



CONCEPTUALIZACIÓN, REPRESENTACIÓN Y COMUNICACIÓN EN EL DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EN NIÑOS DEL ÚLTIMO CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Fernando Bernal Acevedo
Esc. Normal Rural "Justo Sierra Méndez"

Claudia Inzurriaga Martell
Esc. Normal Rural "Justo Sierra Méndez"

Área temática: Educación en campos disciplinares.

Línea temática: El análisis cognitivo de la construcción, comunicación y desarrollo de conocimientos disciplinares.

Tipo de ponencia: Reporte de investigación parcial.

Resumen:

El presente trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio que tiene como objetivo principal determinar las condiciones didácticas que permiten favorecer el desarrollo del conocimiento geométrico en niños que asisten al último ciclo de la educación primaria. En este reporte se analiza el papel que juegan, dentro de una situación didáctica, los registros de representación y los procesos de comunicación en la construcción del conocimiento referido a esta disciplina. Se planteó a un grupo de niños que se encuentran cursando el 5º grado de educación primaria en una escuela pública, una situación didáctica que les demandaba estructurar un mensaje comprensible dirigido a un proveedor de materiales de decoración y que implicaba establecer una relación de congruencia entre las figuras geométricas (cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo) correspondientes a las diferentes áreas representadas en el plano de un inmueble y aquellas figuras que representaban el material necesario para cubrir con exactitud el piso de dichas áreas. El análisis de los resultados de la situación didáctica, muestra el potencial didáctico que conlleva una situación que demande a los niños establecer conceptualizaciones precisas sobre las figuras y la necesidad de construir mensajes explícitos que puedan ser interpretados con exactitud. La situación favorece el pasaje de conceptualizaciones que consideran propiedades derivadas de la percepción visual a aquellas de carácter más abstracto y susceptibles de generalización.

Palabras clave: Geometría, didáctica, representación, comunicación

Introducción

En este trabajo abordamos el problema de cómo generar condiciones didácticas óptimas que permitan a los niños del nivel de educación primaria apropiarse del conocimiento geométrico. De manera específica, tratamos de establecer el papel que juegan habilidades de comunicación como la descripción, la explicación y la argumentación en la comprensión de los objetos vinculados a esta disciplina.

La geometría ha formado parte del conocimiento matemático desde la antigüedad y en su origen, estuvo orientada a la resolución de problemas prácticos de la vida cotidiana en los que era necesaria la medida y la estructuración del espacio, sin embargo, hoy en día constituye un cuerpo complejo de conceptos y entidades ideales o abstractas establecido principalmente por la vía de la deducción (Fischbein, 1993; Godino & Ruiz, 2002). Por ello, el problema de cómo enseñar o transmitir este conocimiento de una manera eficiente a las nuevas generaciones ha generado siempre múltiples discusiones y debates. En algunos casos se han privilegiado los aspectos instrumentales y prácticos relacionados con las propiedades y relaciones geométricas derivadas de la visualización más directa y en otros, se le ha dado mayor importancia a las actividades que favorecen procesos de reflexión de carácter más formal y abstracto.

A pesar de la vigencia de estas discusiones en el campo de la enseñanza, la relevancia que tiene el pensamiento geométrico en la construcción del conocimiento matemático no ha sido siempre reconocida en los programas de estudio oficiales del nivel básico, al menos para el caso de México, y menos aún en las prácticas habituales dentro de los salones de clase que en muchas ocasiones reducen, reiteran y postergan los contenidos de esta disciplina (Bressan, Bogisic & Crego, 2000; García & López, 2008).

En los años recientes, se han desarrollado diversas rutas de investigación y de reflexión teórica en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del conocimiento geométrico. Se ha analizado, por ejemplo, el papel que juega la actividad demostrativa en un sistema de interacciones al interior de comunidades de aprendizaje (Camargo, Samper & Perry, 2018), los procesos cognitivos y del lenguaje que están implicados en la construcción de conocimiento en este dominio (Duval, 2005) así como la especificidad y la importancia didáctica del campo de la geometría en la construcción del pensamiento matemático de carácter más general (Brousseau, 2000)

En nuestro caso, y como lo hemos señalado, nuestra inquietud de investigación gira en torno al papel que juegan los procesos de comunicación en la apropiación del conocimiento geométrico. En este trabajo en particular nos planteamos la siguiente interrogante: ¿Cómo puede favorecer el desarrollo del conocimiento geométrico estructurar situaciones didácticas que impliquen el reto de comunicar propiedades y relaciones de los objetos vinculados a esta disciplina?

Desarrollo

La relación entre los objetos geométricos y las posibilidades cognitivas de los alumnos ha sido analizada por diversos autores (Duval, 2005; Kuzniak, 2011). Kuzniak, por ejemplo, ha propuesto la noción de “espacio de trabajo geométrico (ETG)”, en tanto ambiente organizado que permite la resolución de problemas y en el que se pone en relación la naturaleza epistemológica particular de los objetos geométricos con las posibilidades cognitivas que los sujetos disponen para su apropiación (2011). Aunque se ha señalado que los niveles de mayor abstracción son accesibles sólo hasta los niveles superiores de escolaridad, dada la carga de razonamiento deductivo que implican, es claro que el proceso constructivo debe partir del análisis de objetos cercanos a la realidad para acceder poco a poco a razonamientos de carácter más general y abstracto.

Dentro de las perspectivas que analizan el papel del lenguaje y de otros registros de representación en el desarrollo y comunicación del conocimiento geométrico, un referente fundamental lo constituyen, sin duda, los trabajos de Duval (2004, 2005). Para este autor, la adquisición del conocimiento geométrico implica la articulación a nivel cognitivo de dos registros de representación diferentes: la visualización de formas para representar el espacio, por un lado y el lenguaje para enunciar propiedades y deducir nuevas relaciones, por el otro. La utilización de estos dos registros por parte de los sujetos, implica, en opinión del autor, un funcionamiento cognitivo diferente y más complejo que aquel que interviene cuando estos registros son puestos en práctica en dominios fuera de la geometría. En razón de ello, resulta esencial como objetivo de enseñanza, favorecer su desarrollo y coordinación. Se trata, en palabras del autor, de crear las condiciones necesarias para “aprender a aprender” en geometría.

Ha sido a partir de la perspectiva semiótica propuesta por este autor que hemos podido tomar conciencia de la demanda cognitiva que implica para los alumnos estructurar y comunicar de manera precisa conceptos y propiedades vinculadas a los objetos geométricos que son materia de estudio dentro de la educación del nivel básico.

El objetivo del presente trabajo es, entonces, determinar, a partir de situaciones didácticas específicas, cómo pueden favorecer los procesos de conceptualización y comunicación, el desarrollo del conocimiento geométrico en niños que se encuentran cursando el último ciclo del nivel de educación primaria.

Nuestro supuesto fundamental es que las reflexiones puestas en práctica por parte de los niños a partir de una situación que les demande ser explícitos en un proceso de comunicación relativo a las propiedades de un objeto geométrico, deben propiciar el acceso a niveles más abstractos de pensamiento y por ende a un desarrollo pleno del conocimiento relativo a este campo.

Desde el punto de vista metodológico, nuestro trabajo sigue los principios fundamentales de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995) que supone el diseño, la puesta en práctica y el análisis de situaciones didácticas específicas, para determinar, en este caso, las condiciones didácticas que favorezcan la construcción del conocimiento geométrico.

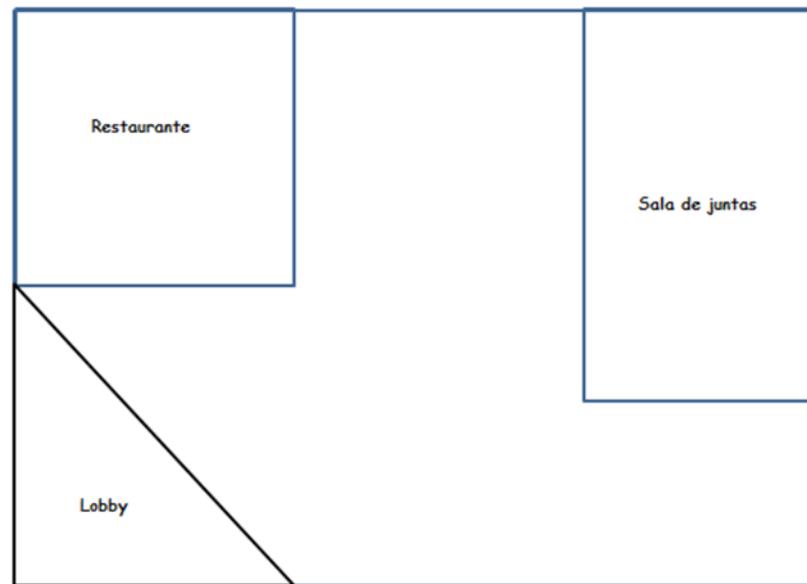
La definición de situación didáctica para el ámbito de la investigación en el contexto particular del aula y en el que se involucra un determinado saber, un alumno y un medio, ha sido establecida por Brousseau desde sus trabajos fundacionales (Brousseau, 1998). Siguiendo esta perspectiva, una situación didáctica se concibe en términos generales como un sistema de interacciones en las cuales el alumno encara el problema que la ha sido propuesto por el docente y que le va permitir avanzar en la construcción de un conocimiento (Brousseau, 2007)

La situación didáctica que aquí se reporta fue dividida en dos sesiones de trabajo y se planteó a partir del contexto de una situación que demandaba, en primer lugar, la exploración de un plano con figuras geométricas para la construcción de un mensaje en el que se describen las propiedades y relaciones de esas figuras con la finalidad de que una persona a la distancia pueda reconstituirlas. Posteriormente, la situación implicaba la elaboración de un segundo mensaje en el que se describían las razones por las que algunas opciones de figuras reconstituídas por dicha persona no resultaron congruentes con las observadas en el plano.

El contexto de la situación se creó a partir de un escenario según el cual se lleva a cabo un trabajo de restauración y decoración de un inmueble. Se les comentó a los niños que en un hotel había que hacer algunos trabajos de alfombrado, por lo que era necesario ayudar con estos trabajos al diseñador. Antes de colocar la alfombra usualmente es necesario colocar primero una base de hule espuma. En el plano que se presentó a los alumnos, algunas de las áreas del hotel se representaron con figuras geométricas como un cuadrado, un rectángulo y un triángulo rectángulo. Consideramos la inclusión de estas figuras en particular porque anticipamos que los estudiantes deben tener ya un conocimiento acerca de sus propiedades y características y muy posiblemente han elaborado reflexiones y acciones sobre dichas figuras.

Después de haber presentado el plano a los estudiantes, se les solicitó que lo exploraran y realizaran las tareas que creyeran necesarias, para después solicitar por escrito a un proveedor, en un formato de correo electrónico, una figura de hule espuma, exactamente igual a cada una de las figuras trazadas en el plano. La elección de un material semitransparente para la construcción de las figuras obedeció al interés de observar con más claridad el tipo de acciones que los niños podrían realizar poniendo en relación las figuras recortadas y aquellas presentes en el plano.

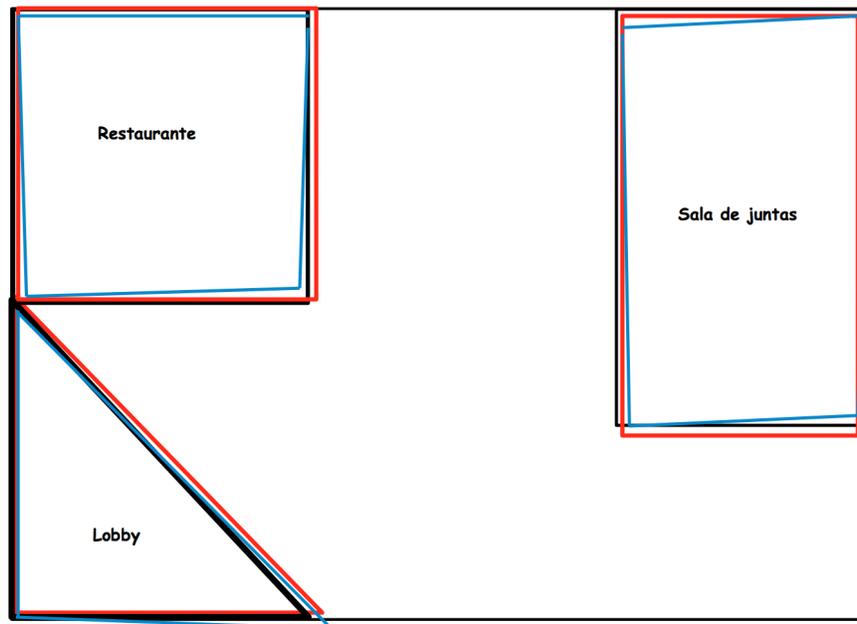
Figura 1: Plano utilizado dentro de la situación didáctica.



En la segunda sesión se les comentó a los alumnos que el proveedor había tenido dificultad para comprender cómo eran las figuras de hule espuma solicitadas para plano del hotel. Por eso, les envió tres figuras diferentes de cada una de las áreas en las que se colocaría hule espuma y les solicitó regresar las figuras que no se fueran a utilizar, pero cada una con una explicación de por qué no resultaron apropiadas. Para esta tarea, se proporcionó a los estudiantes tres figuras visualmente semejantes a cada una de las figuras trazadas sobre el plano, pero sólo una de ellas resultaba congruente con la figura correspondiente. La decisión de que las variaciones en las figuras que no resultaban congruentes fueran mínimas se tomó para inducir a los niños a analizar y explorar las propiedades de estos objetos geométricos con mayor detenimiento y que no se concretaran a resolver la tarea de manera visual inmediata.

En ambas partes de la situación se puso al alcance de los estudiantes el plano del hotel para cada equipo, un juego de geometría, las figuras de hoja vegetal que representaban el hule espuma y las tarjetas en las que los estudiantes comunicaron por escrito lo solicitado en cada sesión. Las sesiones fueron video grabadas y a partir de ellas se elaboraron registros detallados de las interacciones que, junto con las producciones escritas, constituyeron el material fundamental para el análisis de los datos.

Figura 2: Figuras alternativas propuestas para la situación didáctica.



Como podemos ver, en el diseño de la situación didáctica buscamos un parámetro de dificultad equivalente al que podría encontrar un sujeto en una situación de la realidad cotidiana. La situación implica, además, la recuperación de conocimientos previos, esto es, la disponibilidad de ciertos constructos geométricos que pueden ser puestos en práctica por los niños para tratar de dar solución al problema presentado.

En el desarrollo de la actividad y el registro de las interacciones podemos ver, en primer lugar, que los niños aceptan el reto que plantea la situación movilizándolo sus conocimientos previos acerca de las figuras y las propiedades y relaciones que las definen. Las aportaciones que se producen dentro del trabajo colaborativo les permiten ir tomando conciencia de si estos conocimientos les resultan o no suficientes para la tarea demandada. Veamos una parte de los diálogos:

Maestra: ¿Y qué le pusieron al proveedor?

Melisa: Mire, le pedimos un hule espuma para el lobby (triángulo rectángulo) y aquí le dijimos las medidas. De 16 de base (señaló uno de los catetos) por 22 de altura (señaló la hipotenusa)

Maestra: Y entonces ¿está sería la altura del triángulo? (la medida de hipotenusa)

Melisa: Sí, la altura es el lado más largo y en este triángulo es éste.

Salma: Es que los otros lados, los dos miden 16. La base y el otro lado. No puede ser la altura porque no está más largo.

Maestra: ¿Para ser la altura tiene que estar más largo?

Zuleika: Si, porque si no pues no se entiende.

Maestra: ¿Y ustedes saben cómo se mide la altura?

Fernanda: Pues es así como lo alto de alguien ¿no?

Salma: Si, o sea, cómo mide, así para arriba.

Maestra: Si, es posible que así podamos explicar la altura. ¿Y en este triángulo si están midiendo la altura?

Fernanda: Mmm no verdad. ¿O depende de donde veamos el triángulo?

Maestra: ¿Cómo sería eso Fernanda?

Fernanda: Si, por ejemplo, si volteamos el triángulo... oh no, ese lado nunca sería así como lo alto.

Salma: Pero es el más largo.

Zuleika: Entonces, ¿podría ser la altura, aunque no fuera el más largo?

Fernanda: mmm... pero es que mide igual que la base.

Salma: Bueno, hay que cambiarlo y ponemos este lado como altura, aunque mida lo mismo.

En las proposiciones que plantean los niños para la figura del triángulo rectángulo es posible apreciar como algunas de ellas están basadas en la representación gráfica que les parece más habitual. Las dificultades surgen cuando se cambia la orientación de la figura. Como se ha señalado, muchas prácticas de enseñanza limitan el desarrollo de la conceptualización de los niños sobre las figuras geométricas al realizarse frecuentemente a partir de representaciones estereotipadas (Moriena & Scaglia, 2005),

En estos intercambios podemos observar también que los niños trabajan inicialmente bajo una suposición intuitiva de que basta explicitar solamente algunas características o propiedades de las figuras para que estas puedan ser reconstituídas a la distancia de una manera inequívoca. En muchas situaciones cotidianas escuchamos frecuentemente expresiones en las que se realizan solicitudes de materiales con formas geométricas de manera sintética, obviando o dando por sentado que se conocen las otras propiedades y relaciones de las figuras: “un piso de 40 x 40, un vidrio de 50 por 60”, etc. Al hacer frente a la tarea de escritura del mensaje, aparece con claridad en las respuestas de los niños, la insuficiencia de una consideración de esta naturaleza. Veamos el ejemplo:

Gael: Oigan, ¿Cómo le vamos a poner? (al mensaje de correo dirigido al proveedor)

Nery: Hay que medir todos los lados y le ponemos que nos mande por ejemplo... (midió el cuadrado) un hule espuma de 15 x 15.

Justin: Pero ¿cómo va a saber que figura es?

Nery: Ah, sí. Pues le ponemos una de 15 x 15 que sea en forma de cuadro.

Agustín: Bueno sí, esa es la más fácil pero el triángulo ¿cómo le decimos?

Justin: El Triángulo mide... (midió uno de los catetos del triángulo rectángulo y después hizo lo mismo con la hipotenusa) 16 x 22.5

Maestra: Oh, muy bien y el proveedor con esas medidas del triángulo ¿ya podría enviarles el material?

Nery: No, no, falta el otro lado del triángulo, si no se va a confundir.

Agustín: pues sí, pero de todos modos con dos lados se saca el otro.

Maestra: A ver Agustín ¿cómo es eso?

Agustín: Sí, mire maestra. si este lado mide 16 (uno de los catetos del triángulo), y éste mide 22.5 (señaló la hipotenusa), el proveedor puede medir eso y cortar el hule y ya, el otro lado, aunque no le digamos cuanto mide al cortarlo va a medir lo que éste (el otro cateto) mide.

Maestra: ¿No podría cambiar esa medida sin cambiar la de los lados que tú me indicas?

Agustín: No, por qué si un lado se hace más largo también el otro tiene que hacerse para que alcancen a juntarse.

Maestra: Oh, bueno. Entonces, ¿así dejarán sólo la medida de dos lados del triángulo?

Justin: Si, mejor vamos a poner ya las del otro.

La discusión dentro del equipo permite observar esta discrepancia entre los puntos de vista de quienes consideran que la información plasmada en el mensaje es suficiente y aquellos que sostienen que es necesario que el mensaje sea más explícito. Asumir que es suficiente indicar en el mensaje que una figura mide 15 x15, parece una propuesta adecuada al referirse al cuadrado pero la limitaciones de esta proposición son evidentes para el caso del triángulo rectángulo. La propuesta de Agustín de que “si un lado se hace más largo también el otro tiene que hacerse para que alcancen a juntarse” parece suficiente para la restitución de la figura solo si se explicita, además, que se trata de un triángulo rectángulo y en el que sí es suficiente con conocer la longitud de uno de los catetos y de la hipotenusa.

Pensamos que, en este primer momento de la situación, el mensaje resulta aún altamente dependiente de la información provista por la propia representación gráfica de las figuras. Es evidente que la construcción de un mensaje plenamente autónomo requiere de consideraciones más profundas y una mayor articulación en la descripción de las propiedades y las relaciones. Nos encontramos frente al fenómeno que ha sido descrito por Duval (2005) en el sentido de la articulación cognitiva que se requiere entre la visualización de las formas y el lenguaje necesario para enunciar dichas propiedades.

En esta búsqueda que hacen los niños de una expresión sintética que pueda describir de una manera adecuada las figuras, aparece también la idea de que cada una de ellas puede estar definida básicamente por la medida de su área. El mensaje solicita de manera concreta: “Hola buenos días le mando este correo para pedirle 126 cm², 225 cm y 264 cm de hule espuma!”

Los integrantes del otro equipo discuten también la manera de describir una figura mediante una expresión matemática que defina su área.

Zuleika: Para el restaurante (un cuadrado), le pedimos uno de 15×4

Maestra: 15×4 , muy bien ¿por qué esas medidas?

Fernanda: Es por el área, cada lado mide 15 y el área se multiplica lado por lado, como tiene 4 lados por eso por 4.

Maestra: Ah, entonces sería cómo sumar 4 veces el 15. ¿Cómo sumar los lados?

Fernanda: No, no, es que es multiplicación, no suma.

Salma: Sí Fer, pero es lo mismo entonces, porque sale lo mismo si lo sumamos que si lo multiplicamos.

Zuleika: Entonces este cuadrado ¿mide lo mismo de perímetro que de área?

Salma: No puede ser, tiene que ser diferente porque es más lo de adentro que solo lo de aquí (señaló el perímetro de cuadrado)

Fernanda: Entonces ¿lo cambiamos?

Maestra: Pues ustedes deben de decidir, la idea es que el proveedor tenga las características para que pueda comprender cómo cortar el hule espuma.

Fernanda: Yo digo que así sí le entiende porque es 15×4 , entonces se sabe que es un cuadrado porque son 4 lados que miden igual 15.

A pesar de las dificultades observadas en el manejo de los conceptos geométricos, podemos ver que los niños tratan de hacer esfuerzos por tomar en cuenta propiedades y relaciones que van más allá de la observación directa de las figuras. Esto se origina, sin duda, en la exigencia que plantea la tarea de escritura del mensaje que, por su naturaleza, debe ser suficientemente explícita.

En la segunda sesión, en la que evaluaban las figuras enviadas por el proveedor y en la que trataban de establecer si eran congruentes con aquellas representadas en el plano, podemos observar cómo, en un primer momento, parten también de la visualización directa sin realizar algún tipo de acción o comprobación. Sin embargo, la propia demanda de la situación, así como la intervención docente, favorece que los niños tomen poco a poco mayor conciencia de la insuficiencia de este procedimiento y comiencen a tomar en cuenta, de una forma más articulada, el conocimiento que han ido desarrollando acerca de las propiedades de las figuras.

Observamos también que los niños toman como punto de partida para analizar las figuras la longitud de sus lados, es solo después de las dificultades que ofrece la construcción del mensaje que emerge, poco a poco, la consideración de los ángulos como propiedades distintivas.

Marisol: Tienen también 4 lados

Valeria: Y dos de sus lados son largos y dos cortos

Elisa: Este tiene dos así maestra, pero se ve como cuadrado. ¿Entonces qué es?

Maestra: ¿Cumple con las características de un cuadrado?

Elisa: No

Maestra: ¿Cumple con las características de un rectángulo?

Elisa: Si, pero no parece

Maestra: yo creo que así le pueden escribir al proveedor

Elisa: ¿El rectángulo que parece cuadrado?

En el caso específico del triángulo, por ejemplo, la noción de ángulo recto toma cada vez mayor importancia en las discusiones.

Gael: mide 95 (refiriéndose al ángulo de la figura recortada que en el plano era el ángulo recto)

Nery: Entonces pónganle que el ángulo recto es más grande y debería ser de 90°

Maestra: ¿Un ángulo recto cuanto debe de medir?

Nery: 90°

Maestra: y entonces ese mide 95° ¿Sigue siendo un ángulo recto?

Gael: Si, pero más grande.

Agustín: No... ya no es recto verdad, porque ya está más grande

Nery: Entonces no le ponemos recto sólo le ponemos que un ángulo debería ser recto pero mide más.

(...)

(En el otro triángulo enviado por el proveedor)

Nery: El ángulo recto mide menos de 90°

Agustín: Que no es recto... porque si mide más o menos de 90° , no es.

Nery: Bueno, ese ángulo mide menos

Maestra: ¿Y cómo podemos comprobar?

Gael: midiendo también

Justín: (Colocó el transportador) Este mide... 87° , casi si es recto

Los fragmentos de las discusiones que hemos analizado nos muestran que el punto de partida para la resolución de la tarea parece ser el planteamiento de proposiciones que se derivan de la percepción visual inmediata de las figuras sin embargo, creemos que la situación didáctica, en los términos en los que ha sido planteada, favorece la creación de condiciones para que los alumnos puedan avanzar hacia consideraciones de carácter más abstracto y riguroso que son propias de la geometría como cuerpo de conocimiento.

Conclusiones

El análisis de las acciones y las respuestas de los niños frente a la tarea que se les ha propuesto, nos ha mostrado el potencial didáctico de una situación que demanda la comunicación de un conocimiento geométrico en proceso de construcción. La exigencia que plantea la situación didáctica de estructurar un mensaje cada vez más coherente y explícito, da lugar a que los sujetos tomen una mayor conciencia y elaboren reflexiones más articuladas acerca de las propiedades y relaciones de las figuras geométricas. Se crean, de este modo, las condiciones didácticas necesarias para la construcción de un conocimiento geométrico más abstracto y de mayor generalidad y que trasciende las proposiciones que se derivan de una percepción visual más inmediata.

Como se ha señalado a lo largo de este trabajo, el conocimiento geométrico cumple un importante rol en el desarrollo del pensamiento matemático y cognitivo en general. Pensamos que la construcción de situaciones que potencialicen el razonamiento profundo sobre contenidos de esta naturaleza pueden constituir un insumo muy importante para la transformación de las prácticas más tradicionales de la enseñanza y en particular del campo de la geometría.

Referencias

- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Ed. Iberoamericana.
- Bressan, A., Bogisic, B. & Crego, K. (2000), *Razones para enseñar geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée sauvage, Éditions.
- Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie*. Universidad de Creta. Rethymnon. pp.67-83.
- Camargo, L. Samper, C. & Perry, P. (2018). Actividad demostrativa: protagonista en la clase de geometría. En Ávila, A. (Coord.) *Rutas de la Educación Matemática*. México, SOMIDEM.
- Duval, R. (2004) *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, GEM.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives* 10, p. 5 – 53, IREM de Estrasburgo.

- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24, No. 2, pp. 139-162
- García, S. & López, O. (2008) *La enseñanza de la geometría*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).
- Godino, J. & Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Kuzniak, A (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 16, pp.9-24.
- Moriena, S. & Scaglia, S. (2005) "Prototipos y estereotipos en geometría", *Educación Matemática*, 17, Núm. 3, diciembre 2005.