



CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE PROMOVIDAS EN EL CURRÍCULO OFICIAL MEXICANO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

Martha Iris Rivera López
Universidad Autónoma de Guerrero

Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero

Área temática: Educación en Campos Disciplinarios.

Línea temática: El desarrollo curricular, la innovación educativa, el diseño y evaluación de materiales educativos y, los procesos de evaluación en los diferentes campos de saber disciplinar.

Tipo de ponencia: Reporte Final.

Resumen:

La pendiente es un concepto matemático fundamental que trasciende desde el nivel básico hasta el nivel universitario. Su comprensión es importante, ya que desempeña un papel importante en la resolución de problemas de variación y cambio. En este estudio se analizaron los programas de estudio de Matemáticas de la educación básica obligatoria en México, con el objetivo de identificar qué conceptualizaciones de la pendiente se promueven en estos. Para explicar los resultados se utilizaron las conceptualizaciones de la pendiente reportadas en la investigación en educación matemática. Los hallazgos indican que las conceptualizaciones de la pendiente propuestas en los programas de estudios de matemáticas previstas en México no reflejan lo que otros han identificado en el plan de estudios de los Estados Unidos. La razón geométrica es la conceptualización de la pendiente menos común en el currículo de México, contrariamente a los hallazgos del currículo de los EE. UU. Las conceptualizaciones de propiedad funcional y situaciones del mundo real son las más comunes en los programas de estudio de matemáticas de México y Estados Unidos. Las sugerencias incluyen estudiar cómo los libros de texto tratan con las conceptualizaciones de pendientes promovidas en los programas de estudios de matemáticas de México y cómo los libros de texto de matemáticas mexicanas pueden influir en la instrucción en el aula y contribuir a la formación de conceptualizaciones en los estudiantes.

Palabras clave: Conceptualizaciones, Pendiente, Programas de estudio, Educación Básica

Introducción

La importancia de comprender el concepto de pendiente así como la linealidad son clave para describir y comprender las funciones lineales así como las no lineales, (Teuscher y Reys, 2010; Yerushalmy, 1997). Más aún, para comprender conceptos matemáticos más avanzados como la derivada (Zandieh y Knapp, 2006); conceptos claves de estadística, como la regresión lineal (Nagle, Casey y Moore-Russo, 2017).

Los estudios de investigación internacional han reportado muchas dificultades existentes en cuanto a la comprensión de la pendiente (por ejemplo, Cho & Nagle, 2017; Weber, Tallman & Middleton, 2015). Quizás una fuente de tales dificultades es la variedad de formas en que se puede conceptualizarse. Por esta razón, los investigadores se han centrado en conocer cómo los profesores y los estudiantes entienden la pendiente (por ejemplo, Moore-Russo, Conner y Rugg, 2011; Stump, 1999). Sin embargo, la investigación acerca de este concepto ha sido limitada en México. De hecho, no se encontró en la literatura de investigación un estudio que analice la pendiente en el currículo de matemáticas de México. Por lo tanto, este estudio plantea las siguientes preguntas de investigación: (a) ¿Cuáles son las conceptualizaciones de pendiente que se promueven en los programas de estudio de matemáticas de México? (b) ¿Qué conceptualizaciones de pendiente se enfatizan a lo largo del currículo oficial de matemáticas en México?

Desarrollo

El término “conceptualización” se refiere al proceso de formación de un concepto o idea. Una conceptualización se relaciona con el conocimiento conceptual, pero también con el conocimiento procedimental, ya que ambos juegan un papel importante en la comprensión matemática (Hiebert y Lefevre, 1986, Baroody, 2003). El conocimiento conceptual es un conocimiento rico en relaciones que vinculan nuevas ideas con ideas ya comprendidas y el conocimiento procedimental consiste el uso de algoritmos y reglas. El proceso de comprensión de la pendiente incluye el conocimiento conceptual y procedimental de la pendiente (Stump, 1999). El conocimiento conceptual se refiere, por ejemplo, a la relación entre la pendiente y la razón de cambio (como en la conceptualización de la propiedad funcional); el conocimiento procedimental se refiere al uso de símbolos y procedimientos relacionados con la pendiente (como el uso de la fórmula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en la conceptualización razón algebraica).

En México, la definición matemática utilizada en la mayoría de los libros de texto para la pendiente está dada por Lehmann (1980) como la “tangente de su ángulo de inclinación, denotado por

$m = \tan \alpha$. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes en una línea recta, la pendiente

de la línea es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$ (p 17). Esta definición se expresa en términos algebraicos e implica la tangente trigonométrica y el cociente de diferencias. Por lo tanto, se puede esperar que los estudiantes desarrollen conceptualizaciones relacionadas con esta definición.

Para analizar los programas de estudio de matemáticas se utilizaron las once conceptualizaciones de pendiente (ver Tabla 1) identificadas en investigaciones anteriores en EE. UU. (Stump, 1999, 2001, Moore-Russo et al., 2011).

Tabla 1: Conceptualizaciones de la Pendiente (Adaptada de Nagle y Moore-Russo (2014))

CONCEPTUALIZACIÓN	DESCRIPCIÓN	CÓDIGO
RAZÓN ALGEBRAICA	CAMBIO EN y ENTRE CAMBIO EN x , RAZÓN CON LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ O $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	A
RAZÓN GEOMÉTRICA	LA RAZÓN DEL DESPLAZAMIENTO VERTICAL Y DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN LA GRÁFICA DE UNA RECTA. SUBIDA SOBRE CORRIDA EN EL GRÁFICO DE UNA RECTA.	G
PROPIEDAD FUNCIONAL	RAZÓN DE CAMBIO CONSTANTE ENTRE DOS VARIABLES ENCONTRADAS EN REPRESENTACIONES MÚLTIPLES, INCLUYENDO TABLAS Y DESCRIPCIONES VERBALES (POR EJ. CUANDO x INCREMENTA EN 2, Y INCREMENTA EN 3).	F
SITUACIÓN MUNDO-REAL	SITUACIÓN FÍSICA (ESTÁTICA, POR EJ.: UNA RAMPA, ESCALERA, ETC.) O SITUACIÓN FUNCIONAL (DINÁMICA, POR EJ.: DISTANCIA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, VOLUMEN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, ETC.)	R
INDICADOR DE COMPORTAMIENTO	NÚMERO REAL CON SIGNO QUE INDICA CRECIMIENTO (+), DECRECIMIENTO (-), TENDENCIA HORIZONTAL DE LA LÍNEA (0). SI NO ES CERO, INDICA LA INTERSECCIÓN CON EL EJE x .	B
PROPIEDAD FÍSICA	DESCRIPCIÓN DE UNA RECTA UTILIZANDO EXPRESIONES COMO GRADO, INCLINACIÓN, TENDENCIA, LADEO, DECLIVE, ÁNGULO, ETC.	P
COEFICIENTE PARAMÉTRICO	COEFICIENTE m (O SU VALOR NUMÉRICO) EN $y=mx+b$ Ó $y-y_1= m(x-x_1)$.	PC
TRIGONOMÉTRICA	PROPIEDAD RELACIONADA CON EL ÁNGULO DE UNA RECTA QUE HACE CON UNA RECTA HORIZONTAL; TANGENTE DEL ÁNGULO DE INCLINACIÓN.	T
EN CÁLCULO	MEDIDA RELACIONADA CON LA DERIVADA COMO LA PENDIENTE DE LA TANGENTE A UNA CURVA, DE UNA RECTA SECANTE, O CÓMO RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA PARA CUALQUIER FUNCIÓN (INCLUSO UNA NO LINEAL).	C
PROPIEDAD DETERMINANTE	PROPIEDAD QUE DETERMINA SI LAS RECTAS SON PARALELAS O PERPENDICULARES ENTRE SÍ; ADEMÁS DE DETERMINAR UNA RECTA SI DA UN PUNTO Y SU PENDIENTE.	D
CONSTANTE DE LINEALIDAD	PROPIEDAD CONSTANTE Y ÚNICA PARA LAS RECTAS; PENDIENTE DE LA RECTA NO ES AFECTADA POR LA TRASLACIÓN. PROPIEDAD CONSTANTE QUE GARANTIZA LA COLINEALIDAD DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA, INDEPENDIENTE DE LA REGIÓN DEL GRÁFICO LINEAL QUE SE ESTÁ CONSIDERANDO, ES DECIR QUE DOS PUNTOS CUALESQUIERA DE LA RECTA DETERMINAN LA PENDIENTE.	L

Para este estudio se analizaron los programas de estudios de 1 al 12 grado. De 1° al 6° grado corresponden a la primaria, 7° al 9° a la secundaria; y los grados 10 a 12 al bachillerato. Los correspondientes de 1° al 9° grado están organizados en tres niveles de desglose. El primero corresponde a los *ejes*, el segundo a los *temas* y el tercero a los *contenidos*. Los ejes se refieren a la dirección o rumbo de las acciones y son: a)

Sentido numérico y pensamiento algebraico; b) Forma, espacio y medida; y c) Manejo de la información. Los temas son grandes ideas matemáticas cuyo estudio requiere un desglose más fino (los contenidos), por ejemplo: a) Patrones y ecuaciones, b) Proporcionalidad y funciones, c) Medida, Figuras y cuerpos, d) Análisis y representación de datos. Los contenidos son aspectos muy concretos que se desprenden de los temas, por ejemplo, un contenido relacionado con la pendiente es “Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con una horizontal, y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente” (SEP 2011, p.50).

Los programas de estudio de matemáticas para los grados 10 a 12 tiene una estructura ligeramente diferente. Cada grado del bachillerato se divide en dos semestres, cada uno con un curso. Cada curso está estructurado en bloques, cada uno de los cuales se describe mediante los desempeños que se deben lograr junto con sus objetos de aprendizaje, las competencias a desarrollar, las actividades de enseñanza y aprendizaje y, las herramientas de evaluación. En el grado 10, se toma el curso de Matemáticas I que incluye temas básicos de álgebra y el curso de Matemáticas II que estudia la geometría euclidiana, trigonometría y algunos temas básicos de probabilidad y estadística. En el grado 11 se cursa Matemáticas III, enfocado en la geometría analítica y luego Matemáticas IV que incluye temas de precálculo. En el grado 12, los estudiantes tienen la opción de tomar Matemáticas V (Cálculo Diferencial) y luego Matemáticas VI (Cálculo Integral).

Se utilizó el análisis de contenido (Bardin, 2002) para analizar cada programa de estudio, los cuales fueron el objeto de estudio. Las unidades de análisis fueron las frases y las palabras clave en 1) los temas y contenidos para los grados 1 al 9 y 2) los bloques para los grados 10 a 12 (se consideró los objetivos de aprendizaje, las competencias, actividades de enseñanza y de aprendizaje y, herramientas de evaluación); que se refirieron a cualquiera de las conceptualizaciones de pendiente. Dado que no solo las menciones explícitas de pendiente en el currículo pueden afectar la forma en que se presentan los conceptos, al analizar el currículo, el equipo de investigación también consideró las menciones implícitas de pendiente. En este estudio, cuando se mencionó la pendiente o alguna expresión sinónima (por ejemplo, la fórmula de la pendiente, la razón de cambio de una función lineal), se documentó como una mención explícita de la conceptualización correspondiente, caso contrario se documentó como una mención implícita, pero cuyo contenido tiene relación con la pendiente (por ejemplo, constante de proporcionalidad, funciones lineales).

Para validez y rigurosidad en los resultados se utilizó el método de revisión por pares. Los investigadores revisaron cada programa de estudio y categorizaron las conceptualizaciones existentes de la pendiente de manera independiente. El objetivo de la revisión fue identificar todas las referencias a la pendiente y luego buscar frases o palabras clave que permitan la codificación de los contenidos utilizando los códigos identificados en la Tabla 1. Finalmente, las asignaciones de codificación propuestas fueron comparadas y discutidas. En caso de desacuerdo, los investigadores discutieron el extracto hasta que se logró un consenso del tipo de conceptualización. El número de referencias en el currículo de matemáticas previsto para cada grado determinó la frecuencia de las conceptualizaciones de la pendiente. La frecuencia se obtuvo para cada nivel educativo.

Resultados

El término “pendiente” no aparece explícitamente antes del grado 9. Sin embargo, hubo temas que abordaron de manera implícita las conceptualizaciones de la pendiente.

Conceptualizaciones previas al 9° grado

Proporcionalidad y funciones fue el único tema relacionado con la pendiente en los grados 5, 6, 7 y 8. En el 5° grado se identificó la conceptualización Propiedad funcional, por la frase “factor de proporcionalidad” que se refiere al factor en la relación que se obtiene como una generalización en el análisis de tablas que describen un par de secuencias numéricas. En el 6° grado, también se identificó un contenido como la conceptualización propiedad funcional por la frase “relaciones del tipo para cada n , m ”, que contribuye implícitamente a la interpretación de una razón de cambio.

Las conceptualizaciones Propiedad funcional y Constante de linealidad se promueven en el grado 7. Las frases “constante de proporcionalidad” y “el efecto de la aplicación sucesiva de la constante de proporcionalidad” en el contenido que plantea “Desarrollo de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones específicas” (SEP, 2011) permitió esta codificación. La notación algebraica se introduce en el 8° grado para analizar la relación proporcional estudiada principalmente numéricamente en el 5° grado con una conexión a las gráficas relacionadas en el 7° grado. Los contenidos en el 8° grado proporcionan evidencia de seis conceptualizaciones identificadas en seis contenidos específicos, que incluyen: razón geométrica, propiedad funcional, coeficiente paramétrico, situaciones del mundo real, indicador de comportamiento y constante de linealidad.

Las conceptualizaciones de Propiedad funcional y de Coeficiente paramétrico fueron las más notadas en el 8° grado. La conceptualización Propiedad funcional se codificó cuando el contenido involucró el análisis de la relación proporcional entre las variables, ya sea en una tabla o en una gráfica, ya que en el currículo demanda que el estudiante pueda asociar los significados de las variables que se ponen en juego en esta relación, específicamente para funciones lineales. La conceptualización de Coeficiente paramétrico se codificó en los contenidos que tratan la relación algebraica $y = kx$, donde k representa la constante de proporcionalidad; las expresiones algebraicas $y = ax + b$ e $y = mx + b$, donde a y m representan la pendiente; y gráficamente donde los parámetros garantizaron que la relación da lugar a una línea recta en el plano cartesiano. La conceptualización Constante de linealidad es una de las principales características promovidas cuando se enfoca en un gráfico de una recta que representa la relación proporcional en un plano cartesiano (Nagle y Moore-Russo, 2013). El contenido asociado con el análisis de parámetros puede aprovecharse para promover la conceptualización de la pendiente como un Indicador de comportamiento. La conceptualización de Razón geométrica se codificó para el contenido asociado con la construcción de gráficos de funciones lineales, especialmente en los casos de la ecuación de pendiente-intersección. La conceptualización asociada a una Situación del mundo real se codificó para las frases “situaciones problemáticas” o “fenómenos en diferentes contextos”, donde el análisis de las situaciones era el objetivo principal, cuando se trataba de la construcción e interpretación de gráficos de funciones lineales.

Conceptualizaciones en el 9° Grado

El término “pendiente” se menciona explícitamente en el 9° grado por primera vez. La pendiente se introduce como sinónimo de “inclinación” y se asocia con la estimación y el análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno modelado por una función lineal. El valor numérico de la pendiente está relacionado con el ángulo de inclinación, así como con el cociente de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo. El estudio enfocado de la pendiente como una razón de cambio en este grado llevó a la asignación de numerosos códigos de las conceptualizaciones. Entre estas: se usa la fórmula algebraica de la pendiente, que fue codificado como la conceptualización de Razón algebraica; para el análisis de la razón de cambio en este fenómeno sugiere las conceptualizaciones de Propiedad funcional y Situación del mundo real. El modelo de una función lineal (ya estudiada antes) alude a la conceptualización del Coeficiente paramétrico y la relación entre la pendiente y la inclinación indica la Propiedad física.

Otro contenido sugiere relacionar la pendiente y el ángulo de inclinación proporcionando evidencia de la conceptualización Trigonométrica. Por otro lado, la mención implícita de la pendiente en este grado sugiere las conceptualizaciones: Constante lineal, al analizar la representación gráfica para identificar una relación proporcional e; Indicador de comportamiento al leer los gráficos que representan situaciones de movimiento o llenado del recipiente, ya que esto implica describir el comportamiento del gráfico. Las referencias: “análisis de la razón de cambio en un fenómeno”, “situaciones de movimiento y contenedores de llenado” y “análisis de situaciones problemáticas con fenómenos lineales en física, biología, economía”, llevó al equipo de investigación a asignar el código de situación del mundo real, porque en estos contenidos hay una situación funcional dinámica que involucra dos variables de una función lineal. En general, para el grado 9, las conceptualizaciones de la propiedad funcional y las situaciones del mundo real fueron las más notables.

Conceptualizaciones del 10° a 12° grado.

Las conceptualizaciones de pendiente asociadas en el grado 10, se identificaron en los Bloques II y VI para Matemáticas I y en los Bloques III y VI para Matemáticas II. En este grado no hubo una referencia explícita a la pendiente o la razón de cambio; sin embargo, algunos desempeños se relacionaban con la pendiente y sus conceptualizaciones.

Las conceptualizaciones más notables fueron: Propiedad funcional, Coeficiente paramétrico e Indicador de comportamiento. En Matemáticas I, la conceptualización de la propiedad funcional se identificó en referencias a funciones lineales, modelos de variación proporcional y el uso de tablas como técnica para graficar una función lineal. Las referencias a la expresión o al requerimiento de expresiones algebraicas que modelan situaciones que involucran variaciones lineales o funciones se codificaron como el coeficiente paramétrico. Además, una técnica para graficar una función lineal enfatiza en identificar si la pendiente es positiva, negativa o cero, y se usa para describir el comportamiento de una función, como creciente, decreciente o constante; por lo que se codificó como Indicador de comportamiento. En Matemáticas II,

la similitud de los triángulos rectángulos contribuye a las conceptualizaciones: Constante lineal y Razón geométrica, ya que la validación de la relación constante permite reconocer la constante de la razón del aumento con respecto al avance como sugiere Nagle y Moore-Russo (2013).

En el grado II, el concepto de pendiente se menciona explícitamente en Matemáticas III. En este curso se identificó que la definición de pendiente se sugiere como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación; por lo tanto, la conceptualización Trigonométrica está presente. La conceptualización de la Razón algebraica se identificó cuando se trabaja con el cociente de diferencias $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Asimismo, la Propiedad Determinante en el planteamiento y resolución de problemas que involucran paralelismo y perpendicularidad. En el Bloque IV, se identificaron las conceptualizaciones del coeficiente paramétrico y la Razón algebraica ya que hay referencias al trabajo con diferentes formas de ecuaciones lineales.

En Matemáticas IV, se estudian las funciones algebraicas y trascendentales, pero la pendiente no se menciona explícitamente. Sin embargo, hay relaciones con algunas conceptualizaciones de pendiente: Indicador de comportamiento y Situaciones de la vida real. Estas están relacionadas con explicaciones del aumento y la disminución en las situaciones prácticas que están modeladas y representadas por funciones lineales. La conceptualización Propiedad funcional se expresa de acuerdo con la atención prestada al uso de criterios de comportamiento de datos en tablas y las gráficas de una situación correspondiente a modelos lineales. Si la decisión depende de decidir entre gráficos lineales y otros, entonces la conceptualización Constante de linealidad está implícitamente presente.

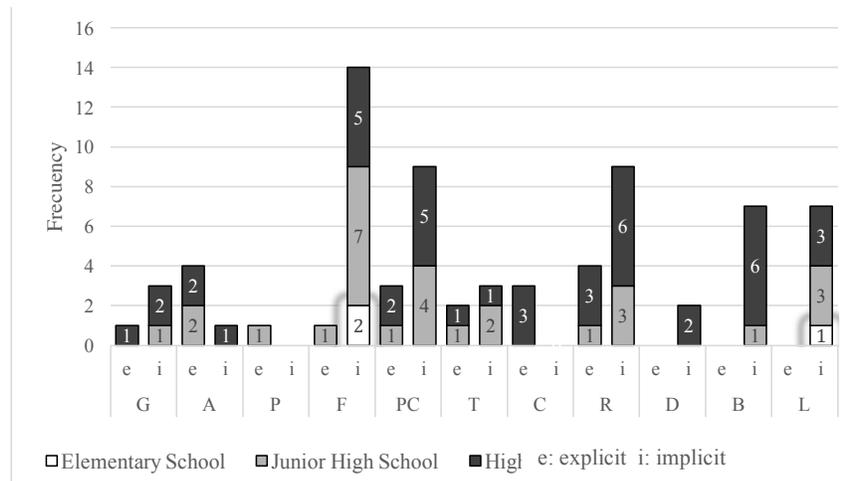
En el 12° grado se estudia Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. En Cálculo diferencial identificamos las conceptualizaciones: razón algebraica, concepción del cálculo y situación del mundo real. No fue una sorpresa que la concepción del cálculo fuera la más comúnmente identificada para las frases clave, como “razón de cambio instantánea o promedio” y “pendiente de la línea secante o tangente”. Algunas conceptualizaciones no se abordaron explícitamente en los desempeños, pero sí en los objetivos de aprendizaje asociados, actividades de enseñanza o actividades de aprendizaje. Por ejemplo, una actividad de aprendizaje sugirió “Proponer situaciones en los campos administrativo, económico, natural y social para aplicar el concepto de tasa de cambio promedio y tasa de cambio instantáneo” (SEP, 2013e, p. 25). La conceptualización de la razón algebraica se infiere a partir de la estimación de la tasa promedio de cambio porque se utiliza la fórmula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. La conceptualización de la situación del mundo real se identifica ya que el desempeño se refiere a la interpretación de la razón de cambio en diferentes contextos.

En el curso de Cálculo Integral, el Bloque I el equipo de investigación utilizó el código de concepción de cálculo para la actividad de enseñanza que se refiere a “la estimación del error en el cálculo de la pendiente de una línea tangente a una curva” (SEP, 2013f, p.16).

Conclusiones

La Figura 1 muestra que hubo más referencias explícitas e implícitas de la pendiente en el bachillerato que en la Secundaria (es decir, 21 implícitas, 7 explícitas en la secundaria y 29 implícitas, 12 explícitas en el bachillerato). Esto difiere del énfasis informado en la pendiente en los grados de secundaria en los EE. UU. (Nagle y Moore-Russo, 2014).

Figura 1: Frecuencia de las conceptualizaciones de la Pendiente en el Currículo oficial Mexicano.



La conceptualización de la propiedad funcional fue, con mucho, la más dominante en el currículo matemático de México tal como se observa en la Figura 1), similar a los hallazgos recientes en los Estados Unidos. Las siguientes dos conceptualizaciones más notables (en orden) fueron la situación del mundo real y el coeficiente paramétrico, seguidos de cerca por la Constante de linealidad e Indicador de comportamiento, que empataron para el cuarto. La conceptualización Situación del mundo real puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una mejor comprensión de la pendiente, ya que, como lo indica Stump (2001). Sin embargo, el plan de estudios de México no explica cómo deben incorporarse las sugerencias ni brinda ejemplos específicos de cómo ayudar a los estudiantes a hacer este enlace a situaciones del mundo real.

Las conceptualizaciones mencionadas anteriormente representaron el 74% de todas las referencias implícitas y explícitas a la pendiente en el currículo mexicano. La escasa presencia de las otras conceptualizaciones de pendiente en el plan de estudio de México puede llevar a una comprensión débil y desconectada de la pendiente. Una diferencia importante entre el plan de estudios de México y lo que se ha informado en investigaciones que incluyen sugerencias curriculares recientes de los EE. UU. (Nagle y Moore-Russo, 2014), es la falta de énfasis en la pendiente como una razón geométrica. A partir de esto, se podría inferir una preferencia a un enfoque más analítico o procedimental para la pendiente en el currículo de México, mientras que para el de EE. UU a un enfoque más visual de la pendiente, basado en la gráfica de una línea recta.

Los resultados indican que las menciones de las conceptualizaciones implícitas son cuatro veces más que las explícitas. Esto puede ser indicativo de una falta de promoción de conexiones inter e intra entre la pendiente con otros conceptos matemáticos y entre conceptualizaciones de pendiente respectivamente. Es cierto que la pendiente no se puede estudiar explícitamente en todos los grados, pero es posible promover conexiones y abordar activamente las posibles desconexiones entre la pendiente y la razón de cambio identificada por Teuscher y Reys (2010).

En este estudio, proporcionamos un análisis del plan de estudio pretendido en México con respecto a la pendiente, pero no ofrecemos información sobre lo que los maestros realmente enseñan en el aula ni sobre lo que los estudiantes pueden hacer. Dicho esto, es importante tener en cuenta que el currículo analizado no da instrucciones suficientes sobre cómo implementarlo y presenta inconsistencias en las conexiones explícitas entre los grados de los diferentes niveles educativos. También sería importante conocer las que se promueven en los libros de texto, ya que a menudo forman parte del puente entre el plan de estudios previsto y el plan de estudios implementado (Schmidt et al., 2001), dado que los textos tienen una gran influencia en la instrucción en el aula. Asimismo, es necesario que se examine como trabajo futuro también qué conceptualizaciones de la pendiente manipulan o aprenden los estudiantes.

Referencias

- Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido* [The content Analysis]. 3ª Edición. Madrid: Akal.
- Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. Baroody & A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. 1–33). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Cho, P., & Nagle, C. (2017). Procedural and Conceptual Difficulties with Slope: An Analysis of Students' Mistakes on Routine Tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 135–150.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lehmann, C. (1980). *Geometría Analítica* [Analytic Geometry]. México, D.F.: Limusa.
- Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.
- Nagle, C. R., Casey, S., & Moore-Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, 117(1–2), 13–26.
- Nagle, C., & Moore-Russo, D. (2013). How Do Teachers' Concept Images of Slope Relate to their Intended Instructional Foci? *Investigations in Mathematics Learning*, 6(2), 1–18.
- Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2014). Slope across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *Mathematics Educator*, 23(2), 40–59.
- Schmidt, W. H., Curtis, C. M., Houang, R. T., Wang, H. C., Wiley, D. E., Cogen, L. S., et al. (2001). *Why schools matter: A crossnational comparison of curriculum and learning*. San Francisco.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011 guía para el maestro. Educación secundaria. Matemáticas* [2011 curriculum, teacher's guide. Secondary Education. Mathematics]. México, D. F.: Secretaría Educación Pública. Retrieved from <http://evaluaciondocente.sep.gob.mx/materiales/SEPPROGRAMASDEESTUDIO2011.GUIAPARAELMAESTRO.SECUNDARIA.MATEMATICAS.pdf>

SEP. (2013e). *Cálculo Diferencial* [Differential calculus]. México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Retrieved from http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf

SEP. (2013f). *Cálculo Integral* [Integral calculus]. México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Retrieved from http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/cfp_5sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124–144.

Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 207–227.

Teuscher, D. & Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher*, 3(7), 519–524.

Weber, E., Tallman, M., & Middleton, J. (2015). Developing elementary teachers' knowledge about functions and rate of change through modeling. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 1–33.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), 431–466.

Zandieh, M., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 1–17.