



DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ESPACIAL EN EDADES TEMPRANAS A TRAVÉS DEL USO DE ROMPECABEZAS CON “PENTOMINÓS”

Yudi Andrea Ortiz Rocha
Cinvestav-IPNç

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Pedagógica Nacional, Ajusco

Área temática: Educación en campos disciplinares .

Línea temática: El análisis cognitivo de la construcción, comunicación y desarrollo de conocimientos disciplinares.

Tipo de ponencia: Reporte final de investigación.

Resumen:

El razonamiento espacial se considera una capacidad vital para el actuar y el pensar del ser humano, y aunque se usa en la escuela son escasas las actividades para su desarrollo (Whiteley, Sinclair y Davis, 2015). En este reporte se presentan los resultados de una propuesta que favorece el desarrollo del razonamiento espacial; en particular, se analiza una actividad en la que se arman distintas configuraciones (formas de animales de los rompecabezas) con las mismas piezas del pentominó. Para el diseño se usó la teoría de la variación. La actividad se aplicó a ocho estudiantes entre los 6 y 8 años de una escuela pública con alta marginación, en la ciudad de México. En la implementación, ellos experimentaron acciones de comprensión (a nivel cognitivo) y de transformación (a nivel corpóreo) que les permitió *comparar, superponer, rotar, trasladar, visualizar e imaginar* posiciones y ubicaciones de las piezas del pentominó para completar la tarea. Los resultados indican cómo un diseño cuidadoso de las actividades proporciona experiencias significativas que permite el desarrollo del razonamiento espacial.

Palabras clave: razonamiento espacial, variación, pentominós, edades tempranas.

Introducción

Las habilidades de razonamiento espacial son vitales para moverse y comprender el mundo en el que vivimos; los seres humanos comunicamos la posición de objetos y lugares que permite ubicarlos/ubicarnos en un espacio determinado. Una forma de lograr esta comunicación es a través de la elaboración de mapas y planos, pues estos describen, indican y representan los elementos que se encuentran en la naturaleza. A pesar de reconocer la importancia de las habilidades de razonamiento espacial, poco se ha trabajado desde la escuela para su desarrollo (Whiteley, Sinclair y Davis, 2015).

En México, en el programa de estudios de la SEP (2011), las actividades de geometría en los libros de texto gratuitos de 1er, 2do y 3er grado escolar y sus correspondientes sugerencias para el maestro, utilizados hasta el ciclo escolar 2017-2018, se enfocan en enseñar figuras tridimensionales por medio de dibujos y no se identifica claramente cómo favorece el desarrollo de, por ejemplo, procesos de visualización, cambio de dimensión y toma de perspectiva. Más bien, se da por hecho que los alumnos ya lo tienen y pueden usarlos. En otros países, Watson, Jones y Pratt (2013) en su revisión de algunos libros de texto, encontraron que las actividades propuestas son variables y se centran en aspectos declarativos como los nombres, propiedades de las figuras y el formato que encamina a desarrollar ejercicios presentes en pruebas estandarizadas (e.g. PISA), lo que puede generar pocas experiencias en los estudiantes que ayuden a su desarrollo cognitivo.

Desde la investigación también se refleja poco interés en abordar en esta línea. En una revisión que realizamos en 12 revistas de investigación en educación matemática del periodo 2010-2016, identificamos pocos artículos en los que se abordan aspectos del aprendizaje y la enseñanza de la geometría (4,7%) y solo un 0,29% aborda de razonamiento espacial (Ortiz, 2018). Algunos de estos estudios describen la importancia de desarrollar habilidades de razonamiento espacial y reconocen el impacto que tiene el adquirirlas para realizar tareas cotidianas y académicas (Mamolo, Ruttenberg-Rozen, Whiteley, 2015). Otros profundizan en las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que requieren dichas habilidades (Arıcı y Aslan-Tutak, 2015); particularmente en estos estudios se han reportado dificultades de los estudiantes de niveles superiores o en profesionistas al involucrarse con actividades donde es necesario establecer relaciones entre representaciones bi- y tridimensionales.

En esta revisión se identificó también escasos estudios longitudinales, propuestas de enseñanza y/o aprendizaje enfocados en describir qué tipo de materiales y/o actividades propician espacios en los que se desarrollen habilidades de razonamiento espacial. En particular hay una carencia de propuestas didácticas que propicien el desarrollo del razonamiento espacial desde los primeros grados escolares. Entonces resulta pertinente preguntarse, desde lo escolar en edades tempranas, ¿cómo y con qué tipo de actividades o tareas favorecer el desarrollo del razonamiento espacial? Respondiendo a esta ausencia, en el marco de una tesis de la Maestría en Desarrollo Educativo, Línea Educación Matemática (UPN, Ajusco), diseñamos una secuencia de actividades cuyo objetivo es generar oportunidades y experiencias de aprendizaje a estudiantes entre los 6 y 8 años para desarrollar habilidades de razonamiento espacial, específicamente al involucrarse con tareas que requieren interpretación de representaciones bi- y tridimensionales (Ortiz, 2018).

En este reporte presentamos la primera actividad de la secuencia la cual se centra en el trabajo con representaciones bidimensionales y describimos acciones de los estudiantes que dan cuenta del desarrollo de habilidades de razonamiento espacial.

Perspectiva teórica

Comprensión y transformación: elementos conceptuales necesarios para el desarrollo del razonamiento espacial en este estudio

En la investigación hay variadas formas de nombrar y definir razonamiento espacial. Algunos autores lo nombran pensamiento (Kinach, como se citó en Bruce y Hawes, 2015), relación (Sinclair, et al., 2016) o conocimiento espacial (Soury-Lavergne y Maschietto, 2015). En cuanto a su definición, Hallowell, Okamoto, Romo y La Joy (2015) mencionan que el razonamiento espacial es la capacidad de visualizar transformaciones de coordenadas espaciales de un objeto la cual puede ocurrir en el propio objeto o en relación con un marco de referencia; por su parte, Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley (2015) refieren al razonamiento espacial como una habilidad esencial para el funcionamiento en el mundo moderno.

A pesar de la diversidad para definir y referirse al razonamiento espacial, las distintas aproximaciones coinciden en que este razonamiento desarrolla procesos, habilidades y capacidades cognitivas esenciales para desenvolverse en el actual siglo y en las que la manipulación mental de representaciones bi- y tridimensionales son vitales.

Particularmente para este estudio, razonamiento espacial es considerado un sistema en el que interactúan diferentes elementos que le permiten al sujeto comprender (a nivel cognitivo) y transformar (a nivel corpóreo) el espacio donde vive o desarrolla una tarea (Davis y Spatial Reasoning Study Group, 2015). La perspectiva de sistema permite representar interacciones, movimiento y yuxtaposición entre acciones, elementos y competencias emergentes (véase Figura 1). En el diagrama se identifican tres subsistemas: exterior, intermedio e interior.

Figura 1: Representación del razonamiento espacial como sistema. (Fuente: Davis y el SRSG, 2015, p. 141).



En el nivel exterior están los elementos de *comprender* (cognitivo) y *transformar* (físico). En el intermedio se encuentran seis elementos, *sentir*, *interpretar*, *(de) construir*, *alterar (modificar)*, *mover* y *situar*, (los cuales se describirán más adelante), y grupos de acciones que se definen de acuerdo con el elemento al cual pertenecen. Este subsistema tiene dos secciones, el de la derecha, con un tono más oscuro, que determina los elementos que dan cuenta de transformaciones, y el de la izquierda, con un tono más claro, que determina los elementos que involucran la comprensión. En el subsistema interior se encuentran tres competencias emergentes, *proyección*, *diseño*, y *elaboración de mapas*. Estas competencias no son estáticas, están en movimiento circular continuo lo que significa que pueden corresponderse con cualquier otro grupo de elementos de los subsistemas intermedio y externo.

Esta lista de acciones que caracterizan al razonamiento espacial no es exhaustiva, sin embargo, son nuestro punto de partida y referente en la construcción de actividades y su análisis.

Teoría de la variación como fundamento teórico-metodológico de la propuesta

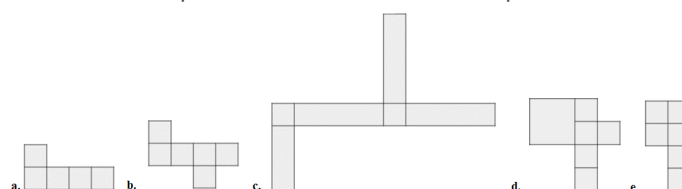
La teoría de *variación* está focalizada en el aprendizaje. Aprender es un cambio en la forma en que algo se ve, experimenta o entiende (Runesson, 2005); cada aprendiz experimenta de manera distinta. En otras palabras, el aprendizaje sucede cuando el aprendiz *discierne* características y aspectos de algún *objeto de aprendizaje* (Runesson, 2005).

Por ejemplo, si el objeto de aprendizaje está centrado en el cubo, en actividades de enseñanza propuestas se deberá proporcionar experiencias con objetos que representen o no a un cubo, lo que implica compararlo y diferenciarlo de otros objetos tridimensionales como esferas, prismas no cubos, pirámides en las cuales las caras pueden variar en color, tamaño o forma.

El objeto de aprendizaje en esta teoría es “una idea perspicaz (*insight*), una habilidad o una capacidad específica que se espera que los estudiantes desarrollen” (Marton y Pang, 2006, p. 194). El *discernimiento* sucede al experimentar una diferencia entre dos cosas o entre dos partes de la misma cosa (Marton y Pang, 2006) y se logra al identificar *características* y *aspectos críticos* de algún objeto de aprendizaje. Lo (2012) define los *aspectos críticos* como una dimensión de variación y las *características críticas* como un valor de esa dimensión de variación.

Para ilustrar estas ideas teóricas retomaremos el ejemplo del cubo. Un objetivo de aprendizaje podría enfocarse en que los estudiantes reconozcan el número y forma de las caras del cubo. Una actividad posible sería *identificar aquellos desarrollos planos con los que se forma un cubo* (ver Figura 2).

Figura 2: Uso de la teoría de la variación para reconocer desarrollos planos de un cubo.



En el reconocimiento del cubo es posible que el estudiante identifique (discierna) las siguientes *características críticas*: cada cara del cubo es un cuadrado (Figura 2b y 2c) y para que sea cubo debe estar formado por seis caras (Figura 2a y 2b) iguales (Figura 2b y 2d). Las relaciones espaciales entre las caras es otra característica (ver Figura 2b y 2e). En esta teoría se puede afirmar que un estudiante discierne las *características críticas* si simultáneamente discierne sus *aspectos críticos* tales como cantidad, tamaño y forma.

Metodología

En esta investigación se utilizó un experimento de enseñanza enmarcado en el paradigma investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). Un experimento de enseñanza implica el diseño, implementación y análisis cíclico de una secuencia de actividades (Steffe y Thompson, 2000). Para este estudio se realizaron dos ciclos, en el primero se diseñó, implementó y **analizó** la secuencia. Con los resultados de esta primera implementación se identificaron aspectos a mejorar como el diseño de una nueva actividad, el tipo de intervenciones de la maestra-investigadora y la organización para el trabajo colaborativo. En el segundo ciclo se implementó la nueva secuencia. Dado este carácter cíclico de la secuencia se logró mejorar y refinar la propuesta de enseñanza (Cobb y Gravemeijer, 2008).

En la implementación participaron estudiantes entre los seis y ocho años y la primera autora de este reporte fungió como la maestra-investigadora. En el primer ciclo participaron 8 estudiantes y en el segundo, 26 (un grupo completo de tercer grado). Para la toma de datos se utilizaron dos videocámaras y notas de campo de lo sucedido en cada sesión. Estos registros se usaron para preparar la siguiente sesión, así como para el análisis retrospectivo de todo el experimento.

El diseño de las actividades se realizó bajo parámetros de la teoría de la variación (Lo, 2012; Orgill, 2012; Runesson 2005). La secuencia constó de una prueba diagnóstica/inicial – final, cinco actividades con diferentes materiales y un proyecto final. En este reporte se mostrará el diseño y resultados obtenidos en la primera actividad del primer ciclo.

Diseño de las actividades

En nuestra propuesta, los *aspectos* y *características críticas* describen los elementos del razonamiento espacial que se espera desarrollar en los estudiantes y cambian según la actividad, material utilizado o sesión de clase. Para que el estudiante *discierna* y adquiera conocimiento en relación con los objetos de aprendizaje pretendidos, en cada sesión se precisan *variantes* e *invariantes* de dicho objeto de aprendizaje. A continuación se describen los elementos de la teoría de la variación involucrados en la primera actividad.

Movimientos en el plano y el espacio usando pentominós

Cada pieza pentominó está formada por 5 cuadrados iguales unidos por sus lados, se obtienen 12 pentominós diferentes. El objeto de aprendizaje en esta primera actividad está enfocado en las *implicaciones de los movimientos isométricos en el plano y el espacio* al usar pentominós. Para su implementación se requiere del uso de *diferentes* configuraciones (*variantes*) que son armados con las *mismas* piezas (*invariantes*) de pentominó. Esto supone el reconocimiento de que las distintas configuraciones tienen la misma área, pero diferente forma y perímetro.

Esta actividad se dividió en dos momentos. En el primero se proporciona a los estudiantes 12 piezas de pentominó y la silueta/plantilla/marco rectangular de ; las piezas deben ensamblarse sobre dicha silueta sin superponer ni dejar espacios vacíos entre ellas. En el segundo momento, los estudiantes deben armar configuraciones de animales con diferente grado de dificultad, esta graduación corresponde a la información dada respecto a la organización de las piezas (Figura 3). Al inicio la plantilla/marco tiene siete divisiones y a medida que el estudiante completa el rompecabezas del animal asignado, se les proporciona nuevas configuraciones en las que solo ven cuatro divisiones.

Figura 3: Niveles de dificultad de las configuraciones.



En esta actividad los *aspectos críticos* relacionados son comparación y visualización de piezas, posición (localización) y orientación (giros y organización) de las piezas. Las *características críticas* relacionadas a cada aspecto crítico se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 1: Características críticas actividad movimientos isométricos

CARACTERÍSTICAS CRÍTICAS ACTIVIDAD MOVIMIENTOS ISOMÉTRICOS	
COMPARACIÓN Y VISUALIZACIÓN	<ul style="list-style-type: none"> • RECONOCER LA FORMA DE CADA PIEZA (F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z) • COMPARAR LAS FORMAS DE LAS PIEZAS PARA ENSAMBLARLAS. • RECONOCER EN EL DIBUJO LAS PIEZAS QUE LO COMPONEN (ESTÉN EXPLÍCITAS O IMPLÍCITAS). (IDEAS DE CONGRUENCIA POR PERCEPCIÓN INMEDIATA Y SUPERPOSICIÓN) • IMAGINAR LO QUE REPRESENTA LA UNIÓN DE LAS PIEZAS EN LA CONFIGURACIÓN DADA. (EL TODO)
LOCALIZACIÓN	<ul style="list-style-type: none"> • UBICAR EN EL DIBUJO EL LUGAR DE CADA PIEZA. • DESCRIBIR LA POSICIÓN RELATIVA DE CADA PIEZA USANDO TÉRMINOS DE PROXIMIDAD (CERCA, LEJOS), DE DIRECCIÓN (ARRIBA, ABAJO, DERECHA, IZQUIERDA).
GIROS	<ul style="list-style-type: none"> • ROTAR PIEZAS PARA COMPLETAR UNA CONFIGURACIÓN DETERMINADA.
ORGANIZACIÓN DE PIEZAS	<ul style="list-style-type: none"> • ORGANIZAR LAS PIEZAS PARA LOGRAR EL ENSAMBLE SOLICITADO. • ENSAMBLAR LAS PIEZAS QUE CONFORMAN UNA SECCIÓN.

Descripción de resultados

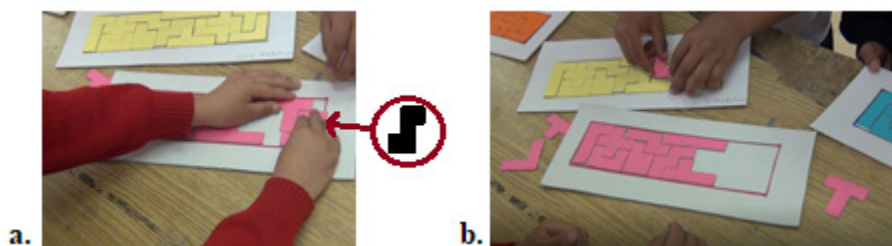
El uso del pentominós para el trabajo de movimientos isométricos en el plano y en el espacio se realizó en tres sesiones, cada una con duración aproximada de una hora. Durante la implementación se identificaron acciones que dan cuenta de evolución de los estudiantes en su razonamiento espacial al hacer o predecir movimientos isométricos en el plano (trabajo con representaciones 2D) para completar la configuración dada. Los estudiantes, a partir de la rotación, la traslación y en algunos casos la reflexión de las piezas, logran los ensambles solicitados. Además, reconocen diferencias en las formas de las configuraciones, así como en la ubicación, orientación y sentido, a pesar de que las piezas usadas eran las mismas.

A continuación ejemplificamos, con dos episodios, acciones de los estudiantes que dan evidencia de desarrollo de su razonamiento espacial.

Episodio 1. Uso del movimiento para reflejar posición y orientación de una pieza

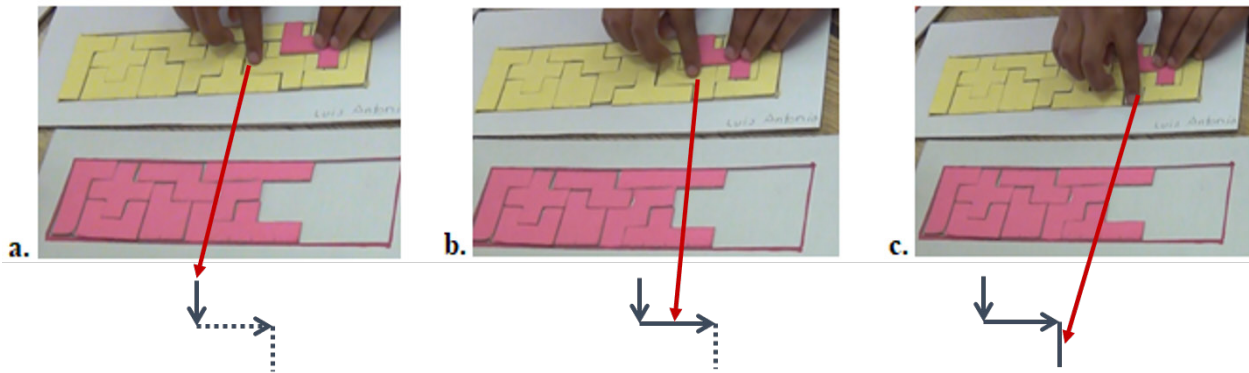
En la primera sesión de esta actividad cada estudiante armó un rectángulo. Este trabajo les permitió además de familiarizarse con el material, reconocer la forma de las piezas, encajarlas por ensayo y error y comparar sus formas para ensamblarlas. Una de las estudiantes, identificada como est1 en este reporte, presentaba dificultades en el armado del rompecabezas por lo que uno de sus compañeros, est2, decidió ayudarla colocando frente a ella, en la misma orientación, su rompecabezas armado. Est1 ubicó la mayoría de las piezas del pentominó en el marco rectangular, pero tuvo dificultad en ubicar una de las piezas (ver Figura 4a).

Figura 4: Ejemplo de trabajo de los estudiantes.



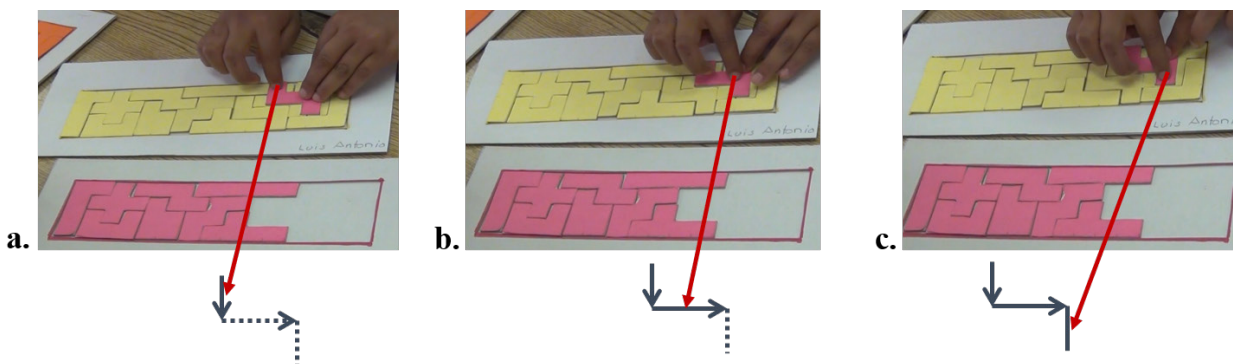
Est2 para ayudarla, traslada la pieza que est1 tenía dificultad en ubicar y la posiciona sobre la pieza correspondiente de su pentominó (ver Figura 4b). Luego, est2 traslada a su izquierda la pieza de est1 buscando visualizar y comparar las piezas a fin de que conservaran invariante tanto la forma como la orientación (ver Figura 5a).

Figura 5: Movimiento sobre pieza de pentominó del est2.



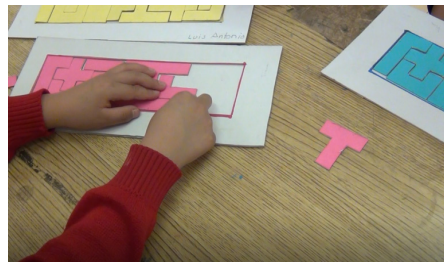
Con el dedo índice de su mano derecha est2 trazó la forma de la pieza de su pentominó (ver Figura 5); seguida a esta acción, realizó el mismo movimiento sobre la pieza de est1 (ver Figura 6).

Figura 6: Movimiento sobre pieza de pentominó del est1.



Finalmente est2 le entregó a est1 la pieza de pentominó sin cambiarla de orientación y est1, gracias al trabajo realizado por est2, logró ubicarla adecuadamente (ver Figura 7).

Figura 7: Ubicación correcta de pieza de pentominó.



Con el objetivo de mostrar a su compañera la orientación, posición y congruencia de la pieza de pentominó est2 utilizó dos estrategias. La primera consistió en *superponer* las piezas correspondientes de pentominó y la segunda, en *trasladar* la pieza y trazar con sus dedos la forma de las piezas iguales. Intuimos que

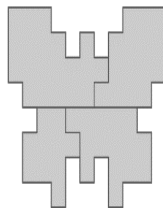
la estrategia de superposición fue un recurso que est2 usó para hacer explícita la *congruencia* entre las piezas. Sin embargo, cabe mencionar que est1 no evidenció dificultad en la identificación de congruencia entre las piezas (ver Figura 4a), quizá est2 lo notó y por tanto dedicó más tiempo a explicarle la orientación y posición de la pieza. Ubicar las piezas de los dos pentominós y colocarlas en la misma orientación y hacer el mismo movimiento sobre ellas, le permitió a est2 *comparar* y enfocar la atención de est1 en que ambas tenían la misma orientación. En este episodio se evidencia la importancia de desarrollar en los estudiantes el uso de un lenguaje verbal y no verbal para comunicar ubicación y posición de objetos. Esta habilidad es fundamental para el desenvolvimiento de los individuos en la escuela y en el cotidiano.

Episodio 2. Comparación y composición con pentominós para armar rompecabezas

En la segunda y tercera sesión de esta actividad cada estudiante armó, al menos, dos configuraciones diferentes. En esta actividad, a partir de la variación de rompecabezas, posiciones y orientaciones de las piezas y de la invariancia en el número y forma de las piezas, los estudiantes lograron *rotar* y *trasladar* las piezas del pentominó, *corresponder* uno a uno las piezas dadas con la forma identificada en el dibujo/plantilla/silueta/marco, *comparar* los espacios faltantes con las piezas sin usar y *visualizar e imaginar* su composición. En este segundo episodio, a modo de ejemplo, se presenta un momento de la tercera sesión de esta actividad en la que un estudiante (est3) logra armar la configuración dada; sus acciones dan cuenta del desarrollo de su razonamiento espacial.

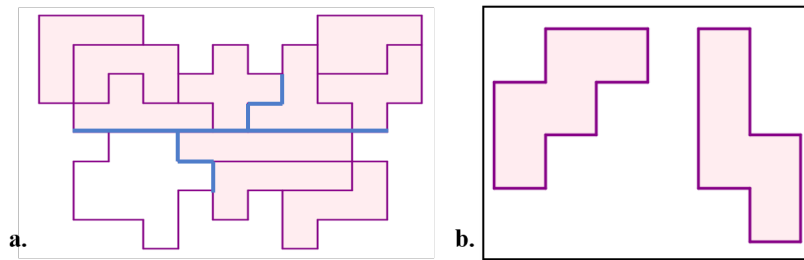
El est3 debía armar el rompecabezas que se muestra en la siguiente figura:

Figura 8: La mariposa: forma de mayor complejidad, solo 4 divisiones.



Est3 armó este rompecabezas por secciones, cada sección la delimita las divisiones dadas. Luego de construir tres de sus secciones (ver Figura 9a), tenía a su disposición dos piezas (ver Figura 9b) para armar la sección faltante (ver espacio en blanco de la Figura 9a).

Figura 9: Representación de piezas y espacios faltantes por cubrir el rompecabezas.



El estudiante tomó la pieza que se observa en la izquierda de la Figura 9b y la ubicó en el espacio en blanco (ver Figura 10a). Luego nota que el espacio faltante (ver Figura 10b) tiene la forma de una pieza ya ubicada en una de las secciones del rompecabezas (ver pieza sombreada en la parte inferior izquierda de la Figura 10c).

Figura 10: Identificación de forma de pieza de pentominó.



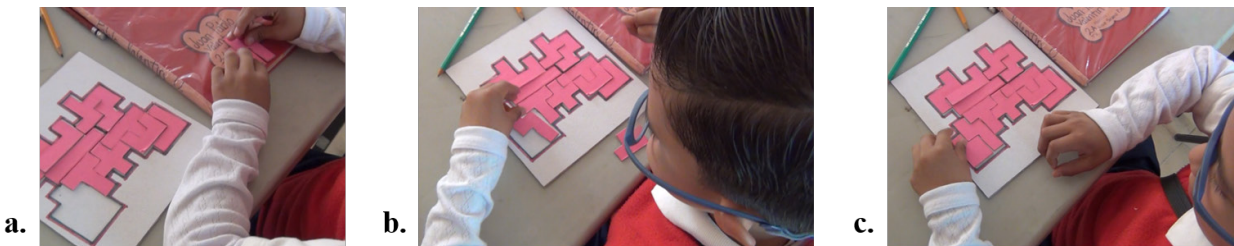
El estudiante toma la pieza ya utilizada, la traslada y rota para completar la parte faltante de la última sección que está armando (ver Figura 11a-11b).

Figura 11: Comparación entre piezas y espacios faltantes.



Para completar el espacio faltante (ver espacio en blanco en Figura 11c) el estudiante toma una de las piezas (ver pieza sombreada en la parte inferior izquierda de la Figura 11c) de esa sección y la une con la pieza que tenía a su disposición (ver pieza de la derecha en Figura 9b) a un lado del rompecabezas (ver Figura 12a). Luego, compara el espacio faltante por armar con la forma obtenida al unir estas dos piezas y al notar que son congruentes las ubica logrando así el armado completo del rompecabezas (ver Figura 12c).

Figura 12: Comparación de espacios y forma de piezas para el armado del pentominó.



El estudiante inicialmente *compara* los espacios faltantes con las piezas que aún no ha utilizado y ubica la pieza en uno de los espacios faltantes. *Reconoce* que la pieza faltante tiene una figura que es congruente a una de las piezas ya colocadas en otra de las secciones. Toma esta pieza, la *traslada, rota* y ubica en el espacio faltante. Finalmente, toma las dos piezas, las une fuera del rompecabezas y *compara* la figura que se obtiene de esta unión con el espacio faltante en el rompecabezas; en esta última acción el estudiante logra realizar una subconfiguración (figura contenida en otra) y *visualizar* la congruencia de formas (el todo) obtenida al unir dos piezas de pentominó (las partes).

Reflexiones finales

El diseño de la secuencia de actividades tuvo como desafío proporcionar a los estudiantes experiencias que les permitiera el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial. El uso de la teoría de la variación facilitó que los estudiantes, a partir del trabajo con los variantes e invariantes de cada actividad, discernieran aspectos críticos como comparar, visualizar, localizar, girar y organizar las piezas.

El trabajo de movimientos isométricos en el plano y el espacio usando pentominós permitió a los estudiantes realizar simultáneamente acciones *cognitivas* y de *movimiento*. En el primer episodio, la estrategia del estudiante de comunicar la correcta posición de la pieza en el rompecabezas por medio del *movimiento de sus dedos* refleja su *comprensión* en relación con la congruencia y la correspondencia de orientación entre las piezas de pentominó. En el segundo episodio, el estudiante *ubica* las piezas en las secciones faltantes por armar de manera consciente, pues *compara* y *visualiza* las piezas que tiene a su disposición con los espacios no correspondidos.

La variación de la cantidad de divisiones en los rompecabezas fue un elemento importante en el diseño de secuencia, pues graduó su nivel de dificultad. El rompecabezas con más divisiones contenía secciones congruentes con algunas piezas de pentominó lo que les facilitó reconocer/ visualizar la congruencia de espacios faltantes por cubrir en el rompecabezas con alguna de las piezas y agrupar piezas para ubicarlas en las demás secciones. El rompecabezas con menos divisiones, como el armado por est3, no permitía directamente identificar la posición de alguna pieza, por lo que el estudiante debía imaginar y anticipar el resultado de unir piezas en una configuración dada, agruparlas por la congruencia de su composición con alguna sección y ensamblarlas para ubicarlas sobre el rompecabezas.

La articulación entre la teoría de la variación, la aproximación de razonamiento espacial y el material manipulable para el diseño de las actividades deja ver que es factible plantear tareas que desarrollen el razonamiento espacial vital para desenvolverse en el mundo actual con necesidad particulares. Estas actividades, a diferencia de lo reportado por Watson, Jones y Pratt (2013), no se centran en que el estudiante reconozca los nombres y propiedades de las figuras, sino que tiene por objetivo que se enfrente, por ejemplo, a la solución del armado de un rompecabezas el cual le exige poner en juego capacidades mentales y físicas.

Referencias

- Arici, S., y Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 179-200.
- Bruce, C. D. y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM*, 47(3), 331-343.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Davis, B., y Spatial Reasoning Study Group. (2015). *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations*. Routledge.
- Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F. y La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM*, 47(3), 363-375.
- Lo, M. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Mamolo, A., Ruttenberg-Rozen, R. y Whiteley, W. (2015). Developing a network of and for geometric reasoning. *ZDM*, 47(3), 483-496.
- Marton, F. y Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 15(2), 193-220.
- Ortiz, A. (2018). Desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas: Una propuesta didáctica para la exploración de representaciones 2D y 3D. Tesis de maestría. México: Ciudad de México, Universidad Pedagógica Nacional.
- Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge journal of education*, 35(1), 69-87.
- Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691-719.
- Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, pp. 267-306. Mahwah: NJ: LAE.
- Soury-Lavergne, S., y Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, 47(3), 435-449.
- Whiteley, W., Sinclair, N. y Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? En *Spatial Reasoning in the Early Years* (pp. 13-24). Routledge.
- Watson, A., Jones, K. y Pratt, D. (2013). Spatial and geometrical reasoning. En A. Watson, K. Jones, y D. Pratt, *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based guidance for ages 9-19* (pp. 92-104). Oxford: OUP Oxford.