



¿ERRORES O DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES?

Silvia Evelyn Ward Bringas
Universidad Pedagógica del Estado de Sinaloa

Pedro Enrique Monjardin
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa

Orlando Nau Madrid González
Universidad Autónoma de Sinaloa

Área temática: Educación en campos disciplinares.

Línea temática: El análisis cognitivo de la construcción, comunicación y desarrollo de conocimientos disciplinares.

Tipo de ponencia: Reportes parciales o finales de investigación.

Resumen:

Durante el bachillerato se observa en los estudiantes insuficiencias en temas básicos de matemáticas, en ellos el error juega un papel muy importante pues al detectar y eliminar el error se puede llegar a la verdad. El objetivo central de la investigación fue analizar los errores y dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato al resolver ecuaciones lineales, para ello consideramos la perspectiva cognitiva en las clasificaciones de los errores que comete el estudiante propuestas por Radatz (1979) y Riviére (1990). Se aplicó un cuestionario en relación a operaciones básicas, leyes de signos y ecuaciones lineales a 26 estudiantes de primer grado, entre los hallazgos se destacan errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes por insuficiencia en los conocimientos previos.

Palabras clave: errores, dificultades de aprendizaje y ecuaciones lineales.

Introducción

La sociedad contemporánea exige el desarrollo científico y tecnológico, por lo que es prioritario fortalecer en los estudiantes de bachillerato el conocimiento matemático, parte importante de este proceso es la enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo. Tarea compleja, pues los estudiantes presentan dificultades tanto en el sentido numérico como en el pensamiento algebraico desde la Educación Básica. En este sentido, cabe señalar que la solución de ecuaciones lineales está presente implícitamente en el aprendizaje de las matemáticas al iniciar la vida escolar.

El estudio de las ecuaciones está ubicado curricularmente en secundaria. Sin embargo, implícitamente desde el preescolar el estudiante de bachillerato interactúa con ecuaciones lineales al resolver problemas aditivos, por ejemplo, el Reactivo 9 (García, 2014) del Examen para la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE) para preescolar:

Siete niñas quieren tomar agua, pero sólo hay tres vasos. ¿Cuántos vasos faltan para que cada niña tenga un vaso?

Encierra en un círculo la tarjeta que tiene los vasos que faltan para que cada niña tenga su vaso. (Se les presentan dibujadas tarjetas con uno, dos, tres y cuatro vasos).

El problema se puede resolver mediante una ecuación lineal, si x es el número de vasos, entonces resuelve el problema planteado; obviamente que los niños de preescolar no lo resuelven con una ecuación lineal; de acuerdo con García (2014), los niños más avanzados seguramente trabajan con el número de vasos y obtienen la diferencia (3 para 7 faltan 4); sin embargo, se puede resolver poniendo en correspondencia uno a uno los vasos, la autora afirma que los niños que van desarrollando el sentido numérico de manera inmediata descartan las opciones donde hay uno y dos vasos. Cabe señalar, que los resultados de la aplicación de este reactivo reportan que solo poco menos de la mitad (46%) de los niños de tercero de preescolar pudieron dar respuesta a este problema (García, 2014), lo que va indicando dificultades en el aprendizaje.

Por otra parte, en primaria el alumno se enfrenta con las ecuaciones lineales de diferentes maneras en problemas aditivos y multiplicativos, una forma común desde primer grado de primaria, son los problemas que implican encontrar el número perdido, por ejemplo: $3 + \underline{\quad} = 7$. En este tipo de problemas, los alumnos de primaria generalmente le restan al resultado el sumando dado para encontrar el número que falta ($7 - 3 = 4$), esto lo hacen realizando la operación o de manera mental de acuerdo con la complejidad del problema y el nivel de desarrollo del niño; los niños que tienen menos desarrollado el sentido numérico se les dificulta plantear la operación que encuentra el número perdido, problemática que sigue presentándose en el bachillerato.

Secundaria no está exenta de la problemática, más aún que las ecuaciones se explicitan en el currículo de ese nivel educativo; los estudiantes de tercer grado de secundaria e incluso los egresados, no están

en mejores condiciones que los niños de primaria, el desarrollo del sentido numérico y la resolución de ecuaciones lineales sigue siendo motivo de preocupación. Una dificultad prácticamente generalizada que se presenta entre los estudiantes de secundaria es traducir un problema de lenguaje natural al lenguaje algebraico. Por ejemplo, para el problema: *Hallar un número que al sumarle su consecutivo se obtiene 51.*

Los profesores para escribir la ecuación que resuelve el problema frecuentemente utilizan la traducción sintáctica, sustituyendo palabras claves por los símbolos matemáticos (Bernal, 2011; p. 8). Así pues, para el ejemplo en mención la solución es: Sea el número buscado, su consecutivo (el siguiente) se obtiene al sumarle uno (1), entonces la suma del número y su consecutivo es

$$X + (X + 1) = 51.$$

Se resuelve la ecuación $2X + 1 = 51$

$$2X = 51 - 1$$

$$2X = 50$$

$$X = 50/2$$

$$X = 25$$

Por lo tanto, el número buscado es 25.

Bernal (2011) señala que esta forma de enseñar, en la que no se presenta de intermedio algún tipo de representación gráfica para pasar al lenguaje matemático, produce limitaciones en los estudiantes de secundaria con menos habilidades matemáticas y dificulta la formación de competencias básicas para la traducción algebraica. Ya en el bachillerato las ecuaciones lineales se ubican curricularmente en primer grado, al iniciar segundo semestre, después de estudiar las propiedades de los números reales en primer semestre, más aún, la tercera parte del curso se dedica a las ecuaciones lineales para la formulación y resolución de problemas matemáticos contextualizados.

Sin embargo, aun cuando prácticamente en toda su vida escolar han realizado tareas con la resolución de ecuaciones de primer grado, al iniciar el tema en bachillerato a los estudiantes se les dificulta aplicar las propiedades de los números y realizar operaciones básicas, así como la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, como se ha venido señalando, esto tiene que ver con el desarrollo del sentido numérico y las competencias matemáticas, además están implicados los procesos de enseñanza aprendizaje. Por todo lo anterior se planteó las siguientes interrogantes:

¿Qué errores cometen los estudiantes de bachillerato al resolver ecuaciones lineales? y ¿Cuáles son las principales dificultades de los estudiantes de bachillerato al resolver ecuaciones lineales?

Desarrollo

Las evaluaciones externas miden las habilidades y conocimientos que poseen los estudiantes en matemáticas, generalmente asociadas a la capacidad para resolver problemas, por ejemplo la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), aplicada en Bachillerato hasta el 2014, establecía cuatro niveles de dominio para el conocimiento matemático: excelente, bueno, elemental e insuficiente.

Cabe señalar que el reporte de resultados para la preparatoria en la que se realizó la investigación, el nivel de logro alcanzado de 2012 a 2014 indica que poco más de la mitad de los alumnos de tercer grado obtuvieron un nivel de logro elemental o insuficiente (ENLACE, 2014), lo que significa que ya para terminar su bachillerato solo son capaces de resolver problemas directos o que requieren el planteamiento de ecuaciones simples, esto podría interpretarse como dificultades en el desarrollo del sentido numérico, indispensable en la vida escolar y cotidiana de los estudiantes.

El describir los errores que cometen e identificar claramente las dificultades que poseen los estudiantes de bachillerato al resolver ecuaciones lineales proporciona insumos para fundamentar teórica y metodológicamente una propuesta de enseñanza, lo que contribuye a generar conocimiento didáctico-pedagógico. Por lo que el objetivo fundamental de la investigación fue analizar los errores y las dificultades de los estudiantes de primer grado de bachillerato en la solución de ecuaciones lineales.

Errores o dificultades en la resolución de ecuaciones lineales

El estudio de la capacidad de los estudiantes de bachillerato para comprender la matemática, ha sido una preocupación invariable de la matemática educativa, y el error es un componente de la comprensión. Desde el punto de vista de Henostroza (1997) el error es atribuible a la capacidad de considerar verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas. Además los errores están estrechamente relacionados con las dificultades de aprendizaje.

Errores en el aprendizaje de la matemática

De acuerdo con Popper (1974), el conocimiento no parte de la nada y avanza por modificación del conocimiento anterior. Para el autor aun cuando no hay criterio alguno para reconocer la verdad, pues la coherencia no asegura la verdad; sí hay criterios para detectar el error; la confusión, la incoherencia, así como la inconsistencia indican error.

Radatz (1979) clasificó los errores más frecuentes en cinco categorías a partir del procesamiento de la información:

Errores debido a dificultades del lenguaje. El lenguaje matemático tiene su sintaxis y semántica propia, lo que supone una dificultad para muchos estudiantes.

Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. La incapacidad para pensar en imágenes dificulta la realización de algunas tareas matemáticas.

Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conocimientos previos. Las deficiencias en conceptos, algoritmos, procedimientos y conocimientos básicos de matemáticas.

Errores debidos a asociaciones incorrectas o a la rigidez del pensamiento. La aplicación incorrecta de reglas, procedimientos y algoritmos basados en experiencias anteriores.

Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Al aplicar reglas, procedimientos y algoritmos correctos en contenidos que no corresponden.

Por su parte Rivière (1990) categoriza los errores que comete el alumno desde una perspectiva cognitiva analiza los procesos mentales y los relaciona con los procesos de aprendizaje, en la Tabla 1 se presenta la propuesta del autor. Independientemente de las diferentes clasificaciones de los errores, Rico (1995) señala aspectos comunes a los errores y el cómo tratarlos tiene una importante repercusión en el aprendizaje de las matemáticas, para el autor los errores son sorprendentes, persistentes, sistemáticos, ignoran el significado y son parte habitual del proceso de aprendizaje, por lo que pueden contribuir positivamente a este.

Ecuaciones lineales

Una ecuación es una afirmación de que dos expresiones son iguales, en las que aparece una incógnita cuyo valor está relacionado a través de operaciones aritméticas. Se denominan ecuaciones de primer grado o ecuación lineal si el exponente de la incógnita es uno (Zill y Dewar, 2012). En álgebra es útil el uso de ecuaciones lineales para resolver muchos problemas prácticos, por ejemplo, de razón de cambio, mezclas, gastos, por mencionar algunos. Como estos problemas se expresan con palabras, la idea básica consiste en traducir éstas para construir una ecuación algebraica apropiada.

Cuestiones de método

Se planteó un estudio descriptivo, que como lo menciona Rojas Soriano (1987; p. 31) *su objetivo central es obtener un panorama más preciso de la magnitud del problema o situación, jerarquizar los problemas, derivar elementos de juicio para estructurar políticas o estrategias operativas.* Un estudio de este tipo permite elaborar juicios que deriven en estrategias para mejorar la enseñanza de las ecuaciones lineales en bachillerato.

Así pues, para desarrollar la investigación se utilizó el método de estudio de caso de acuerdo con Stake (1999), acompañado de técnicas e instrumentos como: cuestionario y análisis de documentos, para poder identificar los factores que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones lineales en primero de bachillerato. El caso estuvo constituido por 26 estudiantes de un grupo de primer grado del bachillerato de la Prepa 8 de julio de la Universidad Autónoma de Sinaloa (BUAS).

Cuestionario

Para identificar los errores y las dificultades de los estudiantes de primero de bachillerato en la resolución de ecuaciones lineales se elaboró un examen diagnóstico a manera de cuestionario, conformado de nueve ítems, dos preguntas conceptuales, tres sobre leyes de los signos y la resolución de cuatro diferentes tipos de ecuaciones lineales con la finalidad de explorar si el estudiante es capaz de resolverlas, a continuación se muestran los incisos del cuarto ítem pues es el que se retoma para el presente reporte.

1. $4+x=7$
2. $x-8=-9$
3. $3x+3=15$
4. $x/5-2=13$

Para la interpretación de datos se diseñaron formatos de registro y análisis, en los que se anotaron frecuencias, tipos de respuestas y construcción de categorías.

Discusión y resultados

Análisis descriptivo de la solución de los exámenes diagnóstico

En el presente trabajo se presenta solo el análisis descriptivo de las respuestas a la pregunta cuatro del cuestionario, el propósito de la pregunta fue identificar las habilidades que presentan los estudiantes al momento de realizar diferentes despejes de una variable en una ecuación lineal. Dicha pregunta está constituida con cuatro incisos, uno para cada una de las operaciones básicas.

En el inciso a) de la pregunta cuatro se le pidió a los estudiantes que efectuaran un despeje donde a la variable se le está sumando una cantidad conocida. Para efectos de la investigación, se consideró que el procedimiento correcto de solución es:

$$\begin{aligned}4 + x &= 7 \\x &= 7 - 4 \\x &= 3\end{aligned}$$

En esta pregunta dos estudiantes respondieron bien a lo que se pide, 16 contestaron mal y ocho no respondieron la pregunta. De los 16 estudiantes que contestaron mal se encontró que, el error que cometen 12 de ellos está relacionado con el MOVIMIENTO Y SIGNO, ya que intercambian de lugar a la X y el 7 sin considerar el signo. Por otra parte, el error que se manifestó en la respuesta de otros dos estudiantes consistió en la CONMUTACIÓN, pues lo que realizan es cambiar de lugar los términos de la izquierda. Además, se encontró en la respuesta de un estudiante que el error de él está relacionado con OPERACIÓN Y LUGAR, ya que aplico la operación equivocada, pasa a la X multiplicando a la derecha y luego divide entre

siete. Para finalizar las características de los errores encontrados en este inciso, el error en la respuesta de otro estudiante consistió en encontrar el NÚMERO PERDIDO pues solo le da valor a la variable X sin efectuar ningún movimiento.

Las cuatro categorías que se definieron para este problema corresponden a los errores debidos a asociaciones incorrectas o procedimientos irrelevantes de las categorías de Radatz (1979), se afirma esto pues se encontró que los estudiantes no completan los procedimientos y realizan despejes que no corresponden con la operación de la ecuación.

Pasando al inciso b) de la pregunta cuatro, en este problema se les pidió a los estudiantes efectuar un despeje, donde a la variable se le está restando una cantidad conocida. Para efectos de la investigación, se consideró que el procedimiento correcto de solución es el siguiente:

$$\begin{aligned}x - 8 &= -9 \\x &= -9 + 8 \\x &= -1\end{aligned}$$

Se encontró que ocho estudiantes respondieron bien al reactivo, mientras que nueve respondieron mal y nueve no lo respondieron. En las ocho respuestas correctas se observan los pasos a seguir para realizar el despeje. Mientras que de las nueve respuestas incorrectas, seis estudiantes cometen el error MOVIMIENTO Y SIGNO, ya que cambian de lugar un término sin tomar en cuenta el signo con el cual se está operando. También en las respuestas incorrectas se encontró a un estudiante que cometió el error que consiste en OPERACIÓN Y LUGAR, pues aplicó la operación equivocada, pasa a la X multiplicando a la derecha y luego divide a menos 8 entre menos nueve. Para finalizar el análisis de este caso, de nuevo entre los hallazgos se tiene a dos estudiantes cuyo error consiste en encontrar el NÚMERO PERDIDO pues le dan valor a la variable X y no efectúan ningún movimiento.

Al igual que en inciso anterior, las categorías también se corresponden con los errores debidos a asociaciones incorrectas o procedimientos irrelevantes de las categorías de Radatz (1979). Además es importante señalar que aproximadamente la tercera parte de los participantes respondieron mal y de estos, los dos que se tipificaron como número perdido, aun cuando es la respuesta correcta, se quedan en la parte aritmética y no resuelven algebraicamente el problema.

Para el inciso c) de la pregunta cuatro se les pidió a los estudiantes efectuar un despeje donde a la variable se le está multiplicando una cantidad conocida. Se consideró que el procedimiento algebraico correcto para su solución es el siguiente:

$$\begin{aligned}3x + 3 &= 15 \\3x &= 15 - 3 \\x &= \frac{12}{3} \\x &= 4\end{aligned}$$

En este inciso se encontró que de los 26 estudiantes solamente uno respondió correctamente, 18 respondieron incorrectamente y siete no respondieron. De los 18 resultados incorrectos, tenemos que los errores de nueve estudiantes se consideró INCOMPLETA Y SIGNO ya que cinco realizan un solo movimiento, pasan el tres del extremo de la izquierda a la derecha pero no consideran el cambio de signo, los otros cuatro pasan el tres como menos tres al otro extremo y hasta ahí lo dejan. Por otra parte, se consideró el error de otros dos estudiantes como OPERACIÓN Y LUGAR ya que ellos aplicaron la operación equivocada, pasan a $3x$ multiplicando a la derecha y luego dividen al tres entre 15. También se encontró que el error de dos estudiantes más consistió en la CONMUTACIÓN ya que solo intercambian el tres y la X del lado izquierdo. Además dos estudiantes más cometieron el error de encontrar el NÚMERO PERDIDO ya que ellos le dan valor a la variable X y no realizan operación, quedándose solo en la solución aritmética. Por último en el análisis de este inciso, las respuestas de tres estudiantes se consideraron AMBIGUAS ya que no proporcionan información, uno de ellos solo reescribe la ecuación y no anota la X , otro escribe la pura X y el tercero anota el número 10.

Así pues, se puede afirmar que las categorías construidas para este problema, al igual que los incisos anteriores se corresponde con lo que Radatz (1979) llama errores debidos a asociaciones incorrectas o procedimientos irrelevantes, ya que los estudiantes no utilizan las operaciones ni los procedimientos adecuados para resolver el problema.

En el inciso d) de la pregunta cuatro se le pidió a cada estudiante efectuar un despeje donde a la variable se le está dividiendo una cantidad conocida. Se consideró correcto el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} - 2 &= 13 \\ \frac{x}{5} &= 13 + 2 \\ x &= (15)(5) \\ x &= 75 \end{aligned}$$

Los hallazgos señalan, que de los 26 estudiantes 19 respondieron incorrectamente y 7 no contestaron. De los 19 estudiantes que contestaron incorrectamente, el error de 12 de ellos está relacionado con OPERACIÓN Y LUGAR ya que ellos aplican la operación equivocada. Tres de ellos pasan el menos dos al otro extremo y le cambian de signo al 13, otros seis alumnos pasan el menos dos al otro extremo sin cambiar el signo y después el cinco que está dividiendo lo pasan restando y los tres restantes pasan el trece a la izquierda multiplicando a X , cambian al menos dos a la derecha con el mismo signo, luego el cinco lo pasan dividiendo al menos dos y por último el cinco lo regresan multiplicando y al trece también lo regresan dividiendo. También se encontró que el error que cometen cuatro estudiantes es que CONMUTAN, dos de ellos cambian los términos que se encuentran del lado izquierda y los otro dos cambian el 13 y el menos dos. Además un estudiante cometió el error de encontrar el NÚMERO PERDIDO ya que le da valor a la X y no realiza ningún movimiento para despejar la variable. Para finalizar el análisis del problema, es necesario mencionar que la respuesta de dos estudiantes se consideró AMBIGUA ya que sus respuestas no proporcionan nada de información, uno de ellos solo escribe la X y el otro anota el número 11.

Las categorías coinciden con lo que se encontró en todos los incisos anteriores, por lo que se puede señalar como hallazgo que al parecer los estudiantes de bachillerato participantes en el estudio, al momento de resolver diferentes ecuaciones lineales cometen errores debidos a asociaciones incorrectas o procedimientos irrelevantes de acuerdo a las categorías establecidas por Radatz (1979). No se puede pasar por alto que en cada uno de los incisos del problema más de la mitad de los estudiantes participantes cometieron errores de procedimiento que se pueden atribuir a la insuficiencia de conocimientos que menciona Rivière (1990).

Características de los errores y dificultades al resolver ecuaciones lineales

Del análisis descriptivo presentado se observa que los errores más frecuentes que cometen los estudiantes de primero de bachillerato al resolver ecuaciones lineales, están relacionados con la regla de los signos y el uso del inverso aditivo así como multiplicativo, por lo que se consideró caracterizarlos de la siguiente manera:

Errores de movimiento y signo: Efectúan movimiento de términos al otro extremo de la igualdad sin considerar cambio de operación.

$$4 + x = 7 \quad 4 + 7 = x$$

Errores por conmutación: Intercambio de lugar de los términos sin resolver.

$$4 + x = 7 \quad x + 4 = 7$$

Errores de operación y lugar: Pasan al otro lado de la igualdad la cantidad con la operación equivocada.

$$4 + x = 7 \quad x = \frac{+4}{7}$$

Errores de número perdido: Dan valor a la incógnita sin realizar ningún procedimiento.

$$4 + x = 7 \quad 4 + 3 = 7$$

Errores de incompleta y signo: Pasan la cantidad que está sumando al otro lado de la igualdad sin considerar el cambio de signo, además no concluyen el procedimiento para llegar a un resultado.

$$\text{a): } 4 + x = 7 \\ 7 + 4 = x$$

De acuerdo con el análisis realizado, se puede observar que las categorías que se elaboraron en relación a los errores que cometen los estudiantes de primero de bachillerato de la preparatoria 8 de julio del Bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa, coinciden con dos de las categorías propuestas por

Radtz (1979), básicamente se encontró que los estudiantes realizan asociaciones incorrectas (o rigidez del pensamiento) y aplican reglas o estrategias irrelevantes lo que dificulta su proceso de aprendizaje.

Además en relación a los factores de la dificultades establecidos por Riviére (1990), las categorías encontradas corresponden a la insuficiencia en los conocimientos previos, ya que presentan deficiencias en el conocimiento de propiedades, reglas y algoritmos del algebra, los cuales son la base principal del aprendizaje matemático.

Conclusiones

En cuanto a los errores y dificultades en la resolución de ecuaciones lineales, se encontró que tres de las dificultades fueron usar incorrectamente la regla de los signos, el inverso aditivo y el inverso multiplicativo.

En este punto es importante señalar que desde hace algunos años se está promoviendo en los estudiantes de bachillerato el desarrollo de competencias matemáticas que les permitan aplicar los conocimientos en diferentes situaciones. Cabe puntualizar que las ecuaciones lineales son base para la resolución y comprensión de diferentes problemas en todas las asignaturas de matemáticas que el estudiante cursará a lo largo de su trayectoria escolar en el nivel medio superior. En tal sentido, es indispensable buscar estrategias didácticas que tomen en cuenta al estudiante como centro del saber y al maestro como mediador; ya que la instrucción matemática en el bachillerato se ha centrado en el aprendizaje memorístico o repetitivo, lo que dificulta el desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes.

Tablas y figuras

Tabla 1: Factores de la estructura cognitiva y su relación con el proceso de aprendizaje

FACTOR	INFLUENCIA EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE
INSUFICIENTES CONOCIMIENTOS PREVIOS	EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS SE REALIZA DE TAL MANERA QUE LOS NUEVOS CONCEPTOS DEPENDEN DE LA ADQUISICIÓN PREVIA DE CONCEPTOS ANTERIORES.
MEMORIA Y ATENCIÓN	UNA MEMORIA INSUFICIENTE O MAL GESTIONADA INFLUYE DE MANERA NEGATIVA EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO.

Fuente: Elaboración propia retomado de Fernández (2013).

Referencias

Bernal, C. (2011). Problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Documento inédito. Ministerio de educación de Panamá. Noviembre de 2011. Consultado en junio de 2017 en: <https://core.ac.uk/download/pdf/12342132.pdf>

ENLACE (2014). Resultados históricos ENLACE Media Superior por entidad federativa. Disponible en: http://www.enlace.sep.gob.mx/resultados_historicos_ms/

Fernández, A. (2013). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y Bachillerato. Análisis de un caso práctico. Master en Educación Secundaria y Bachillerato. Tesis de maestría no publicada de la Facultad de Educación de la Universidad Internacional de la Rioja. Madrid, España.

García, S. (2014). Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México: INEE.

Henostroza, J. L. (1997). Los errores en el aprendizaje de la matemática. Lima enero de 1997. Consultado en julio de 2017 en: <http://macareo.pucp.edu.pe/~jhenost/articulos/errores.htm>

Popper, K. (1974). Búsqueda sin término: una autobiografía intelectual. Tecnos. Madrid, España.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in mathematics educations. *Journal for Research in Mathematics*, 10(3).

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. (Eds.), Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. Bogotá: una empresa docente.

Riviére, A. (1990). Capítulo 9. Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En Marchesi, A., Coll, C. y Palacios, J. (compiladores), Desarrollo psicológico y educación. III. Necesidad educativas especiales y aprendizaje escolar. Alianza. Madrid.

Rojas-Soriano, R. (1987). Guía para realizar investigaciones sociales, México, DF., Plaza y Valdés.

Stake, R. E. (1999). Investigación con estudio de casos. Segunda edición. Ediciones Morata. Madrid, España.

Zill, D. G. & J. M. Dewar. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera edición.