



## LA RELACIÓN DE UN DOCENTE CON UNA PROPUESTA DIDÁCTICA. UN CASO EN TORNO A LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES Y LA PROPORCIONALIDAD EN SECUNDARIA

**Aldo Escamilla Jardón**

Departamento de Investigaciones Educativas Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

**David Francisco Block Sevilla**

Departamento de Investigaciones Educativas Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

---

**Área temática:** Educación en campos disciplinares.

**Línea temática:** Las implicaciones del saber disciplinar en la gestión escolar, en la formación inicial y permanente de profesores y, en la práctica y los saberes docentes.

**Tipo de ponencia:** Reporte final de investigación.

---

### **Resumen:**

En este reporte de investigación se exponen los resultados de un estudio sobre la relación de un profesor de secundaria con una propuesta didáctica con ciertos elementos innovadores, dirigida a favorecer el aprendizaje de la multiplicación de fracciones en el marco de las relaciones de proporcionalidad. Para ello, se recurrió a la ingeniería didáctica de segunda generación (Perrin- Glorian, 2011) en la cual un docente implementó en su clase una secuencia didáctica diseñada ex profeso. Las situaciones didácticas se analizaron con apoyo de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 2007). El estudio pretende realizar un aporte a la comprensión de los procesos de apropiación de los profesores ante propuestas didácticas alternativas (Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., Solares, D., 2007; Robert, 2007; Sensevy, 2011) con apoyo de las dimensiones de Aline Robert y con algunos aportes de los estudios realizados desde la perspectiva sociocultural (Mercado, 2002).

**Palabras clave:** Educación secundaria, Ingeniería didáctica, Multiplicación de fracciones, Prácticas docentes, Apropiación de profesores.

## Introducción

En los estudios de didáctica de las matemáticas existe una preocupación sobre la reproductibilidad de las ingenierías didácticas que se realizan en la investigación. La problematización tiene dos vertientes: por una parte, refiere a las condiciones metodológicas de la investigación experimental, en donde se pregunta qué debería reproducirse cuando se replica una situación, para que poder afirmar que las relaciones causales que se identificaron, se sostienen (Artigue, 1995). La otra vertiente tiene que ver con los usos, en clases comunes, de secuencias producidas por la investigación. Con respecto a esta, se ha observado, ya desde hace años, que con frecuencia las situaciones didácticas que se implementan no responden a los objetivos planteados originalmente por los investigadores. En la búsqueda de explicaciones a estos desfases, así como de las condiciones requeridas para aminorarlos, se han realizado diversos estudios (Block, et al., 2007, Margolinas, 2009., Perrin-Glorian, 2011., Robert, 2007., Roditi, 2003, Ríos, 2016., Sensevy, 2011, etc.), que abordan, desde distintos enfoques, la participación e influencia del profesor en la puesta en marcha de secuencias que son producto de ingenierías didácticas de investigación. Con ello, el estudio de la práctica de los profesores se ha constituido en una línea importante de investigación en didáctica. Cabe destacar el trabajo de Perrin-Glorian (2011) quien desarrolló una línea de investigación que denominó Ingeniería Didáctica de Desarrollo (IDD) o de segunda generación, la cual enfoca la problemática del docente cuando implementa secuencias didácticas que son producto de la investigación didáctica. A la vez que estudia las causas de las transformaciones, esta línea pretende generar insumos para la enseñanza, y más específicamente, directrices que ayuden a mejorar las formas de utilización de dichas secuencias.

En el presente reporte, ubicado en esta última línea, damos cuenta del análisis de la relación de un docente de matemáticas de secundaria con una propuesta, portadora de ciertas innovaciones para la enseñanza de la multiplicación de fracciones en el marco de las relaciones de proporcionalidad. Asumimos la necesidad del profesor de reconstruir las propuestas con las que trabaja y nos preguntamos por las características que tiene la relación que establece con una propuesta en particular, cuestionándonos sobre qué se retoma, qué se transforma y cómo, y qué se deja de lado. Nos interesa indagar qué se infiere de ello en cuanto a la factibilidad de la propuesta, en cuanto a posibles mejoras a la misma para volverla más utilizable y respecto de su contribución a la mejora de la clase. Asimismo, avanzar en la comprensión de las necesidades, posibilidades y dificultades del profesor para llevar a cabo ciertos cambios, así como de sus necesidades de formación.

### La secuencia didáctica utilizada.

Para los estudiantes de primero de secundaria, la multiplicación se relaciona normalmente con el aumento de las cantidades (noción aprendida en los naturales), por lo que, al trabajar con fracciones, se enfrentan a una problemática: la multiplicación ahora también puede reducir. Esta característica, junto con otras diferencias profundas entre la multiplicación en los naturales y en los racionales, genera considerables dificultades de origen epistemológico (Brousseau, 1983).

La secuencia didáctica que utilizamos retoma algunos aportes de la investigación sobre el tema y en particular tiene como propósito favorecer el aprendizaje de la multiplicación de fracciones de manera integrada a la proporcionalidad. La secuencia consta de ocho situaciones didácticas, las primeras seis forman parte de una propuesta desarrollada en un libro de texto (Block, Balbuena y García, 2015) para alumnos de primer grado de secundaria y dos más se diseñaron para complementar las anteriores, usando contextos relacionados con el arte, que pensamos podrían ser interesantes para los alumnos.

El propósito global de la secuencia es la construcción de un sentido para la multiplicación de fracciones, y de varios algoritmos, de forma gradual, privilegiando la resolución de problemas en el seno de las relaciones de proporcionalidad. La secuencia inicia con el caso más sencillo, en el cual el multiplicador es un número natural  $N$  y el multiplicando una fracción, después se pasa por el caso en el cual el multiplicador es fracción y el multiplicando una medida, entera o fraccionaria, primero con una interpretación del multiplicador como “tomar una fracción de”, y después con el sentido de operador, en el contexto de la proporcionalidad, de la escala.

Para el análisis de cada situación, nos apoyamos en las etapas de la IDD. La primera es un análisis a priori, en el cual destacamos los propósitos, comentarios previos y algunos procedimientos esperados e inesperados por parte de los alumnos. La segunda etapa fue la implementación en el aula y la tercera el análisis a posteriori, el cual realizamos a la luz del análisis a priori, y con apoyo de videograbaciones de clase, producciones de los alumnos, notas de campo y entrevistas con el docente.

## Desarrollo

### Aspectos de la metodología

El estudio consistió en el análisis de las transformaciones que realizó un profesor a una secuencia didáctica alternativa, es decir, cómo se apropió de ella. La experiencia se realizó en un grupo de primer grado de una secundaria pública de la Ciudad de México. El docente titular tiene formación de ingeniero y cuenta con aproximadamente 20 años de experiencia. El docente se interesó por participar en el proyecto, si bien él no conocía la propuesta didáctica. Por ello, previo a la realización de la experiencia, sostuvimos una reunión para presentarle la propuesta y sus características fundamentales. Además, a lo largo del estudio, sostuvimos conversaciones con él, escuchamos sus opiniones, así como el porqué de algunas de las decisiones que fue tomando. Asimismo, preparamos “fichas pedagógicas”, en las que explicitamos los propósitos de cada situación y comentarios de cada actividad sobre posibles procedimientos esperados (y no esperados) de los estudiantes (cabe señalar que el profesor sólo utilizó las fichas para la primera situación pues, en sus palabras, las situaciones eran de “fácil aplicación”).

## Resultados

El docente transformó la propuesta de manera importante, no conservó su sentido global ni su intención didáctica. En general, omitió partes, agregó otras, y le asignó nuevas funciones a sus actividades (en general, la de practicar una técnica), y les asoció formas específicas de resolución (usar un algoritmo). Por lo tanto, el propósito de elaborar un sentido para la multiplicación de fracciones en el marco de la proporcionalidad, y desarrollar poco a poco los algoritmos a partir de los procedimientos menos sistemáticos de los alumnos, no se cumplió.

Sin embargo, el docente valoró otras capacidades, en particular, la de argumentar y la de usar procedimientos alternos al algoritmo usual, presididos por el sentido común o la lógica. Estos aspectos dieron lugar a que identificara, comprendiera, valorara, y tratara de promover algunos de los procedimientos propiciados en la propuesta, aunque estos fueron casos escasos, y no llegaron a modificar sustancialmente la interpretación global.

Lo anterior da cuenta de un diálogo continuo entre el docente y la propuesta, es decir, una relación dialéctica en la que el profesor hizo transformaciones, pero también aprendió de la secuencia. A continuación nos detenemos en aspectos más precisos de este diálogo.

### Las transformaciones realizadas por el profesor

Como hemos mencionado, destaca una reorientación del propósito de las actividades, principalmente hacia la aplicación de una técnica o algoritmo ya conocido para la resolución de un problema. Ilustraremos esta tendencia con una situación en la que se propone como problema inicial, un tren que da vueltas en un circuito de 60km y se pregunta ¿Cuántos kilómetros recorrerá en  $2\frac{3}{4}$  de vuelta? Se esperaba que los alumnos, acudiendo a su conocimiento previo de fracciones, calcularan  $\frac{3}{4}$  de 60 kilómetros, por ejemplo, dividiendo 60 entre 4 y multiplicando por 3. Esta tarea se presenta alternada con otras en las que el número de vueltas del tren era a veces un número entero (2 vueltas), o mixto (por ejemplo  $2\frac{1}{4}$  vueltas). Dicha alternancia buscaba justificar, más adelante, poder llamar “multiplicación”, a la operación de “dar  $\frac{3}{4}$  de vuelta”, por analogía con la de dar por ejemplo, 5 vueltas.

En la implementación, sin lograr propiciar que los estudiantes interactuaran con el problema con cierta autonomía, el profesor ofreció de inmediato una ayuda directa (Block, Ramírez y Reséndiz, 2015), la cual contenía una parte importante de la solución: apoyarse en una pregunta posterior, la cual daba la forma de resolver a la que se quiere llegar:

Pr: La clave del ejercicio es fijarnos en el inciso 1d. ¿Con qué operación se calcula la distancia en cinco vueltas?

Als: multiplicación

Pr: ¿cambiará de alguna manera la operación si ahora en lugar de calcular la distancia de cinco vueltas es de vuelta?

Este tipo de transformaciones limitaron el carácter adidáctico que se quiso dar a la fase inicial de las situaciones (Brousseau, 1981), y con ello se limitó el trabajo autónomo de los estudiantes. Además, se evitó la posibilidad de seguir un camino alternativo (usar primero lo que sabían, relacionarlo después con una perspectiva) que pretendía dar significados a las operaciones. En lugar de ello, prevaleció la búsqueda constante de maneras para “facilitar la tarea” y encaminarlas a la aplicación directa de alguna técnica.

Esta manera de transformar y refuncionalizar las actividades, confirman el interés del profesor a concebir la resolución de problemas como una actividad encaminada a aplicar técnicas previamente aprendidas, y no a desarrollarlas. No obstante, como mencionamos anteriormente, en algunos momentos, el profesor sí identificó el sentido de algunas de las actividades planteadas.

Por ejemplo, al final de la primera situación, se pretendía institucionalizar el sentido de la multiplicación cuando el multiplicador es fraccionario.

Pr: Cuando les preguntaban, si yo tengo 60 km en cada vuelta y doy 5 vueltas, ustedes de inmediato responden: ¡hay que multiplicarla y obtenemos 300! (hace la multiplicación en el pizarrón) ¡Lo hacen de forma automática sin importar absolutamente nada! Pero ¿qué sucede cuando yo les digo que estos 60km sólo han recorrido  $1/3$ ? piensan que la

operación es otra sin visualizar que es lo mismo, es una multiplicación. Algunos si lo intuyen, otros por el simple hecho de que cambiamos a fracción piensan que se trata de otra operación y no es así.

Así, al final de la situación, aunque no exactamente como lo previsto, se estableció que existe una relación semántica, entre la multiplicar por una fracción y tomar una fracción de una cantidad. El profesor dejó ver que comprendió bien el propósito de lección: mostrar a los alumnos que la “fracción de” puede jugar el mismo papel que un número entero de veces, y usar eso para justificar que, entonces, “fracción de” puede ser vista como una multiplicación.

Por otra parte, consideramos significativo que, en las dos últimas situaciones, sobre todo en la última, la participación del docente se apegara más a lo esperado, en particular, que diera más lugar al trabajo autónomo de los alumnos. Podemos conjeturar que, además de las características de esa situación que la hicieron motivante para los alumnos (Se trata de una situación en la cual se plantea el robo de una pintura en un museo en la que sólo se cuenta con las estaturas de los sospechosos y el largo de la palma de la mano que dejó el ladrón, con esos datos se debe encontrar al culpable). Una posible característica que facilitó la gestión es que se trata de una situación de aplicación, y no de elaboración de nuevos conocimientos. Aunque en ésta, la aplicación no es mecánica, pues implica una reelaboración de nociones, es posible, que dicha función se haya apegado más a lo que el profesor da a los problemas.

### **Recursos de interacción para conducir las situaciones**

Para el análisis de la relación del docente con la propuesta, nos propusimos identificar los recursos con los que el docente condujo las situaciones, es decir, algunos elementos de su práctica que nos dieran

información no sólo de las transformaciones que hizo, sino de las modalidades de interacción con las que guiaba las clases. En este análisis, elaboramos categorías respecto de sus recursos para gestionar el conocimiento en la clase. Destacamos las siguientes:

*Resolución acompañada: Guiar al alumno.* Nos referimos a la conducción de manera muy directiva de la resolución de los problemas. El docente acudió a este recurso a lo largo de toda la aplicación de la secuencia.

*Selección oportunista de participaciones:* el alumno *expertise*. Con este recurso, el docente tendió a permitir que se hicieran públicas únicamente ciertas respuestas de los alumnos, las que él esperaba. Esa acción reorientó algunas sesiones, en ocasiones, omitiendo procesos que coadyuvarían en la construcción de un significado importante, y en otras, alejándose del propósito de la situación y con ello, privilegiando cierta tendencia a la algoritmización de la enseñanza (Sensevy, 2011).

Para ilustrarlo, destacaremos un episodio de la primera actividad de la situación 5 “banderas a escala” En esa situación, se pretendía poner en evidencia el error aditivo (el cual consiste en usar la suma como recurso para encontrar valores faltantes en situaciones de proporcionalidad, por ejemplo, sumar 3 cuando la medida original es 4 y en la reproducción a escala es 7) y, después, introducir el valor unitario mediante la conservación de razones internas. Sucedió que un alumno experto obtuvo el factor de escala 2.5 desde el inicio. El docente validó el resultado y enseguida lo institucionalizó para el grupo. Dicha acción cambió el sentido de la situación.

## Tensiones en el trabajo docente

En el diálogo que se estableció entre la propuesta y el docente, identificamos tensiones (Sadovsky, 2004). Como hemos mencionado, el docente imprimió transformaciones y en ocasiones intentó promover el sentido previsto en las situaciones. Esos intentos propiciaron cierta rigidez en el trabajo del grupo, pues los alumnos estaban habituados a un contrato didáctico (Brousseau, 2007) establecido, en el cual el docente guiaba todas las participaciones y validaba los procedimientos. Estas tensiones, son una manera de analizar las prácticas docentes.

*Tensión entre la preeminencia de los algoritmos y la conciencia de la importancia del sentido.* A lo largo de la experiencia con la secuencia, el docente mostró su interés a la importancia del sentido y a la lógica de los estudiantes ante las diversas actividades que se plantearon. No obstante, esta característica convivió con su interés hacia el conocimiento y dominio de las técnicas, en particular de la multiplicación de fracciones, que desde la primera situación ya era del dominio de la mayoría de estudiantes.

*Tensión entre la preocupación por la argumentación y la resolución acompañada.* En las diferentes situaciones, el docente acompañó el trabajo de los alumnos de manera muy directiva; no obstante, en algunos momentos favoreció el trabajo autónomo y, sobre todo, solicitó de manera recurrente la justificación de las respuestas, aunque él guiara las puestas en común.

*Tensión entre el orden de la clase y el trabajo autónomo.* En prácticamente todas las situaciones el docente privilegió el trabajo individual, con momentos reducidos de trabajo autónomo. Sin embargo, en algunas sesiones, favoreció el trabajo adidáctico en equipos, solicitando continuamente la justificación de sus procedimientos, lo que muestra su interés para que los alumnos reconocieran el sentido en algunas actividades.

*Tensión entre el tiempo y la realización de las actividades en clase.* A lo largo de la experiencia, el docente manifestó su interés por realizar las actividades; sin embargo, en muchas sesiones decidió omitir actividades o enviarlas como tareas. La preocupación por la optimización del uso del tiempo, en nuestra opinión, también influyó en el poco tiempo para el trabajo en equipo, así como para sostener las fases adidácticas de las situaciones.

## Conclusiones

La comprensión de las acciones del profesor nos remite a sus intenciones (Sensevy, 2011). Las intenciones del docente fueron revelándose con claridad, tanto en sus acciones en clase, su manera de reaccionar y gestionar los incidentes (Roditi, 2003), como en sus opiniones en torno a la relación entre fracciones y proporcionalidad, y acerca de las formas de aprender matemáticas. Sus acciones respondieron a los saberes docentes (Mercado, 2002) que ha construido y legitimado a lo largo de su experiencia docente, y que vinculó de manera natural con la propuesta que le presentamos.

Para el docente, su participación en este estudio fue, según él mismo afirmó, una oportunidad de aprendizaje, manifestó que se hizo consciente de algunas cosas y que reconoció su aporte respecto de otros libros con los cuales ha trabajado. Por otra parte, confirmamos la poca influencia que por sí solo tiene un texto en el rumbo que adopta una clase de matemáticas.

Para terminar, planteamos algunas reflexiones que se derivan de la experiencia:

1. Sobre la comunicabilidad del texto con el docente. Se revela muy necesario, un material que acompañe al texto, o bien una versión para el docente, en la cual se expliciten de manera clara y puntual todos los aspectos necesarios para las lecciones, sin perder de vista que las componentes de trabajo y personal de los docentes (Robert, 2007) acotan el tiempo disponible para el estudio del material que utilizan en clase.
2. Las situaciones de aplicación se adaptan mejor. El hecho de que las dos situaciones diseñadas como de aplicación y no de construcción hayan tenido mejor gestión por el docente, nos llevan a conjeturar que, considerando solamente el libro de texto como material de intervención, es más factible contribuir al enriquecimiento de la clase mediante problemas de aplicación diversos y bien secuenciados, que mediante secuencias de problemas que pretenden dar lugar a génesis de los conocimientos en el aula. Esto último, posiblemente, se lograría con un acompañamiento

que va más allá del libro de texto. Se trata solamente de una conjetura a considerar en la agenda de investigación.

3. La visión previa del profesor. Debe investigarse más la influencia de la formación didáctica previa del docente en su capacidad de apropiarse de una propuesta didáctica portadora de determinadas innovaciones.
4. La importancia de elegir el texto. Correlativamente con el punto anterior, se vislumbra la necesidad de que los docentes de secundaria elijan el texto con el que desean apoyar su enseñanza de acuerdo a su percepción de las necesidades de sus alumnos, y a su visión de didáctica.
5. Finalmente, se destaca la necesidad de trabajar intensamente en el nivel de la actualización de docentes en servicio, y también de la formación de futuros profesores.

## Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. En Artigue, M., Douady, R., Gómez, P. Y Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp.33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Block, D., Balbuena, H., y García, S. (2015). *Matemáticas 1. Secundaria*. Savia. México: Ediciones SM.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M., y Solares, D. (2007). *La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria*. Revista Mexicana de Investigación Educativa. 12 (33). pp.731-762. Revisado el 12 de julio, 2016. Tomado de <http://www.redalyc.org/pdf/140/14003313.pdf>

Block, D., Ramírez, M., y Reséndiz, L. (2015). *Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado*. Revista Mexicana de Investigación Educativa. 20 (66). pp.711-735. Revisado el 12 de julio, 2016. Tomado de <http://www.redalyc.org/pdf/140/14003313.pdf>

Block, D., y Ramírez, M. (2009). *La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares*. Revista Mexicana de Investigación Educativa. 21 (1). pp. 63-90.

Brousseau, G. (1981). *Problèmes de didactique des décimaux*. Recherches en Didactique des Mathématiques. 2 (3). pp. 37-127.

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemáticas*. En: Recherches en Didactiques des Mathématiques. México: CINVESTAV-DIE.

Brousseau, G. (2007). *La teoría de las situaciones didácticas*. En *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.

Comin, E. (2003). *Des grains et des souris*. France. Revisado en, noviembre 2017. Tomado de [http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue\\_n/fic/72/72n5.pdf](http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/72/72n5.pdf)

Escamilla, A. (2019). *La relación dialéctica entre el docente y las propuestas didácticas. Un caso en torno a la multiplicación de fracciones y la proporcionalidad en secundaria*. DIE CINVESTAV. México.

Margolinas, C. (2009). *Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activité du professeur*: FRANCE: HAL. Revisado el 11 de marzo, 2018. Tomado de <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421848/document>

Mercado, R. (2002). *El carácter dialógico de los saberes culturales en la enseñanza*. México: Fondo de Cultura Económica.

Perrin- Glorian, M. J. (2011). *L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants*. En Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F. & Wozniak, F. (coords). (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique de mathématiques*. (vol.I) (pp. 57-74). France: La Pensée Sauvage.

Ríos, M. (2016). *La enseñanza del tratamiento de la información en preescolar. Un estudio sobre procesos de interpretación y de reconstrucción de situaciones didácticas*. Tesis de maestría. Die-Cinvestav. México.

Robert, A. (2007). *Stabilité des pratiques des enseignants de Mathématiques (second degré): Une hypothèse, des inférences en formation*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 27 (3), pp. 271-312.

Roditi, E. (2003). *Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement: Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 23 (2). pp.183-216. Revisado el 1 de septiembre, 2018. Tomado de <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00349723>

Sadovsky, P. (2004). Marco didáctico general. *La Teoría de Situaciones*. En *Condiciones Didácticas para un Espacio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas*. Informe final de Tesis de Doctorado, Facultad de Filosofía y Letras, UBA. (Capítulo I, Apartado 5).

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.