Componentes fundamentales para la resolución de problemas de álgebra en secundaria

Ma. Otilia Pastrana Galarza
Centro de Actualización del Magisterio de Iguala

Pedro Ortiz Oropeza
Centro de Actualización del Magisterio de Iguala

Antonio Hurtado Huicochea
Centro de Actualización del Magisterio de Iguala

Área temática: A.6) Educación en campos disciplinares.
Línea temática: Las implicaciones del saber disciplinar en la gestión escolar, en la formación inicial y permanente de profesores y, en la práctica y los saberes docentes.
Tipo de ponencia: B.1.1) Reporte parcial de investigación.

Resumen:

Esta ponencia "*Componentes fundamentales para la resolución de problemas de álgebra en secundaria*", da cuenta de los avances de la investigación que permite al Cuerpo Académico *Formación docente, prácticas y currículum* del CAM-Iguala, dar seguimiento a la formación continua de docentes de matemáticas en el nivel secundario. En particular, en este reporte nos referimos a la resolución de problemas que implican el uso ecuaciones algebraicas lineales. En esta investigación se ponen de manifiesto algunas acciones estratégicas, integradas en un diplomado, que provee a los profesores de orientaciones didácticas y disciplinares en la fundamentación, explicación y análisis de la resolución de problemas, que sirvan para fortalecer sus conocimientos para la mejora de su práctica docente.

Palabras clave: Álgebra, problema, ecuaciones lineales, incógnita.

Introducción

Una motivación que dio paso a esta investigación fue la convicción de que los profesores de matemáticas requieren capacitación continua que les provea de conocimientos matemáticos para enfrentar los retos que su labor docente les demanda. Eso aunado a que las pruebas nacionales e internacionales aplicadas a los alumnos de educación secundaria demuestran que todavía no han logrado desarrollar plenamente las habilidades que les permitan resolver problemas con creatividad y eficacia. Particularmente en el estado de Guerrero, los resultados obtenidos por los alumnos en la asignatura de matemáticas son desalentadores.

Del análisis y reflexión de nuestra labor como formadores de docentes, surgió una pregunta inicial ¿qué estamos haciendo para revertir esa situación? El dar respuesta a ese cuestionamiento implicó el reconocimiento un problema de nuestra práctica, el cual delimitamos como: *no implementar acciones estratégicas que integren las orientaciones didácticas y disciplinares en la fundamentación, explicación y análisis de la resolución de problemas algebraicos*.

En general, la metodología que utilizamos es la investigación acción (I-A) propuesta por Latorre (2005), la cual nos orientó a concebir e implementar un plan estratégico para dar solución al problema.

Para la delimitación del problema se diseñaron entrevistas, que se conocen como Grupos focales (Mella 2000). Luego, se aplicaron dos exámenes de diagnóstico, a partir de los cuales se concluyó que, entre otros, los profesores presentaron dificultades para la enseñanza del álgebra.

Posteriormente, nos dimos a la tarea de identificar contenidos didácticos y teóricos que coadyuvaran a revertir esas dificultades. Por lo que, las preguntas de investigación que nos planteamos fueron ¿Cómo integrar una propuesta que desde la perspectiva teórica y didáctica fortalezca los conocimientos de los docentes para la enseñanza del álgebra? ¿Cuáles son los componentes y contenidos que debemos implementar para orientar a los profesores?

Con esos antecedentes, diseñamos un *diplomado en didáctica para la enseñanza de la aritmética y el álgebra.* Se estructuró en cuatro bloques: I. Historia y epistemología de aritmética y álgebra. II. Didáctica de aritmética y álgebra. III. Resolución de problemas algebraicos. IV. El uso de las TIC y TAC en la resolución de problemas. Cuyos objetivos son:

Objetivo general. Activar el pensamiento algebraico de los docentes para resolver problemas aritméticos y algebraicos, construyendo explicaciones matemáticas fundamentadas.

Objetivo particular. Desarrollar propuestas didácticas eficaces para promover los aprendizajes esperados relacionados con la resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales.

La *hipótesis de acción* que establecimos fue: Si planteamos situaciones problema que induzcan a los docentes al análisis y comprensión de problemas se fortalecerá su práctica docente.

Desarrollo

Una vez que tuvimos diseñado el diplomado, nuestra institución convocó a profesores de matemáticas a cursarlo. Se integró un grupo con catorce docentes de matemáticas de las distintas modalidades de secundarias (generales, técnicas y telesecundaria), cuya formación inicial es muy variada: agrónomos, contadores, licenciados en educación primaria, licenciados en informática, Sólo cuatro de ellos cursaron la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas.

Implementación del diplomado. En el primer ciclo de la I-A, se integraron las siguientes actividades:

Actividad 1. Motivación. se les proyecto el video "Historia concisa de las ecuaciones" (Pastrana, M. 2018) que elaboramos para dar los antecedentes históricos de la resolución de problemas. Luego, se pidió a los docentes que elaboraran una línea del tiempo.

Actividad 2. "Recuperación de saberes previos". Consistió en cuestionar a los docentes acerca de la percepción que tenían de algunos conceptos: algebra, ecuación, ecuación lineal, sistema de ecuaciones (2x2) y sistematización de los números reales (R). Se les propuso indagar en textos, artículos y vía internet.

Actividad 3. Reconocimiento de las propiedades de los Números Reales y la igualdad. Ante el cuestionamiento ¿cuáles propiedades de los números reales y de la igualdad conocen? ¿Cómo las utilizan en la resolución de problemas algebraicos?

Las propiedades también, llamadas leyes o axiomas, se han enunciado de diferentes maneras en los libros de texto. Por considerar que otorgan una visión más amplia de lo que en la educación básica se acostumbra, aquí enunciamos las propuestas por Marsden y Hauffman (1993): *Asociativa, identidad*, *Inverso*. *Conmutativa, distributiva*, no *trivialidad*. También las propiedades de orden: *reflexividad, antisimetría, transitividad, orden lineal* (total) y *compatibilidad.* (Tabla 1).

Propiedades de la igualdad. Cuando se habla de igualdad en matemáticas, se establece una relación de valores representada por el signo igual (=), que es el que separa al primer miembro del segundo. De las propiedades de orden establecidas en la sección anterior, se derivan las *propiedades de la igualdad: reflexiva, simétrica*, transitiva y *uniforme* (tabla 2). Su correcto manejo será fundamental para la solución de ecuaciones.

Una vez que se discutieron las propiedades señaladas, se les indicó que resolvieran problemas en los cuales identificaran las propiedades utilizadas. Se agruparon en equipos de 4 integrantes

Actividad 4. Elementos de la teoría de conjuntos para resolver problemas algebraicos. Los docentes confirmaron nuestro supuesto acerca de que no tenían conocimientos previos de este contenido. Expusimos lo que, desde nuestro punto de vista (Pastrana, M. & Ortiz, P. & Hurtado, A. 2018), son componentes primarios de la teoría de conjuntos para la comprensión de los conceptos y resolución de problemas algebraicos, entre otros, conjuntos: universo, complemento, vacío, subconjuntos y potencia. Operaciones con conjuntos: unión, intersección diferencia. Otro propósito fue que los docentes se familiarizaran con el lenguaje matemático. (Ver figuras 2-7). Una vez que se discutieron y ejemplificaron los conceptos señalados, se plantearon problemas donde los docentes utilizarían esos conocimientos.

Actividad 5. Comprender el problema y concebir un plan. Se plantearon 2 problemas

Famosas decadentes adictas al bisturí.

En una muestra de 50 famosas, 35 han recurrido a la mamoplastia, 20 a la rinoplastia y 15 a la liposucción. Se logró averiguar también que 15 se habían practicado mamo y rinoplastia, 12 rinoplastia y liposucción, y 10 liposucción y mamoplastia. Se supo adicionalmente que 8 se habían sometido a las tres intervenciones estéticas. ¿Cuántas de estas famosas no tienen ninguna de las tres intervenciones?

¿Quién tiene más?

Dos vecinos juegan al "quién tiene más" (en varilla para la construcción):

A: Yo tengo 40 y tú 30.

B: Sí, pero las mías miden 4 metros más que las tuyas.

El matemático (vecino C) dice: Si añadimos las 4 mías que son de 10 metros, entre todas completan un kilómetro.

¿Quién tiene más varilla?

Se indicó a los docentes que dieran respuesta a los cuestionamientos que Polya (1987) propone para la solución de problemas: Comprender el problema y concebir un plan (ver tablas 3 y 4 respectivamente).

Conclusiones

Hasta el momento consideramos que se ha logrado (parcialmente) activar el pensamiento algebraico de los docentes para resolver problemas de ecuaciones lineales, construyendo explicaciones matemáticas fundamentadas. Enseguida mencionamos algunos resultados de las actividades propuestas

Actividad 1. Motivación.

Para la elaboración de la línea del tiempo, los profesores, se concretaron a "copiar y pegar" lo que encontraron en internet. De lo que concluimos que no hay una cultura de investigación para extender sus conocimientos.

Actividad 2. Recuperación de saberes previos.

En la socialización de las respuestas, expresaron distintas definiciones. álgebra clásica también llamada básica o elemental. la señalada por Kolmogorov, Aleksandrov, Laurentiev y otros (1973, p. 61-62). "Álgebra es en esencia la doctrina de las operaciones matemáticas consideradas formalmente desde un punto de vista general, con abstracción de los números concretos". Agregan que: la palabra álgebra proviene del nombre de un tratado del matemático y astrónomo Mohammed ibn Musa al-Kharizmi. Su tratado sobre álgebra llevaba por título "*Al-jebrnw'al-muqabala*" que significa transposición y eliminación de términos.

El concepto de *ecuación algebraica* se entiende como una relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas. Una ecuación lineal tiene como propiedad esencial que el exponente de su incógnita es igual a uno. sistema de ecuaciones (2x2) son las que tienen dos incógnitas con exponente igual a uno.

Para la sistematización de los números reales (R) se indicó a los docentes que expresaran los conjuntos de número que conocían. Las respuestas fueron de lo más variadas (pares, naturales, negativos, fracciones). Por lo que puntualizamos que la sistematización de éstos es la siguiente:

$\boldsymbol{N} \subset \mathfrak{z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ también $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$. Tal y cómo se muestra en la figura 1.

Actividad 3. Reconocimiento de las propiedades de los Números Reales y la igualdad.

Se agruparon en equipos de 4 integrantes y las que mencionaron fueron las siguientes: cerradura, conmutativa, distributiva, asociativa, identidad, inverso aditivo o simétrico, inverso multiplicativo o recíproco. Como se puede ver ¡no mencionaron ninguna propiedad de orden! Luego, se mostraron dudosos cuando les pedimos que señalaran si todas eran válidas para el producto. Desconocían el lenguaje matemático para enunciarlas, no las reconocían en el contexto de la simplificación de expresiones algebraicas.

Actividad 4. Elementos de la teoría de conjuntos para resolver problemas algebraicos.

Los profesores mostraron entusiasmo con este contenido, mencionaron que le sería de gran utilidad para resolver algunos problemas, tanto de álgebra como de probabilidad. Por equipos, lograron resolver los ejercicios planteados. Esto se reflejó en la solución del problema *adictas al bisturí* que se planteó en la siguiente actividad

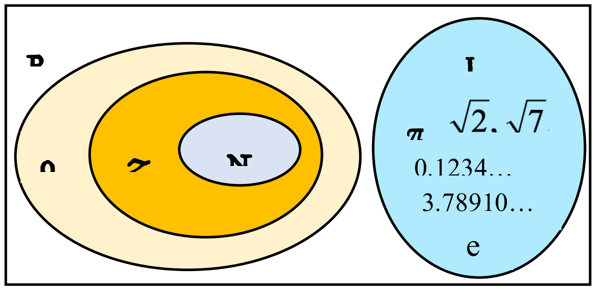
Actividad 5. Comprender el problema y concebir un plan.

En este aspecto fue notoria la dificultad de los docentes para identificar la condición de la situación presentada que permitía proponer alternativas de solución. Lo mismo sucedió, cuando se les pidió identificar situaciones similares. Usualmente buscan problemas donde usen algoritmos similares, pero olvidan las partes constitutivas del problema que lo hacen similar. Por lo anterior, podemos asegurar que los docentes presentan dificultades para comprender los problemas algebraicos y por lo tanto para concebir planes de solución que no prioricen el uso de los algoritmos correspondientes.

Una conclusión general que obtuvimos a partir de la observación y análisis de nuestra intervención es que, revertir las insuficiencias en la labor docente, implica recorrer un arduo camino, pero en la medida que se avizoran las vías para recorrerlo esa travesía se va haciendo cada vez más y más fascinante. Tomar conciencia de las debilidades que impiden fortalecer la práctica docente es el primer paso para atacar un problema; enfrentar los retos y subsanarlo es la meta. De este modo la práctica docente se convierte en una responsabilidad que va más allá de un simple intento.

Tablas y figuras

Figura 1: Sistematización de los números Reales



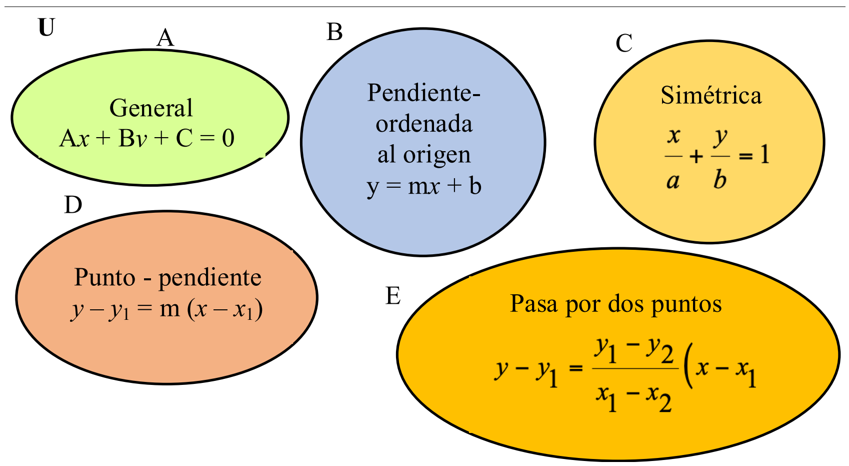
Los conjuntos que integran los números reales (R) se representan (mediante diagramas de Veen). Donde los subconjuntos son los números: naturales (N), enteros (Z), racionales (Q) e irracionales (I).

N = {1, 2, 3, …n, n+1, …}. Z = {… -n…-2, -1, 0, 1, 2, 3, …n, …}. $Q = \left\{ x / x = \frac{p}{q}, con\ p, q \in Z \text{ y } q \neq 0 \right\}$

I= {x /x no tiene expansión decimal periódica}. $R = \left\{ x / x \in Q \ \text{ o } \ x \in I \right\}$, es decir, $R = Q \cup I$

Luego, $N \subset Z \subset Q \subset R$ también $I \subset R$

Figura 2: Conjunto Universo (U)



El conjunto que contiene todos los elementos que son relevantes para una discusión o en la solución de un problema particular.

U = {Formas de las ecuaciones lineales o rectas}

A = {Ecuación general}

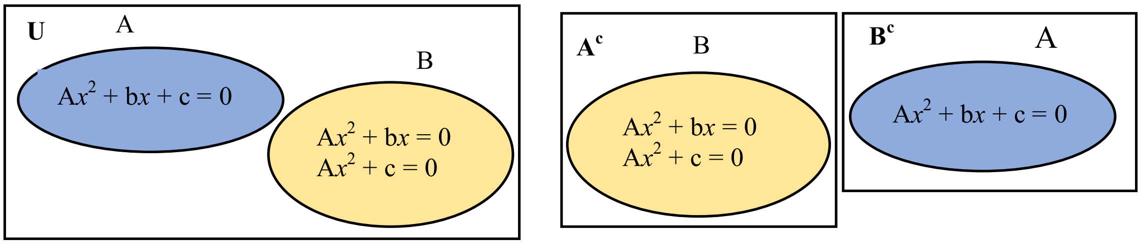
B = {Ecuación pendiente – ordenada al origen}

C = {Ecuación simétrica}

D = {Ecuación punto – pendiente}

E = {Ecuación que pasa por dos puntos}

Fligura 3: Conjunto Complemento. (A^c)



Es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A.

Notación: $A^c = \{x / x \in \mathbf{U} \text{ y } x \notin A\}$

U = {formas de las ecuaciones cuadráticas}

A = {completas}

B = {incompletas}

A^c = {incompletas}

B^c = {completas}

figura 4: SubConjuntos

Si todos los elementos de un conjunto A están contenidos en un conjunto B decimos que A es subconjunto de B o bien, A está contenido en B. En caso contrario decimos simplemente que A no es subconjunto de B o viceversa, es decir, los conjuntos son ajenos.

Dos conjuntos A y B son iguales, si tienen los mismos elementos $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$.

Notación: $A \subset B \; si \; \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

A = **N** = {conjunto de números naturales}

B = $\mathbb{Z}$ = {conjunto de números enteros}

Entonces decimos que $\mathbf{N} \subset \mathbb{Z}$

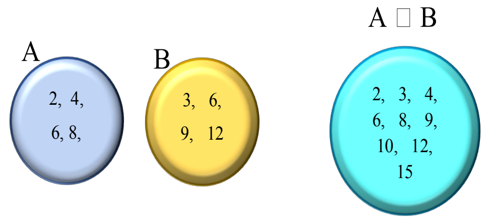
Notación: $A \not\subset B \; si \; \forall x \in A \Rightarrow x \notin B$

A = P = {conjunto de números primos}

B = C = {conjunto de números compuestos}

Entonces decimos que $P \not\subset C$

Figura 5: Unión de conjuntos



Es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B.

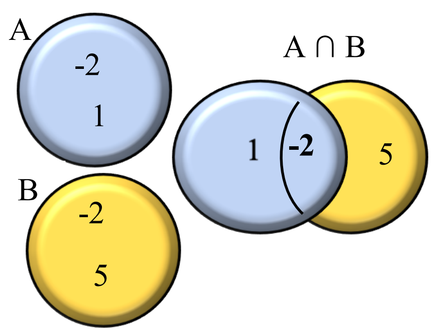
Notación: A ∪ B = {x/ x ∈ A o x ∈ B}*

* Pueden pertenecer a ambos, pero los elementos no se repiten.

A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}   B = {3, 6, 9, 12, 15}

A ∪ B = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}

figura 6: Intersección de conjuntos



Es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.

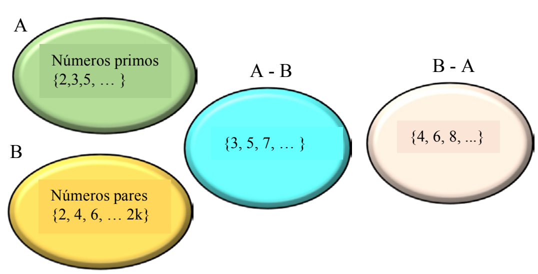
Notación: A ∩ B = {x/ x ∈ A y x ∈ B}

A = {soluciones de $x^2 + x - 2$} = {-2, 1}

B = {soluciones de $x^2 - 3x - 10$} = {-2, 5}

A ∩ B = {-2}

Figura 7: Diferencia de conjuntos



DIFERENCIA. Es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Notación: A - B = {x/ x ∈ A y x ∉ B

A = {números primos}

B = {números pares}

A - B = {4, 6, 8…2k }

Tabla 1: Relaciones y propiedades de los números reales (R).

<table>
<tr><th>Propiedad</th><th colspan="2">Suma</th><th>Producto</th></tr>
<tr><td>Asociativa</td><td colspan="2">$a + (b + c) = (a + b) + c$</td><td>$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$</td></tr>
<tr><td>Identidad</td><td colspan="2">$\exists 0 \in R \ / \ a + 0 = 0 + a = a$</td><td>$\exists 0 \in R \ / \ a \bullet 0 = 0 \bullet a = a$</td></tr>
<tr><td>Inverso</td><td colspan="2">$\exists -a \in R \ / \ a + (-a) = (-a + a) = 0$</td><td>si $b \neq 0, \exists b^{-1} \in R \ / \ b \bullet b^{-1} = b^{-1} \bullet b = 1$</td></tr>
<tr><td>Conmutativa</td><td colspan="2">$a + b = b + a$</td><td>$a \bullet b = b \bullet a$</td></tr>
<tr><td>Distributiva</td><td colspan="3">$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$</td></tr>
<tr><td>No trivialidad</td><td colspan="3">$0 \neq 1$ (las identidades son distintas)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Orden</td><td>Reflexividad</td><td colspan="2">$a \leq a$</td></tr>
<tr><td>Antisimetría</td><td colspan="2">si $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$</td></tr>
<tr><td>Transitividad</td><td colspan="2">si $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$</td></tr>
<tr><td>Orden lineal (total)</td><td colspan="2">$a \leq b$ o bien $b \leq a$
De esta propiedad se deriva la ley de tricotomía:
$a < b$ o $b < a$ o $a = b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Compatibilidad</td><td>Suma</td><td>Si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.
Se puede enunciar de forma separada
Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
$a = b \Rightarrow a + c = b + c$</td></tr>
<tr><td>Producto</td><td>Si $0 \leq a$ y $0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \bullet b$.
Se puede enunciar de forma separada
Si $0 < a$ y $0 < b \Rightarrow 0 < a \bullet b$
$0 = a$ y $0 = b \Rightarrow 0 = a \bullet b$</td></tr>
</table>

En la tabla, $\forall a, b, c \in R$ se cumplen las propiedades y se da la notación matemática.

Relaciones de operaciones: Los números del conjunto R se relacionan mediante las operaciones denominadas: suma (+) y producto (•), también denominadas adición y multiplicación. Las operaciones a + b y a • b existen en R. En distintos textos se mencionan estas relaciones como propiedad de cerradura.

Relación de orden: Los números del conjunto R se comparan mediante la relación de orden "menor o igual" (≤). La relación a ≤ b existe en R. (cerradura).

Tabla 2: Propiedades de la Igualdad.

• Reflexiva o idéntica ($x = x$)	• Simétrica (Si $x = y, \Rightarrow y = x$)	• Transitiva (Si $x = y,\ y = z, \Rightarrow x = z$)
• Uniforme: establece que la igualdad se mantiene cuando:		
Se aumenta o disminuye la misma cantidad en ambos miembros, es decir, cuando se suma o resta un número a ambos lados de la igualdad. ($x = y \Rightarrow x \pm z = y + z$).		
Se multiplica o divide por un mismo número (distinto de cero), en ambos lados de la igualdad. ($x = y \Rightarrow x \bullet z = y \bullet z$). ($x = y \Rightarrow x / z = y / z$).		
Se eleva a una potencia distinta de cero los miembros de la igualdad. ($x = y \Rightarrow x^n = y^n$)		
Se extrae la misma raíz, en ambos lados de la igualdad. ($x = y \Rightarrow x^{1/n} = y^{1/n}$).		
Tabla 2. Propiedades en las que $x,y,z \in \boldsymbol{R}$ y se da la notación matemática.		

Tabla 3: Comprender el Problema

1. Comprender el Problema	
1.1) ¿Cuál es la incógnita? 1.2) ¿Cuáles son los datos? 1.3) ¿Cuál es la condición? 1.4) ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?	1.5) ¿Es insuficiente? 1.6) ¿Es redundante? 1.7) ¿Es contradictoria?

Fuente: Alfaro (2006) *cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 1, Número 1.

Tabla 4: Concebir un Plan

2. Concebir un Plan
2.1) ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
2.2) ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
2.3) ¿Conoce un problema relacionado?
2.4) ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
2.5) ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
2.6) ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

Fuente: Alfaro (2006) *cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 1, Número 1.

Referencias

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros (1974). *"La matemática: su contenido, métodos y significado"*, Tomo I. Madrid, Alianza editorial., traducción al español de Manuel López Rodríguez.

Latorre A. (2005). *Investigación Acción: conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona, España. Grao.

Lipschutz, S. (1991). *Teoría de conjuntos y temas afines*. México: McGraw Hill

Marsden, J. & Hoffman, M. (1993). Análisis clásico elemental. U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana.

Pastrana, M. (2018). *Historia concisa de las ecuaciones*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=tN23ANdE_oc

Pastrana, M. & Ortiz, P. & Hurtado, A. (2018). Elementos de la teoría de conjuntos para resolver problemas algebraicos. Versión electrónica inédita.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas