de palitos que de lados". En este parámetro la falta verificar su conteo, lo cual no le permite generar la regla "ocupa el mismo lugar que" por lo que solamente se observan avances en la correspondencia de congruencia. Observándose que dicha falta de verificación es un obstáculo para la evolución y transferencia de los dominios. Además aísla una pareja que para ella no cumple con su regla argumentando que esos elementos no son pares. Teniendo como resultados (0,0,2) aciertos en las versiones palitos-figuras y (3,3,1) en palitos-estrellas.

En Convención sigue presentando la regla "pertenece a" por lo que las gráficas son tan dispersas al establecer sus relaciones. Se observa que no se hace uso de las propiedades de orden en ninguno de los 3 momentos de aplicación en ninguno de las correspondencias de congruencia o incongruencia entre la posición y las propiedades. Teniendo (2,0,1) aciertos en la versión vocales-días de la semana y (0,0,1) en abecedario-meses. La alumna en todo momento hace uso de la regla de la correspondencia grafofonética (la letra está escrita dentro de una palabra) que es de dominio de la materia de Español.

Comparando los resultados obtenidos en la actividad previa y en este experimento, se aprecia que la alumna tiene avances significativos con respecto a la utilización de materiales manipulativos ya que le permiten pasar de un plano abstracto a un plano concreto; en específico en los parámetros de Tamaño y Cantidad, mientras que en Convención no se presentan avances al no identificar las propiedades de los conjuntos como elemento indispensable para establecer correspondencias. Además, a partir del segundo momento en el parámetro de Tamaño se hace presente el orden como elemento indispensable para establecer y corregir pares ordenados.

Este análisis muestra que no necesariamente el llenado de tablas y el enfoque covariacional son los primeros acercamientos a las funciones como lo explicitan Confrey y Smith. La presente investigación muestra que también se pueden tener los primeros acercamientos a través del factor de orden.

Mostrando que dichos acercamientos dependerán única y exclusivamente de las experiencias y conocimientos que poseen cada uno de los alumnos al momento de enfrentarse con el establecimiento de relaciones. Siendo que estos primeros acercamientos pueden ser ya sea por enfoque covariacional, enfoque por correspondencia o el uso del factor orden dentro de los conjuntos y encontrando que ninguno es más fácil que los otros.

Se muestra que para esta alumna resulta igual de fácil estimar que contar. Esto se aprecia en el parámetro de Tamaño en sus 2 correspondencias (congruente e incongruente Posición/Propiedades) y en el parámetro de Cantidad en su correspondencia congruente pero que, contar no es suficiente para establecer relaciones en la correspondencia incongruente. También, se aprecia que se les dificulta el uso de la propiedad de orden para establecer relaciones, pero que una vez comprendida resulta imprescindible para establecer correspondencias sin errores esto se aprecia en el parámetro de Tamaño, y que permite apreciar que con una guía adecuada de enseñanza se puede transferir para formar pares ordenados en los otros 2 parámetros sin importar el tipo de correspondencia.

Se considera que las tareas planteadas en este estudio pueden ser utilizadas como un primer acercamiento a las relaciones funcionales en los primeros grados de educación escolar y que muestra que el enfoque por correspondencia no siempre es la relación más empleada por estos estudiantes como lo menciona Pinto et al., 2016); o como el enfoque covariacional de (Confrey y Smith (1994)typically by creating an equation of the formy=f(x; ya que esta investigación muestra que ambos enfoques son empleados a temprana edad y que no hay muestra de que uno sea antecesor de otro.

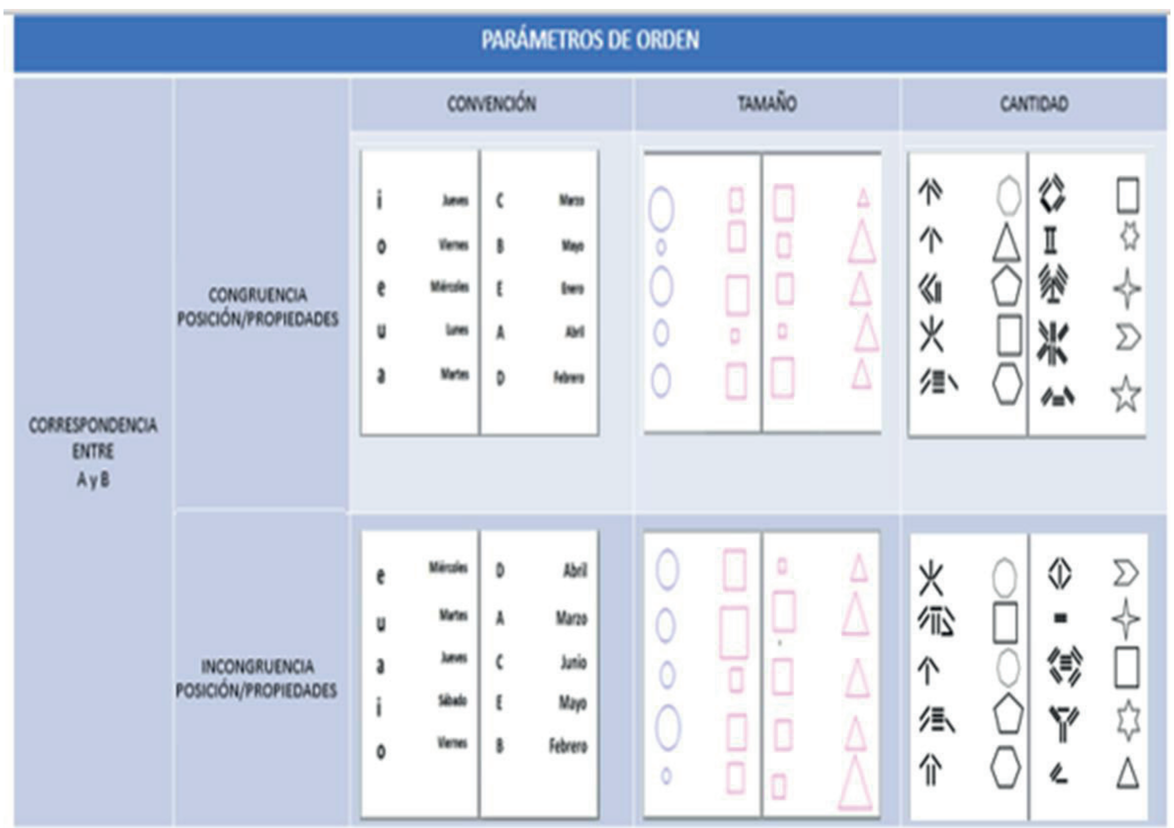
Contestando a la pregunta ¿Qué relaciones emplean los estudiantes para establecer correspondencias entre los elementos de 2 conjuntos? En los parámetros de Tamaño y Cantidad se encuentra presente la igualdad entre los elementos, por lo que la relación más común que establecen es "mismo tamaño" y "mismo número de palitos que de lados" respectivamente en cada parámetro; con respecto al parámetro de Convención, hace uso de la correspondencia grafofonética que pertenece al dominio del español, mostrando así que establece relaciones a partir de conectar ideas provenientes de sus experiencias, como lo menciona O´Brien (1974) y de emplear propiedades aritméticas y manipularlas para construir sentencias (Carpenter et al., 2003) y apreciar semejanzas perceptuales entre los elementos de cada conjunto (Doumas y Hummel, 2005).

Respondiendo a la segunda interrogante de ¿Cómo construyen las correspondencias a partir de las relaciones que establecen?, Lo hace a partir de generar una regla (generalización) de acuerdo con su nivel cognitivo y experiencias con los parámetros. Mostrando que el enfoque que emplean es variado ya sea por correspondencia o covariacional, donde el orden juega un papel indispensable para corregir errores en la correspondencia de pares ordenados.

Lo anterior contribuye a la literatura del Álgebra Temprana, mostrando que existen diversas formas de introducir actividades que permitan desarrollar un óptimo pensamiento funcional en edades tempranas.

Tablas y figuras

Figura 1: Tarea de relaciones



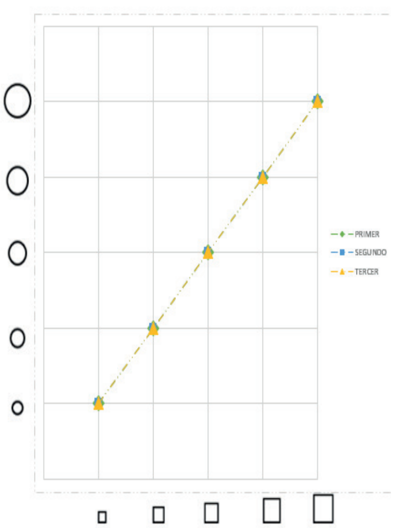
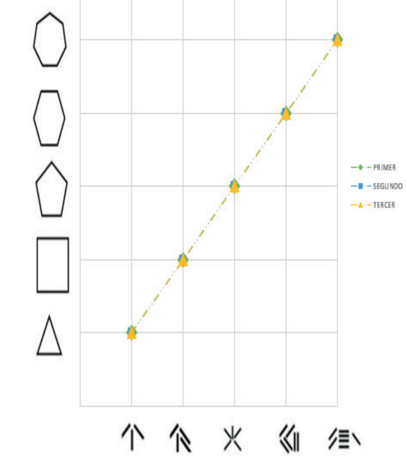
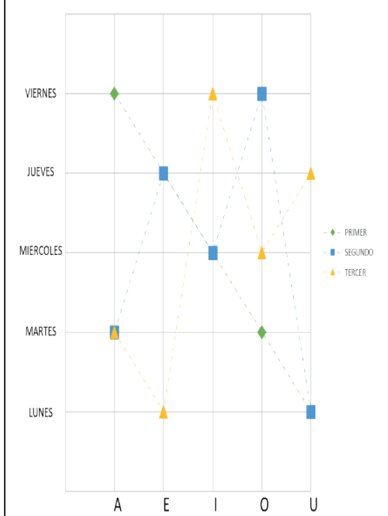
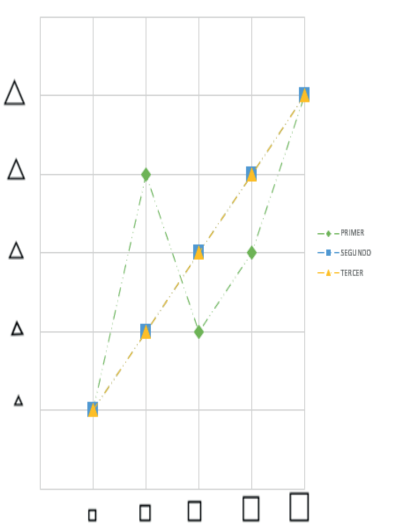
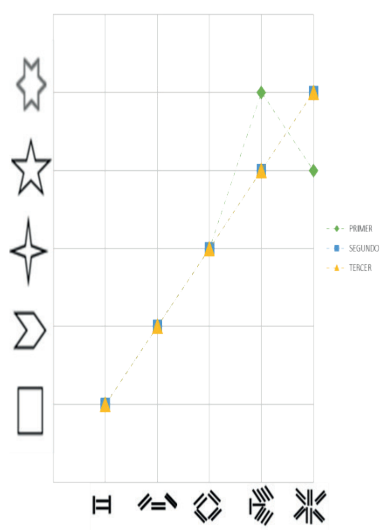
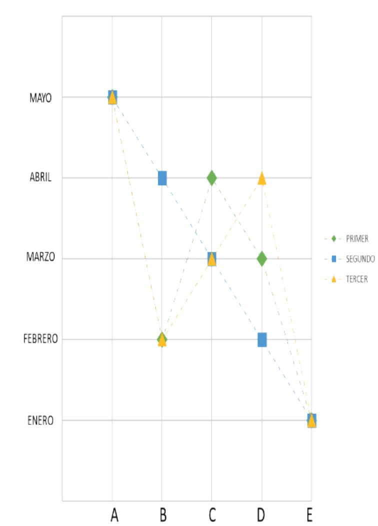
CONGRUENCIA POSICIÓN/PROPIEDADES		
TAMAÑO	CANTIDAD	CONVENCIÓN
		
		

Figura 2.Relaciones establecidas por la alumna en correspondencia congruencia posición/propiedades.

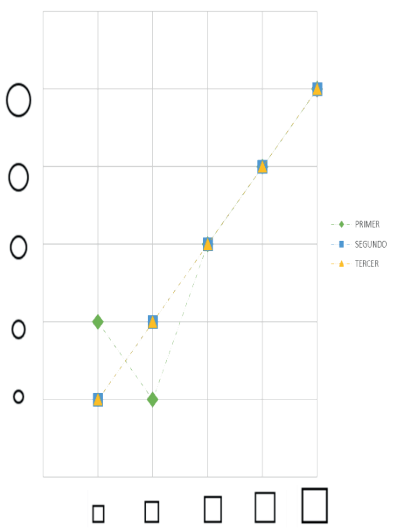
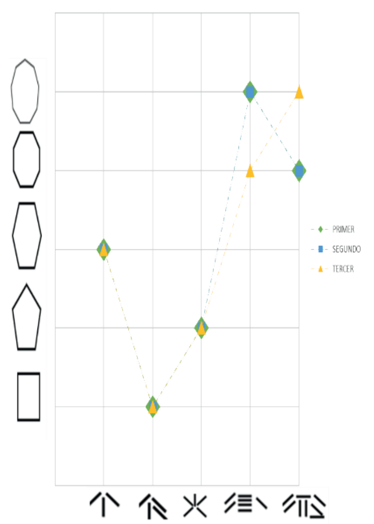
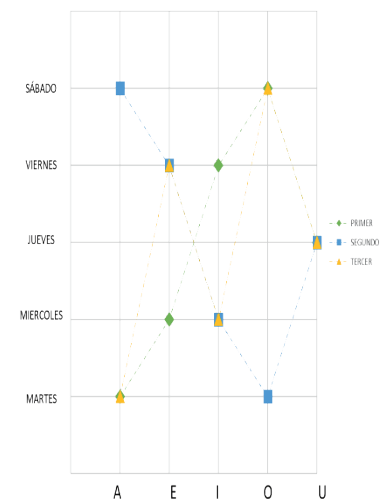
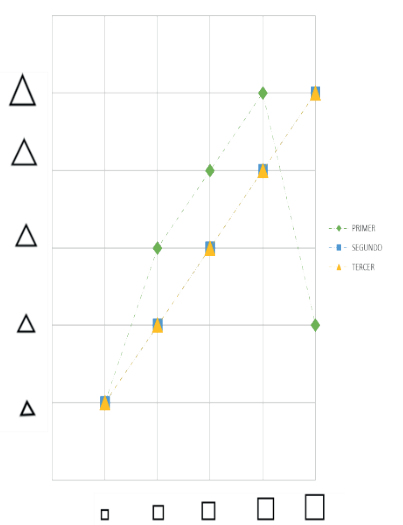
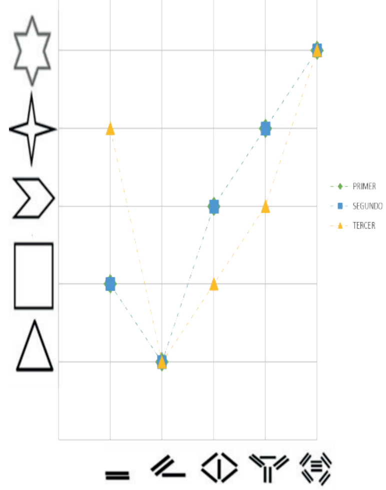
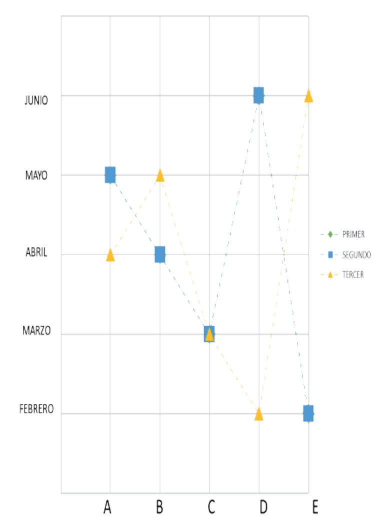
INCONGRUENCIA POSICIÓN/PROPIEDADES		
TAMAÑO	CANTIDAD	CONVENCIÓN
		
		

Figura 3Relaciones establecidas por la alumna en correspondencia incongruencia posición/propiedades

Referencias

Begolli, R., & Richland, L. (2015). The Role of Executive Functions for Structure- Mapping in Mathematics. *CogSci*, (June). https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4896.5203

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking: Grades 3-5*. Series in Essential Understandings. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (pp. 5–23). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Jee-Seon Kim. (2014). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Booth, L. (1988). Children´s Difficulties in Beginning Algebra. *Algebraic Thinking, Grades k-12*, *19*, 20–32.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). Early Algebraization A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Carraher, D. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. *XXII Annual Meeting of the International Group for the Psycology of Mathematics Education*, (June 2016), 1–26.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Davydov, V. (1978). *Tipos de generalización en la enseñaza*. La Habana: Pueblo y Educación.

Doumas, L., & Hummel, J. (2005). Approaches to Modeling Human Mental Representations: What Works, What Doesn't, and Why. En K. J. Holyoak & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning* (pp. 73–91). New York: Cambridge University Press.

Fernández, C. (2009). Modelización de competencias ordinales en escolares de 3 a 6 años. *PNA*, *3*(4), 185–212.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

Godino, J., Castro, W., & Ake, L. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática*. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

Impecoven-Lind, L. S., & Foegen, A. (2010). Teaching Algebra to Students With Learning Disabilities. *Intervention in School and Clinic*, *46*(1), 31–37. https://doi.org/10.1177/1053451210369520

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. (G. Kaiser, Ed.). Hamburgo: Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Leslie, A. M., Gelman, R., & Gallistel, C. R. (2008). The generative basis of natural number concepts. *Trends in Cognitive Sciences*, *12*(6), 213–218. https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.03.004

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por Estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365–375). Málaga: SEIEM.

O'Brien, A., & Ní Ríordáin, M. (2017). Examining difficulties in initial algebra : Pre-requisite and algebra content areas for Irish post-primary students . En *10th Congress of European Research in Mathematics Education*. European Society for Research in Mathematics Education.

O'Brien, T. C. (1974). New Goals for Mathematics Education. *Childhood Education*, *50*(4), 214–216. https://doi.org/10.1080/00094056.1974.10728178

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A., & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En *Investigación en Educación Matemática XX*. Málaga: SEIEM.

Richland, L. E., & Begolli, K. N. (2016). Analogy and Higher Order Thinking. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, *3*(2), 160–168. https://doi.org/10.1177/2372732216629795

Richland, L. E., Begolli, K. N., Simms, N., Frausel, R. R., & Lyons, E. A. (2017). Supporting Mathematical Discussions: the Roles of Comparison and Cognitive Load. *Educational Psychology Review*, *29*(1), 41–53. https://doi.org/10.1007/s10648-016-9382-2

Richland, L. E., & Hansen, J. (2013). Reducing Cognitive Load in Learning by Analogy. *International Journal of Psychological Studies*, *5*(4), 69–80. https://doi.org/10.5539/ijps.v5n4p69

Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra Throughout the K-12 Curriculum. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, 136–150.

Promoción del Pensamiento Funcional por transferencia en estudiantes de primaria

Medrano Moya Ana María

Facultad de Estudios Superiores Iztacala-UNAM

Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV

medrano.unam@gmail.com

Tirado Segura Felipe

Facultad de Estudios Superiores Iztacala-UNAM

ftirado@unam.mx

Resumen: Un problema vigente es la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la secundaria. En este trabajo se plantea cómo es posible que la enseñanza promueva el desarrollo del Pensamiento Funcional con niños de tercer grado de primaria. Se parte del supuesto que la transferencia del conocimiento es posible si se comprenden las relaciones implicadas en el problema. Con base en esto, el objetivo del presente trabajo fue diseñar, aplicar y evaluar un diseño psico-educativo fenoménico basado en la cognición para la comprensión (meta-cognición) del pensamiento funcional al manipular y representar relaciones de cantidad que co-varían, usando agua (enseñanza fenoménica) sobre la transferencia de dicha relación funcional a diferentes representaciones. Los resultados muestran que la comprensión de la relación funcional transferida favorece la meta-cognición (comprensión) de las mismas, de manera que los niños llegan a identificar que una misma relación puede estar representada de diferente forma.

Palabras clave: Meta-cognición, educación básica, pensamiento funcional, enseñanza fenoménica, transferencia.

Introducción

Uno de los problemas más grandes en la enseñanza de las matemáticas, particularmente el álgebra, se da en la educación secundaria. Un amplio grupo de investigadores consideran que el problema estriba en que los niños pierden la flexibilidad cognitiva por el énfasis que se da al pensamiento aritmético. Razón por la cual consideran que se debe promover la comprensión (meta-cognición) de las relaciones matemáticas no contables, por medio de transferencias, desde la temprana edad.

A nivel internacional, los resultados que reportan estudios como el Programme for International Student Assessment (PISA), señalan que el 32% de los estudiantes en 65 países, no muestran un dominio básico (nivel 2) en matemáticas (OCDE, PISA 2012). En particular, se habla de la dificultad para plantear, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos vinculados a situaciones cotidianas. Los resultados anteriores evidencian la falta de comprensión de las matemáticas que se acompañan con altos índices de reprobación, pero lo más preocupante es que la problemática se acentúa cuando se introduce el álgebra al nivel de secundaria. Se puede mencionar que un estudio del INEE (2015) reporta que en la prueba PLANEA, únicamente el 7.5% de los estudiantes son capaces de llegar al nivel III de dominio que implica suma o resta de expresiones algebraicas, y tan solo el 3.1% logra la competencia al nivel IV, donde se implican multiplicaciones de expresiones algebraicas (p.14).

De aquí que sea muy relevante poder atender el problema de la enseñanza de las matemáticas, en general y en particular del álgebra. Se requiere concebir diseños psicoeducativos apropiados para poder atender esta problemática, desarrollando estrategias que permita relacionar la aritmética con el álgebra desde el inicio de la educación formal (Kaput 2008), evitando que los niños reduzcan su pensamiento a procesos contables y particulares.

De aquí que el presente trabajo tiene por objetivo poner a prueba un diseño psicoeducativo fenoménico para promover el *Pensamiento Funcional* (*PF*) en niños de tercer grado de primaria, de manera tal que se genere evidencia empírica de procesos de transferencia al identificar una relación funcional entre cantidades variables como evidencia de la comprensión (meta-cognición). La pregunta de investigación es: ¿Los procesos de transferencia permiten desarrollar el pensamiento funcional en escolares de tercer grado de primaria? La hipótesis de trabajo establece que es posible que escolares a muy temprana edad transfieran el conocimiento funcional obtenido de una experiencia fenoménica a diferentes representaciones matemáticas.

Desarrollo

El *Pensamiento Funcional* (*PF*) es una de las tres rutas, descritas como "strand" por Kaput (2000, 2008) por las que se puede generalizar la instrucción matemática. De esta manera, el *PF* incorpora la construcción y generalización de relaciones y patrones mediante el uso de diferentes herramientas lingüísticas y de representación. Al respecto, Smith (2008) señala que el *PF* es una forma de pensamiento que se enfoca en la relación entre dos o más cantidades variables, la cual puede progresar desde relaciones específicas que involucran instancias individuales hasta la generalización de esa relación entre instancias.

Los niños tienen por naturaleza la construcción de un pensamiento a partir de referentes concretos, por ejemplo, se ha observado que si a un niño se le plantea: si Antonio es más alto que Pedro y Pedro que Juan, quién de ellos es el más alto, logran identificar la relación entre las estaturas y decidir quién es el más alto. Sin embargo, si a esos niños se les dice: si "*a*" es más grande que "*b*" y "*b*" es más grande que "*c*", algunos niños no logran establecer la relación entre las dimensiones de magnitud, indicando que para responder se requiere saber el valor de las letras, lo que permite apreciar su meta-cognición (Sánchez, 1994). De aquí que es muy importante en escolares de temprana edad, partir de experiencias con referentes concretos (fenoménicos), para desarrollar el *PF*.

El problema antes referido, evidencia que para los niños es difícil transitar de referentes concretos a abstractos, no logran la comprensión, el darse cuenta (meta-cognición), que las relaciones de las dimensiones de los valores de las literales ("a", "b" y "c") están planteadas en la misma estructura de las relaciones de altura (fenoménicas), es decir, no logran transferir. Por esto, se debe partir de los esquemas ya desarrollados por el niño en el mundo concreto (fenoménico). De aquí que Ausubel, Novak y Hanesian (1968), sean enfáticos en señalar que parte sustancial de las estrategias educativas, desde el punto de vista cognitivo, debe ser partir de los conocimientos que ya están establecidos en las estructuras de cognición de los estudiantes.

Se trabajó con un grupo de tercer grado de primaria, integrado por 32 estudiantes, de una escuela pública del Estado de México. Se conformaron, de forma intencional, 16 equipos de trabajo con el propósito de favorecer un proceso de enseñanza distribuida, en la que un estudiante ayuda al otro y viceversa.

Se utilizaron 32 recipientes cilíndricos transparentes de plástico, agua natural, pintarrón, plumones para pintarrón, regla para medir y cuadernillo de trabajo con las actividades impresas (uno para cada estudiante).

El procedimiento consistió en una estrategia psicoeducativa de una experiencia fenoménica (learning by doing), la cual permitió que los niños constataron al manipular cantidades de agua, un fenómeno funcional empírico. Todas las sesiones fueron dirigidas por uno de los investigadores y fueron realizadas en el salón de clases de los estudiantes dentro del horario de su jornada académica. En la primera sesión se entregó a cada equipo de trabajo dos recipientes cilíndricos transparentes y un cuadernillo con las actividades a desarrollar.

La primera sesión consistió en desarrollar una noción de cantidad. El investigador pidió a un equipo verter agua en uno de los dos recipientes cilíndricos. Posteriormente, se invitó al resto de los equipos a agregar la misma cantidad de agua, para ello se cuestiona sobre la forma de saber cómo era posible que los demás equipos vertieran la misma cantidad en uno de los dos recipientes. Tanto en diadas como de manera grupal, los estudiantes problematizaron y consensuaron que el uso de la regla permitiría que todos tuvieran la misma cantidad de agua. Todos los equipos de trabajo vertieron y midieron diez centímetros de agua lineal a uno de los dos contenedores. De este modo todos los recipientes tuvieron la misma cantidad de agua al llegar al nivel de la señal. De aquí, se construye la noción de constante en tanto todos los vasos tienen la misma cantidad de agua, definida de manera operativa por el investigador (10 cm). Dentro del intercambio de ideas en las diadas, surge la idea de marcar con la regla cada centímetro de agua, la estrategia se comparte al resto del grupo.

Con los diez centímetros de agua se realizaron diferentes observaciones sobre la relación funcional de ganancia y pérdida de la cantidad de agua, para ello, se pasó en diferentes ocasiones diferentes cantidades de agua de uno a otro recipiente. Se cuestionó sobre lo que estaba pasando con la cantidad de agua original (10 cm), sobre cómo se afecta el agua que tiene un contenedor y que pasa con la cantidad de agua del otro contenedor. El ejercicio se repitió algunas veces más con diferentes cantidades de agua. Con base en estas actividades se estableció la relación recíproca unívoca entre las diferentes cantidades de agua.

La segunda sesión consistió en escribir las diferentes relaciones biunívocas de cantidades de agua obtenidas al pasar una determinada cantidad de agua a uno de los recipientes y viceversa (ej. 4-6 / 9-1 / 0-10). Una vez obtenido un conjunto amplio de relaciones posibles entre las cantidades de agua observadas, se invitó a los niños a escribirlos en una tabla de datos (tabla de variación), esta actividad implica construir una transferencia del fenómeno observado (representación concreta) a una representación numérica ordenada contenida en una tabla de datos (representación semiabstracta). La tabla presentó y ordenó los datos de la siguiente forma: en una columna se ubican las cantidades de agua de uno de los dos contenedores, mientras que en la segunda columna se escribieron las cantidades de agua del segundo contenedor. Para poder diferenciar la cantidad de agua contenida en los dos contenedores, se problematizó a los estudiantes sobre cómo distinguir las cantidades de agua que tenía uno u otro contenedor. Con base en esto un contenedor se denominó "*a*" y el otro "*b*".

Una vez conformada la tabla de variación, se cuestionó sobre la forma mediante la cual se podría organizar los pares de cantidades de agua, aquí el orden permite poner en juego la operatividad cognitiva, donde el foco de atención ya no está únicamente en las cantidades de agua de los contenedores, sino en las relaciones numéricas ordenadas.

Una vez dado un orden jerarquizado a las cantidades de agua de los dos contenedores (de forma descendente o ascendente) los equipos de trabajo (diadas) identificaron un patrón entre las variables ("cuando uno aumenta el otro disminuye y viceversa, lo que uno baja el otro sube y viceversa").

La tercera sesión consistió en representar en el cuadrante positivo del plano cartesiano, los pares de cantidades de agua previamente observados y registrados en la tabla de variación (representación semiabstracta). En equipos de trabajo, los estudiantes ubicaron la intersección de los valores y registraron uno a uno los pares de las relaciones entre las cantidades de agua. De manera grupal se realizó un gráfico en el pintarrón pidiendo a los integrantes de los equipos que ubiquen, uno a uno, los puntos de intersección. Finalmente, unieron los puntos con una línea para obtener la gráfica de la función lineal (representación abstracta).

La representación de la función lineal es abstracta porque ya no hay una relación directa con los referentes fenoménicos (recipientes con agua), aunque sí sigue habiendo un punto de conexión observable entre los puntos expresados en el plano y las cantidades observables de agua, la representación misma puede evocar, sin necesidad de la observación previa, la relación funcional entre las cantidades de agua contenidas en los dos diferentes contenedores. Esta representación demanda la transferencia de los conocimientos aritméticos a un nuevo sistema matemático.

La cuarta sesión consistió en transferir el *Pensamiento Funcional* (*PF*) expresado gráficamente a otra representación abstracta donde se simbolizan por medio de literales cualquier cantidad de agua posible. La representación algebraica (ecuación) además de demandar el uso de otros conceptos, como literales, permite la generalización de las relaciones identificadas a cualquier relación descrita previamente por los estudiantes o no. La expresión algebraica sintetiza el conjunto de datos en una única relación. Para lograr lo anterior, se le pidió a los estudiantes que buscaran una forma de representación que no usara números específicos, la cual contuviera todas las relaciones descritas en la tabla de variación.

De esta forma, los equipos de trabajo escribieron la relación que se identificó entre las cantidades contenidas en los dos recipientes de agua contenida en la tabla y en la gráfica a partir de literales. De forma grupal se comentaron las representaciones algebraicas elaboradas por los equipos de trabajo y se compararon con la finalidad de identificar la que permitiera generalizar las diferentes relaciones observadas.

La intervención finalizó con la puesta en común sobre las diferencias, ventajas y desventajas de los diferentes tipos de representación trabajados, a saber: aritmético, tabla de variación, plano cartesiano y algebraico (ecuación), haciendo énfasis en que todas esas representaciones muestran la misma relación funcional.

Cabe señalar que durante todas las sesiones el investigador a través de diferentes cuestionamientos tuvo un rol de mediador en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y en la interiorización de las diferentes herramientas de representación trabajadas.

Los datos que se reportan en el presente trabajo fueron obtenidos de los registros que los estudiantes hicieron en sus cuadernillos de trabajo, así como de una bitácora que el investigador fue desarrollando durante las sesiones, para resaltar particularidades notorias.

Para hacer el análisis de datos, se consideraron dos aspectos. Primero, se procesaron los porcentajes de las ejecuciones correctas obtenidas en los cuadernillos de trabajo, es decir, se evaluó cada tipo de representación (aritmética, plano cartesiano y ecuación) que realizó cada estudiante del grupo sobre la relación funcional que existe entre la cantidad de agua contenida en los dos recipientes. Segundo, se analizaron las ecuaciones algebraicas realizadas por los niños en función de sus características y elementos contenidos.

Conclusiones

La presente investigación reporta evidencia empírica de procesos de transferencia de un grupo de escolares de tercer grado de primaria al identificar una relación funcional entre cantidades variables a partir de un diseño psicoeducativo basado en una experiencia fenoménica (learning by doing).

Con base en el objetivo, uno de los intereses del diseño fue evaluar el desempeño de los estudiantes por criterio de logro, en cuatro diferentes tareas, a saber: elaboración de una tabla de variación, identificación del patrón, grafica en el plano cartesiano y ecuación algebraica. Al respecto, la figura 1 muestra el porcentaje de ejecución correcta de los estudiantes ante las tres diferentes formas de representar la relación funcional observada al manipular diferentes cantidades de agua (elaboración de una tabla de variación, elaboración de una gráfica en el plano cartesiano y elaboración de una ecuación). En lo que refiere a la conformación de la tabla de variación, se observa que el cien por ciento de los estudiantes (32) realizaron de forma correcta y ordenada el llenado de la información. Sobre el desempeño orientado al logro, mostrado al pasar las cantidades de agua ordenadas al plano cartesiano se observa que un 71.87% de los estudiantes (23) lo hace sin dificultad, mientras que la elaboración de una ecuación algebraica que concretiza la relación funcional entre las cantidades de agua obtuvo un 46.87% (15 estudiantes).

Dado que la identificación del patrón o relación que se muestra entre las variables es importante para la identificación de la relación funcional y para la generación de la ecuación, la figura 1 también muestra el porcentaje de ejecución correcta sobre la identificación y descripción de éste, al respecto, el 56.25% de los estudiantes (18) logran identificar y describir el patrón entre la relación de las cantidades ("la cantidad que pierde un recipiente la obtiene el otro", "mientras una suma, la otra resta y viceversa").

La figura 2 y 3 son ejemplos de la elaboración y llenado de la tabla de proporción, así como de la gráfica de función lineal en el plano cartesiano, respectivamente.

Dado que los estudiantes llegaron a conformar diferentes tipos de representaciones algebraicas (ecuaciones), el segundo propósito consistió en analizar las representaciones algebraicas elaboradas con base en los elementos que contienen cada una de ellas. El análisis consistió en identificar cómo los niños relacionan y sintetizan las diferentes relaciones funcionales observadas al manipular diez centímetros de agua en dos contenedores con su imaginario o heurístico disponible (Wineburg, 2007). El análisis se basa en identificar la incorporación de literales, así como el uso que se le da a estas dentro de la ecuación y en el carácter de generalizar la relación. En total, los estudiantes realizaron tres diferentes ecuaciones, a continuación, se analiza cada una de ellas.

Del 100% de los estudiantes que conformaron una expresión algebraica, un 60% (9 estudiantes) conformó la ecuación que se muestra en la figura 4. En dicha ecuación se evidencia la relación matemática que se realizó entre las dos literales ("x") que componen la relación funcional detectada. La relación identificada es una relación parte, parte, todo (Davydov, 1995, Vergnaud, 1990; 2009; Xin & Zhang, 2009), en la cual se evidencia que se deben sumar los elementos del miembro izquierdo (desconocidos: x + x) para obtener una cantidad (desconocida: x) en el miembro derecho de la ecuación. Con base en esta representación, es plausible suponer que los estudiantes no tienen presente la cantidad total de agua contenida en los dos recipientes, de ser así, ésta estaría contenida en uno de los dos miembros de la ecuación. En lo que refiere al uso del signo de igualdad, con base en la representación, no queda claro si éste es concebido como operador o como equivalencia, aunque pareciera ser concebido como equivalencia en tanto la operación "x + x" no podría ser igual "x", finalmente, dadas las características, esta ecuación no puede generalizar las relaciones funcionales entre las diferentes cantidades de agua.

Aunque matemáticamente hablando la representación es un contrasentido, la ecuación muestra que el uso de la literal ("x") está dentro del heurístico del niño como una forma de representar cantidades desconocidas de agua.

Del 90% de los estudiantes que conformaron una expresión algebraica, un 33.3% (5 estudiantes) conformó la ecuación que muestra la figura 5. La ecuación a diferencia de la anterior, estipula en el miembro derecho la cantidad total de contenida en los recipientes (10), adicionalmente, muestra la relación matemática que se realizó entre las dos literales ("x") que componen la relación funcional identificada. Al igual que la representación anterior, la relación identificada es una relación parte, parte, todo (Davydov, 1995, Vergnaud, 1990; 2009; Xin & Zhang, 2009), en la cual se evidencia que se deben sumar los elementos del miembro izquierdo (desconocidos: x + x) para obtener una equivalencia con la cantidad dada originalmente (10) ("… desde un principio usted nos dio 10 centímetros, de agua"). Con base en esta representación, los estudiantes consideran que dos cantidades de agua sumadas deben de dar los 10 cm de agua ("… podemos poner los números que queramos, pero sumados debe ser diez"). En lo que refiere al uso del signo de igualdad, con base en la representación, se puede decir que éste es concebido como relación entre ambos miembros de la ecuación en tanto es imposible operar "x + x" para obtener 10. Para concluir el análisis de esta representación, resta decir que dadas las características, esta ecuación tampoco puede generalizar las relaciones funcionales entre las diferentes cantidades de agua. Cabe mencionar que los estudiantes que conformaron la primera ecuación algebraica (x + x = x) modificaron su pensamiento aceptando que la segunda ecuación se ajustaba más a la situación analizada. (Fig. 5 Representación algebraica)

En la figura 6, se muestra el último tipo de representación. Éste tuvo un 6.6% de frecuencia (1 estudiante). En esta representación se observa que los niños emplean la letra "***n***" para indicar que ésta corresponde a cualquier número de la columna ***A***, la "***s***" corresponde a operación de correspondencia entre las variables (suma), la segunda "***n***" indica cualquier número contenido en la columna ***B***, la "***r***" implica el resultado y la "***d***" señala la constante de los diez centímetros de agua. Esta expresión algebraica representa la relación funcional entre las dos cantidades de agua y la constante, donde las dos "***n***" son consideradas como variables y la "**d**" como incógnita. Aunque el signo de igualdad no aparece dentro de la representación como convencionalmente se representa, éste sí está considerado y conceptualizado como una relación de equivalencia (“**r**”). Esta última representación algebraica aunque sintetiza el conjunto de datos en una única relación, únicamente se puede generalizar si se indica, en todo momento, a qué corresponden los elementos “***s***”, “***r***” y “***d***”.

De aquí que el presente trabajo tuvo por objetivo poner a prueba un diseño psicoeducativo fenoménico para promover el *Pensamiento Funcional* (*PF*) en niños de tercer grado de primaria, de manera tal que se genere evidencia empírica de procesos de transferencia al identificar una relación funcional entre cantidades variables, como evidencia de la comprensión (meta-cognición).

La pregunta de investigación se responde afirmando que las transferencias a patrones en tablas, gráficos y ecuaciones algebraicas permitieron desarrollar en los niños el pensamiento funcional, es decir, la identificación de la relación funcional entre las cantidades de agua observadas fenoménicamente, y sus diferentes formas de representarse. Esto evidencia la meta-cognición de los niños, al comprender que un mismo fenómeno es posible representarse en muy diferentes formas. Lo que responde de manera positiva al planteamiento de la hipótesis de trabajo, indicando que sí es posible que escolares a temprana edad transfieran el conocimiento funcional obtenido de una experiencia fenoménica a diferentes representaciones matemáticas.

Sin duda el pensamiento matemático representa uno de los procesos cognitivos estructurados de mayor relevancia, para promover las competencias de reflexión y comprensión de los fenómenos. De aquí que la trascendencia social del desarrollo de las competencias matemáticas, sean uno de los objetivos centrales establecidos en todos los programas educativos en el mundo. Está claramente establecida la evidencia de las relaciones que se dan entre el conocimiento y el desarrollo, es decir, la formación y consolidación del pensamiento matemático, promueve y contribuye significativamente al beneficio social.

Tablas y figuras

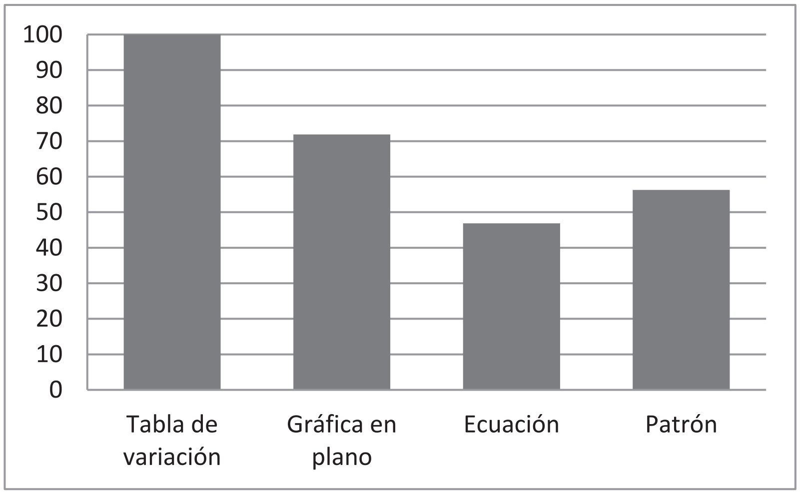
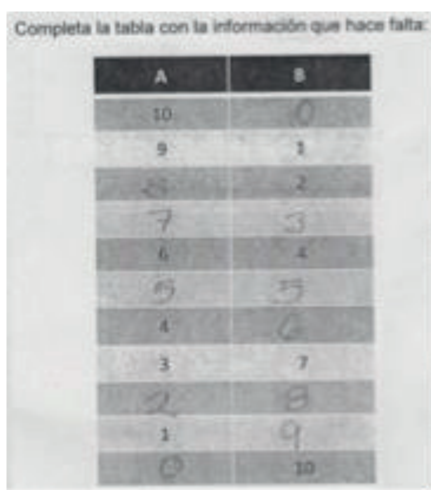


Figura 1. Ejecución correcta de los estudiantes ante las diferentes tareas de pensamiento funcional



Completa la tabla con la información que hace falta:

A	B
10	0
9	1
8	2
7	3
6	4
5	5
4	6
3	7
2	8
1	9
0	10

Figura 2. Ejemplo de tabla de proporción completada y ordenada por los estudiantes

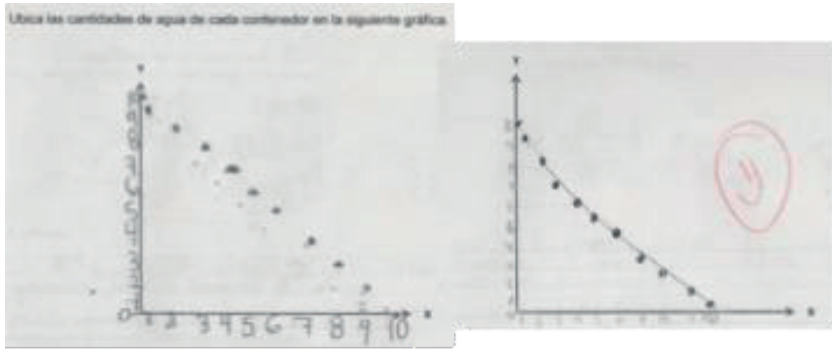


Figura 3. Ejemplo de gráfica de función lineal elaborada por los estudiantes en el plano cartesiano

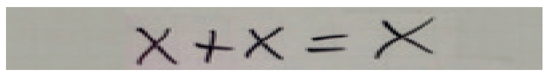


Figura. 4 Representación algebraica de la relación identificada entre las variables con uso de literales indistinto y sin posibilidad de generalización

Figura. 5 Representación algebraica de la relación identificada entre las variables con uso de literales y cantidad total de agua.

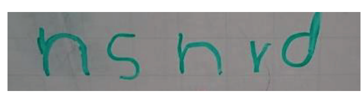


Figura. 6 Representación algebraica de la relación identificada entre la relación funcional que introduce variables e incógnita con potencial de generalización

Referencias

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1968). Educational psychology: A cognitive view.

Davydov, V. (1995). Introduction to the grade 1 teacher manual.

Kaput, J. (2000). Teaching and learning a new algebra with understanding. US; Massachusetts. *National Center for Improving Student Learning and Achievement*.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En: Kaput, Carraher y Blanton (Eds.) Algebra in the early grades.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), PISA (2012). Resultados de PISA 2012 en Foco. Recuperado de: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf

Sánchez, A. (1994) Habilidades Cognitivas en Alumnos de Sexto Grado de Distintos Tipos de Escuela. Tesis inédita de licenciatura – UNAM-Iztacala.

Secretaria de Educación Pública (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica primaria sexto grado. Recuperado de http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/primaria/plan/Prog6Primaria.pdf

Smith, E. (2008). *Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum*. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 133–159).

Vergnaud, G. (1990). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas: México.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*. 52, 83-94.

Wineburg, S. (2007). Unnatural and essential: the nature of historical thinking. *Teaching History*.129. pp. 6-11.

Xin, Y. & Zhang, D. (2009). Exploring a conceptual model-based approach to teaching situated word problems. *The Journal of Educational Research*, *102*(6), 427-442.

Promoción del pensamiento funcional en niños usando diagramas

Medrano Moya Ana María
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
medrano.unam@gamil.com

Xolocotzin Eligio Ulises
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
ulises.xolocotzin@cinvestav.mx

Inglis Matthew
Mathematics Education Center, Universidad de Loughborough
m.j.inglis@lboro.ac.uk

Resumen: Existe gran necesidad de introducir la enseñanza del álgebra desde la primaria. Esto debe hacerse considerando las condiciones de la escuela pública mexicana. Presentamos una exploración del potencial de los diagramas para facilitar el pensamiento funcional en estudiantes de 4º, 5º y 6º. Se aplicó un test que presentaba problemas de relación de variables diseñado con opciones que denotaban pensamiento funcional (correspondencia entre dos variables) o recursivo (patrón de cambio de una variable). Se aplicó una versión del test en el que los problemas tenían un contexto concreto y otro en el que no tenían contexto. Se encontró que los alumnos de 4º y especialmente los de 5º, usaron más respuestas funcionales ante diagramas con contexto. Los alumnos de 6º generaron más respuestas funcionales al usar tablas sin contexto. Los alumnos de 4º y 5º usaron màs respuestas recursivas en las tablas con contexto que en las tablas sin contexto. En 6º, no hubo diferencias en las tablas con o sin contexto. En 4º y 6º, no hubo diferencias en cuanto a usar contexto con diagramas. En los alumnos de 5º, hubo más respuestas recursivas en los diagramas sin contexto. Los resultados se discuten en función de las propiedades de los diagramas y de su potencial utilidad para iniciar el pensamiento algebraico en las condiciones de alta diversidad y escasos recursos tecnológicos del aula mexicana.

Palabras clave: Pensamiento funcional, educación básica, diagramas, tablas, pensamiento recursivo

Introducción

Reportamos una exploración del potencial de los diagramas para enseñar ideas relacionadas al concepto de función en la escuela primaria. Con esto, intentamos contribuir a la democratización del el álgebra entre los usuarios de la educación pública mexicana. Durante los últimos 20 años se ha incrementado el interés internacional por introducir ideas algebraicas desde los primeros grados de la Primaria. Esta es una alternativa para que el aprendizaje superficial del álgebra deje de impedir el acceso a ideas matemáticas avanzadas, ya que este es uno de los factores educativos que perpetúan la desigualdad social (Kaput, 1998).

Los indicadores educativos mexicanos señalan la necesidad apremiante de mejorar la enseñanza del álgebra. La secundaria sigue siendo el techo educativo de la mayoría de los mexicanos (INEGI, 2015). A esto se suma que en este nivel educativo, sólo 13.7% de los alumnos de pueden trabajar con expresiones algebraicas y resolver ecuaciones, mientras que el conocimiento matemático de la mayoría está confinado al dominio aritmético. Estos datos sugieren que el álgebra es inaccesible para la mayoría de los usuarios del sistema educativo nacional. Esto es un problema mayor. Quienes pueden continuar sus estudios después de la secundaria, encontrarán que su falta de conocimiento algebraico será una barrera para poder aprender el contenido matemático del nivel medio superior. Esto puede generar situaciones negativas, como la deserción en este nivel, el sesgo en la elección de carrera (elegir una carrera porque tiene "menos matemáticas") o la deserción al cursar carreras de alto contenido matemático.

La investigación relacionada a la introducción de ideas algebraicas en la primaria suele identificarse con la etiqueta "álgebra temprana" (AT). Esta línea de investigación ha demostrado que integrar contenidos algebraicos en el currículum de la primaria es viable. La investigación en AT está cambiando la idea de que los alumnos de primaria aún no tienen el desarrollo cognitivo necesario para aprender álgebra. Además, a partir de estas investigaciones, algunos países han comenzado a desarrollar currículos de álgebra para la primaria. Para el caso mexicano, es necesario hacer investigación que permita identificar estrategias de enseñanza del álgebra que sean adecuadas para nuestro contexto.

La gran mayoría de los estudios de AT reportan experimentos de aula o intervenciones educativas realizadas en condiciones que distan mucho de la realidad del salón mexicano. Si bien en estas investigaciones se reporta que niños de los primeros grados de primaria pueden alcanzar resolver exitosamente tareas algebraicas, dicho éxito suele ser producto de una labor didáctica intensa (por ejemplo, Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, & Murphy Gardiner, 2015. Blanton et al., 2015, reportan una intervención de AT exitosa en alumnos de 3o. Al término de esta los participantes eran capaces de usar el signo igual de manera relacional, usar notación para representar variables, y de generalizar y simbolizar relaciones funcionales. Sin demeritar el valor de estos hallazgos, es necesario considerar que las condiciones de esta intervención difícilmente pueden replicarse a gran escala en el contexto Mexicano. Por ejemplo, se trabajó en salones de 20 alumnos o menos (no multi-grado), y la enseñanza de los contenidos estuvo a cargo de investigadores especialistas en AT, y no de los profesores.

En este trabajo reportamos un estudio experimental que explora el potencial de los diagramas como herramienta para facilitar el Pensamiento Funcional en estudiantes de 4o, 5o y 6o de Primaria. Esto es parte de un proyecto que tiene por objetivo contribuir a la democratización del álgebra en la educación pública. Nuestra propuesta recoge los planteamientos e intenciones del AT, pero intenta producir conocimiento empírico que sirva para diseñar herramientas que puedan funcionar en el aula pública mexicana. Para esto, consideramos dos factores.

Primero, que en un salón típico, regularmente numeroso, se pueden encontrar estudiantes con diversas aptitudes matemáticas. En una investigación anterior encontramos que las diferencias individuales en el pensamiento algebraico temprano de alumnos mexicanos de escuelas públicas pueden ser sustanciales (Xolocotzin, Rojano, & Medrano, en revisión). Nosotros consideramos que para introducir el álgebra en la primaria mexicana, es esencial considerar esta diversidad. Algunas representaciones como los diagramas pueden favorecer a los alumnos que tengan problemas para trabajar con otro tipo de representaciones comúnmente usadas en la escuela, como las tablas. Segundo, a pesar de los intentos por tecnologizar el aula de la primaria, en un aula típica de la primaria es raro encontrar recursos digitales para la enseñanza. Por tanto, nuestro proyecto está dirigido a producir herramientas didácticas que puedan usarse con lápiz y papel.

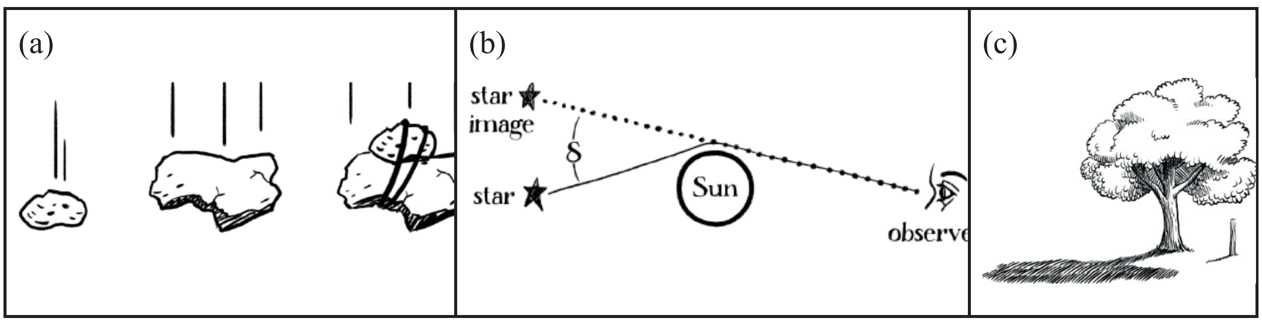
Una de las propuestas más utilizadas para la enseñanza del álgebra en la primaria es por medio del Pensamiento Funcional (PF). Este término describe el conjunto de ideas algebraicas que son parte del concepto de función. Por lo general, los estudios enmarcados en la corriente del PF hacen que los niños trabajen con funciones biyectivas, en las que $f(x) = y$. Las tareas típicas usadas en estas demandan que el alumno encuentre la regla que gobierna la relación entre x y y, y que la use para definir valores desconocidos de y. Se cree que al trabajar con estas tareas, los niños movilizan sus conocimientos matemáticos para adquirir ideas algebraicas como variable, covariación, generalización y uso de notación algebraica.

Las tablas son la herramienta representacional más utilizada en los estudios de PF. Las tablas permiten observar algunas propiedades clave de una función, tales como los pares ordenados y la correspondencia uno a uno de los elementos en x y y. Se asume que las tablas pueden usarse de manera intuitiva por alumnos de primaria para registrar datos de variables y conjeturar acerca de las reglas de que determinan la relación entre a y b. Warren & Cooper (2006) sugieren que cuando los alumnos son capaces de buscar patrones leyendo las tablas de manera horizontal, (por renglón), acceden a un nivel superior de pensamiento que les permite identificar relaciones entre pares de datos.

A pesar de sus ventajas, las tablas tiene también limitaciones, pues su lectura horizontal no ocurre de manera espontánea. Se ha identificado que en sus primeras experiencias trabajando relaciones funcionales en tablas, los alumnos de primaria frecuentemente utilizan una lectura vertical. Es decir, se enfocan en la variación de una columna, regularmente la que contiene los datos de la variable dependiente (Tanı lı, 2011). De esta manera, en ejercicios que demandan la identificación de un valor faltante de y, los alumnos identifican el patrón de variación que resulta de moverse de ym a ym+1. A esta interpretación de los datos se le denomina recursiva, y es distinta a una interpretación funcional, que implica enfocarse en la regla que determina un valor específico de y a partir de un valor de x, por ejemplo $y = x + 2$ (Confrey & Smith, 1994).

En este trabajo exploramos la posibilidad de utilizar los diagramas como una alternativa didáctica para trabajar ideas funcionales en la primaria. La idea no es demostrar que los diagramas son "mejores" que las tablas para tal propósito, sino identificar su potencial como representaciones que también podrían servir para diseñar tareas de pensamiento funcional.

El interés por explorar el potencial de los diagramas para introducir ideas funcionales. Consideramos un par de razones para esto. La primera es que los diagramas tienen propiedades representacionales con las que es posible modelar relaciones de tipo funcional. Por ejemplo, los fenómenos físicos involucran interacciones entre magnitudes y fuerzas que pueden representarse claramente con diagramas, como demuestran los ejemplos de la fig. 1.



Una ventaja de los diagramas para introducir el pensamiento funcional en la primaria, es que pueden representar visualmente la interacción entre magnitudes continuas de una manera que las tablas no. La estructura de celdas de las tablas necesariamente necesita una discretización de las variables involucradas, aunque estas en su naturaleza sean continuas. Esto es un punto clave porque un aprendizaje completo del concepto de función necesariamente requiere entender que las cantidades involucradas varían de manera continua. Por otro lado, los niños tienen un conocimiento intuitivo de los fenómenos físicos (Wilkening & Cacchione, 2010), mismos que pueden aprovecharse para introducir ideas de covariación y correspondencia por medio de diagramas.

Desarrollo

Hasta donde sabemos, nuestro trabajo es el primer estudio dedicado a analizar el potencial de los diagramas para facilitar el pensamiento funcional. Sin embargo, en la literatura existe evidencia que da cuenta de las ventajas de los diagramas para enseñar álgebra. Los diagramas parecen demandar menos recursos cognitivos que las expresiones simbólicas (Lee et al., 2007). Chu, Rittle Johnson, & Fyfe, 2017 compararon el rendimiento de alumnos de un grado equivalente al primero de secundaria en México, en una serie de tareas de resolución de ecuaciones con o sin un diagrama relevante, encontrando que los alumnos usan más estrategias informales al utilizar diagrama. En el caso de México, Medrano, (2019) encontró que los dibujos hechos por alumnos de primaria al resolver problemas algebraicos involucran algunos elementos diagramáticos, por ejemplo, la representación de relaciones entre los elementos de dos conjuntos. De aquí que resulte relevante indagar sobre el papel facilitar de los diagramas em el desarrollo del PF. Para ello se planteó el objetivo de: analizar el efecto facilitador de tablas y diagramas al resolver problemas de PF en estudiantes de 4, 5 y 6 grado de primaria. Se plantearon dos preguntas de investigación: ¿Qué efectos tienen las tablas y los diagramas en el PF? y ¿qué efectos tienen las tablas y diagramas en el Pensamiento Recursivo?

La recolección de datos se hizo con el "Test de identificación de relaciones funcionales", que es una prueba de opción múltiple diseñada para identificar distintas formas de razonar acerca de problemas que involucran patrones de relación entre dos variables numéricas, usando dos formatos de representación externa, tablas y diagramas. El test tiene dos partes con 12 problemas cada una. Una parte presenta los problemas en formato tabular, mientras que la otra los presenta de manera diagramática. Los problemas involucran relaciones funcionales aditivas, sustractivas; multiplicativa y mixtos, que combinan una multiplicación y suma o una multiplicación y una resta. El test requiere que los sujetos lean e identifiquen una relación entre las variables presentadas en cada problema. Cada problema tiene cuatro opciones de respuesta, una de ellas es una opción definida aleatoriamente y sirve como distractor, las otras tres denotan razonamientos que denominamos: Funcional, recursivo, y primera instancia. La opción de respuesta funcional implicaba usar una regla generalizada para definir valores faltantes en y usando de manera funcional los valores de x. La opción recursiva implicaba identificar los valores faltantes en y siguiendo el patrón de los valores anteriores de y. La opción primera instancia implicaba identificar el valor faltante de y usando x, pero sólo en la primera instancia faltante, sin generalizar la regla a las instancias faltantes siguientes.

Dado que nos interesaba investigar el efecto de usar un contexto concreto como referente para los datos presentados en los diagramas y las tablas, usamos dos versiones del test, una sin contexto y otra sin contexto. En el caso de esta versión, el contexto usado para las tablas fue el de manzanas y dinero. Los ítems pedían al alumno relacionar la cantidad de manzanas con su costo. Se usaron datos discretos porque las tablas presentan en celdas discretas las cantidades involucradas. En el caso de los diagramas se usó el contexto de proyección de sombra. Se pidió a los alumnos relacionar la altura de un poste con la longitud de su sombra. Se usaron datos continuos porque los diagramas representan con líneas continuas las magnitudes involucradas.

Tanto las relaciones funcionales presentadas en el Test de identificación de relaciones funcionales como la extensión de la misma, se determinó con base en un estudio previo (Xolocotzin, Inglis, & Medrano, 2018). La fig. 1: muestra ejemplos de los distintos ejercicios de diagramas y tablas con y sin contexto.

Tablas	Diagramas

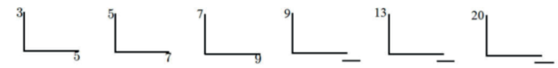
Versión sin contexto

1. Identifica el patrón que existe y elige la opción que tiene los valores que completan la información de la tabla.

a	b
8	21
10	23
12	25
15	
20	
27	

a)	b)	c)	d)
28	20	42	27
33	35	57	29
40	26	78	31

1. Identifica el patrón que hay entre los dos valores de cada tipo de línea y elige la opción que tiene el valor que hace falta.



a)	b)	c)	d)
15	11	17	11
36	15	25	13
39	22	39	15

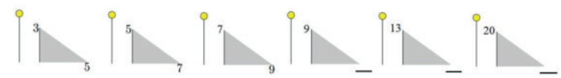
Versión con contexto

1. Ulises tiene una báscula. En la siguiente tabla, él anotó el peso de algunas manzanas. En una columna está el número de manzanas, mientras que en la otra está el peso de las manzanas. Identifica el patrón que existe entre el número de manzanas y el peso. Elige la opción que tiene los valores que completan la información de la tabla.

Manzanas	Peso
8	21
10	23
12	25
15	
20	
27	

a)	b)	c)	d)
28	20	42	27
33	35	57	29
40	26	78	31

1. Identifica el patrón que hay entre el alto del poste y la longitud de la sombra. Elige la opción que tiene los valores que hacen falta en los diagramas.



a)	b)	c)	d)
15	11	17	11
36	15	25	13
39	22	39	15

Fig. 2 Ítems presentados en el Test de identificación de relaciones funcionales. El test tiene dos partes, Tablas y Diagramas. Hubo dos versiones, con contexto y sin contexto.

Participaron 1145 estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado de primaria (395, 354 y 396, respectivamente), de 16 escuelas públicas de cuatro estados de la República Mexicana, que no tenían instrucción formal en álgebra o álgebra temprana. El muestreo fue a conveniencia, pero se procuró invitar escuelas con diversos niveles de rendimiento en las pruebas nacionales de matemáticas.

Para el estudio, se usó un diseño factorial con un factor intra-sujetos, representación (tablas/diagramas) y dos factores inter-sujetos, grado (4/5/6) y contexto (Sin contexto/ Con contexto). Para cada grado se distribuyeron aleatoriamente los grupos seleccionados de cada escuela participante a uno de los dos niveles del factor contexto. En cada grado hubo ocho grupos que contestaron la versión del test con contexto y 8 grupos la versión sin contexto. Para contrabalancear el posible efecto de una condición sobre la otra, así como para evitar un posible efecto de fatiga, la mitad de cada uno de los grupos iniciaron el test con tablas y terminaron con diagramas, mientras que la otra mitad inició con diagramas y concluyó con tablas.

Antes de iniciar con el desarrollo y aplicación del "Test de identificación de relaciones funcionales", se acudió a cada una de las escuelas a platicar con los directivos sobre la posibilidad de realizar el estudio en dichas escuelas. De manera general, se comentó sobre el contenido matemático, así como de la importancia de identificar el tipo de relación que los estudiantes establecen al leer y analizar relaciones funcionales. Una vez que se obtuvo la autorización de los directivos, se mandó a todos los padres de familia un formato de autorización consentida e informada. En ella se explicitó que el estudio era completamente voluntario y sin ningún costo ni para la escuela ni para los padres de familia El test se aplicó sólo a los estudiantes que contaban con la autorización de su padre o tutor.

Todo el procedimiento constó de una sola sesión de sesenta minutos aproximadamente. Las instrucciones que se dieron a los cuatro grupos experimentales fueron:

"¡Hola chavos, buenos días!

Recuerdan la autorización que llevaron a casa para participar en un estudio, bueno, el día de hoy realizaremos el estudio. Le voy a entregar a cada uno de ustedes un conjunto de ejercicios (se entregan las evaluaciones), les pido de favor que completen la información que se les pide."

Después de completar la información personal, los alumnos realizaron un ejemplo, con la finalidad de que todos los estudiantes comprendieran las instrucciones de los ejercicios. Para esto se dio la instrucción: "A continuación realizaremos el primer ejercicio juntos. Quién quiere leer las instrucciones de la hoja 1 donde se ubica el ejemplo"

Después de leer las instrucciones se preguntó a los estudiantes ¿qué debían hacer en el ejemplo? Con base en las respuestas, el investigador realizó otras preguntas como ¿qué es un patrón?, ¿qué hay que relacionar?, ¿en dónde están los valores faltantes?, ¿en dónde están las opciones de respuesta? para que los estudiantes identificaran que debían establecer una relación entre las cantidades que presentan los diferentes ejercicios. Todos los estudiantes tuvieron sesenta minutos para responder su evaluación, al término de este tiempo se les pidió entregar su test sin importar que no estuviera terminado.

Conclusiones

Los datos que se analizan y reportan fueron obtenidos de la aplicación del *Test de identificación de relaciones funcionales* a 1145 estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado de 16 escuelas primarias públicas (395, 354 y 396, respectivamente). Los datos se analizaron con una ANOVA mixta de acuerdo con el diseño planteado en la sección anterior. La Tabla 1 presenta los resultados. Se realizaron dos análisis, uno en el que la variable dependiente fue la cantidad de respuestas de tipo funcional (tabla 1), y el otro para la cantidad de respuestas recursivas (tabla 2). Para este reporte, dejamos fuera las respuestas de tipo primera instancia.

Tabla 1: Resultados de la ANOVA Representación x Grado x Contexto con respuestas funcionales como variable dependiente

Efectos intra-sujetos					
	Suma de cuadrados	gl	Medias cuadradas	F	p
Representación	218.17	1	218.169	49.054	< .001
Representación * Grado	33.72	2	16.858	3.790	0.023
Representación * Contexto	361.46	1	361.462	81.273	< .001
Representación *Grado * Contexto	23.84	2	11.919	2.680	0.069
Residual	5079.06	1142	4.448		
Efectos entre-sujetos					
Grado	240.5	2	120.256	15.62	< .001
Contexto	190.4	1	190.353	24.73	< .001
Grado * Contexto	257.2	2	128.607	16.71	< .001
Residual	8791.2	1142	7.698		
Nota. Suma de cuadrados Tipo III					

En lo que refiere a los efectos principales en respuestas funcionales, estas fueron más frecuentes en quinto grado, ante el diagrama y en la versión con contexto. Estos efectos estuvieron matizados por interacciones de dos vías. La interacción representación x grado indicó que no hubo diferencias entre 5º y 6º, ni en tablas ni en diagramas. Los alumnos de 4º tuvieron menos respuestas funcionales que los de 5º y 6º, misma que fue más grande en las tablas que en los diagramas. La interacción representación x contexto indicó que en el caso de la tabla no hubo diferencias entre las versiones con o sin contexto, mientras que en los diagramas, hubo más respuestas funcionales en la versión con contexto. Esta interacción es la que explica más varianza (6%). La interacción grado x contexto, indicó que los diagramas, con o sin contexto, no hicieron diferencia en los niños de 6º, pero la versión con contexto generó más respuestas funcionales en 4º y en 5º, en este ultimo grado la diferencia fue mucho más grande. La interacción triple grado x contexto x representación no fue significativa. Los resultados se ilustran en la figura 3

Tabla 2: Resultados de la ANOVA Representación x Grado x Contexto con respuestas recursivas como variable dependiente

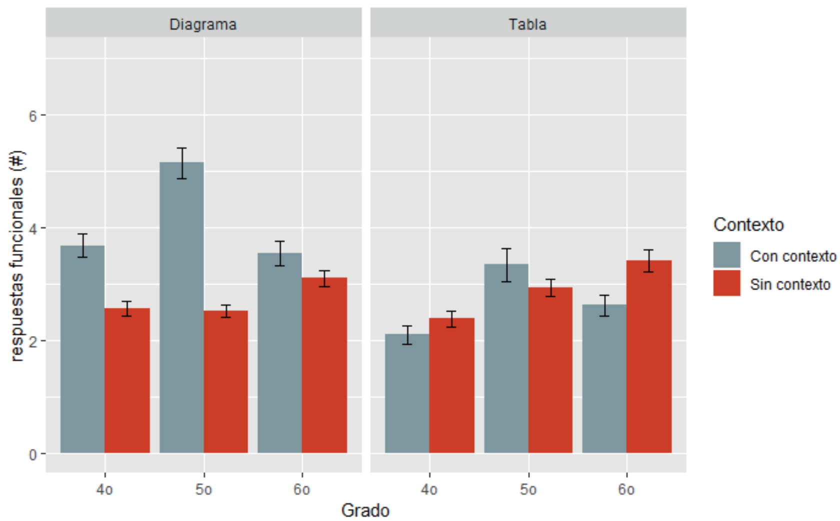
Efectos intra-sujetos						
	Suma de cuadrados	gl	Medias cuadradas	F	p	η^2
Representación	668.6	1	668.643	74.535	< .001	0.059
Representación *Grado	109.5	2	54.772	6.106	0.002	0.010
Representación * Contexto	137.8	1	137.848	15.366	< .001	0.012
Representación * Grado * Contexto	109.0	2	54.511	6.076	0.002	0.010
Residual	10244.7	1142	8.971			
Efectos entre-sujetos						
Grado	1022.06	2	511.03	28.835	< .001	0.048
Contexto	93.23	1	93.23	5.260	0.022	0.004
Grado * Contexto	26.67	2	13.34	0.753	0.471	0.001
Residual	20239.52	1142	17.72			
Nota. Suma de cuadrados Tipo III						

Sobre los efectos principales de las respuestas recursivas, estas fueron más frecuentes en sexto grado, ante la tabla y en la versión con contexto. Estos efectos se matizaron por las interacciones de dos vías. La interacción representación x grado muestra que los estudiantes de 6° obtiene un mayor número de respuestas recursivas en ambas representaciones; los estudiantes de 4° y 5° obtienen un mayor número de respuestas recursivas en tablas, este efecto se invierte ante los diagramas. Las diferencias observadas son significativas.

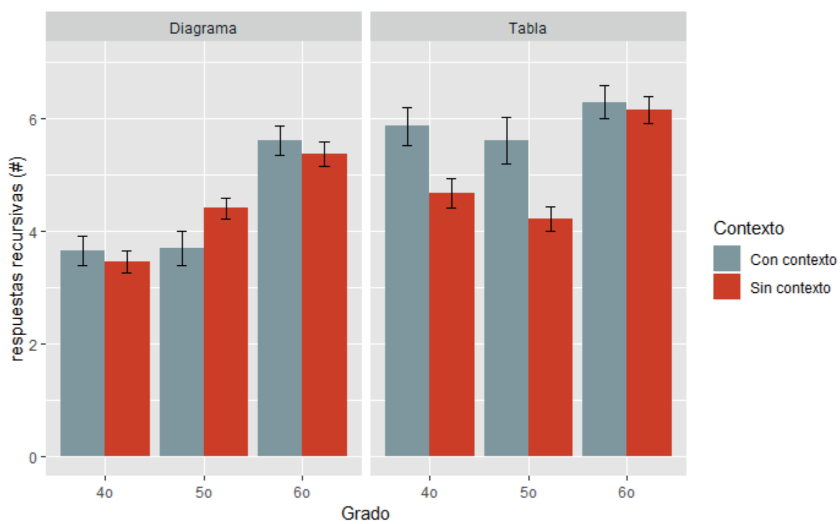
Al examinar la interacción representación x contexto se observó que en el caso del diagrama no hubo diferencias entre las versiones con y sin contexto, mientras que en las tablas, hubo más respuestas recursivas cunado ésta se acompaña de contexto. En la interacción grado x contexto no se encontraron diferencias entre 5° y 6°, mientras que para 4° la versión con contexto hubo un mayor número de respuestas recursivas. La interacción triple entre grado x contexto x representación se observa que las tablas con contexto promueven más respuestas recursivas en los estudiantes de 4° y 5°, en lo que refiere al diagrama, se observó que en 4° y 6° no hubo diferencias en cuanto a las dos versiones del contexto (con y sin), pero para los estudiantes de 5° la versión sin contexto tiene un mayor número de respuestas recursivas. Los resultados se ilustran en la figura 3

Fig. 3: Respuestas funcionales (a) y recursivas (b) ante los dos tipos de Representación Externa (Tabla y Diagrama) y el Contexto (Con y Sin).

a)



b)



Los diagramas, aunque están dotados de más información gráfica, parecen facilitar el establecimiento de relaciones entre pares de dos variables (i.e. la longitud de la sombra y la altura del poste) ya que los estudiantes pueden realizar un mayor número de inferencias sobre las relaciones presentadas y leerlas de diferente forma (Schnotz, 2005). Sin embargo, esto no garantizan la generalización de la relación identificada.

Las tablas por su diseño y contenido pueden estar dirigiendo la atención del estudiante al análisis de una sola variable, favoreciendo con ello la lectura recursiva (intra variable). Este tipo de representación se aleja del referente mismo del cual nace y se establece la relación funcional.

Que la incorporación de contexto facilite la identificación de una relación entre dos variables se puede relacionar con el papel funcional que éste otorga a la consonancia cognitiva, esto es, en tanto el contexto y la representación se relacionan y se reorganizan como un mismo elemento que promueve una mejor comprensión.

Es posible suponer que el énfasis en la elección de la respuesta recursiva mostrado por los estudiantes de sexto grado sea una institucionalización docente, ya que tanto los estudiantes de cuarto como de quinto grado parecen no ver, *per se*, este tipo de relación.

Estos datos sirven para acompañar tanto la práctica docente como el proceso de enseñanza y aprendizaje, en lo que a la comprensión profunda de relaciones matemáticas refiere. El uso de diagramas en el trabajo de relaciones funcionales, de proporción y covariación es una herramienta más que parece tener ventajas, al menos, en los primeros años de la educación primaria.

Referencias

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's Use of Variables and Variable Notation to Represent Their Algebraic Ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34–63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939

Chu, J., Rittle-Johnson, B., & Fyfe, E. R. (2017). Diagrams benefit symbolic problem-solving. *British Journal of Educational Psychology*, *87*(2), 273–287.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential Functions, Rates of Change, and the Multiplicative Unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2/3), 135–164. Recuperado a partir de http://www.jstor.org/stable/3482782

INEGI. (2015). Características educativas de la población. Recuperado a partir de https://www.inegi.org.mx/temas/educacion/

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. En *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25–26). National Research Council, National Academy Press Washington, DC.

Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H. M., Ng, S. F., Venkatraman, V., & Chee, M. W. L. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates. *Brain Research*, *1155*, 163–171. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.brainres.2007.04.040

Lemons, D. S. (2017). *Drawing physics*. Cambridge, MA: MIT press.

Medrano, A. M. (2019). *Promoción del pensamiento algebraico en estudiantes de primaria*. Tesis inédita de doctorado. Universidad Nacional Autónoma de México.

Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. En *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 49–69). Cambridge: Cambridge University Press.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206–223. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001

Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using Repeating Patterns to Explore Functional Thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9–14. Recuperado a partir de http://pbidi.unam.mx:8080/login?url=http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ793907&lang=es&site=eds-live

Wilkening, F., & Cacchione, T. (2010). Children's intuitive physics. En U. Goswami (Ed.), *The Wiley-Blackwell Handbook of Childhood Cognitive Development* (Second, pp. 473–496). West Sussex, UK: Wiley-Blackwell.

Xolocotzin, U., Inglis, M., & Medrano, A. M. (2018). Elementary and secondary students' functional thinking with tables and diagrams. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Umeå, Sweden: PME.

Xolocotzin, U., Rojano, T., & Medrano, A. M. (s/f). Intuitive approaches for solving functional tasks without formal algebraic instruction: A mixed methods study with students in Grade 5.