Tipos de pruebas en la resolución de tareas geométricas de los profesores en formación

Griselda González Arriaga
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", San Marcos, Zacatecas
greygonzalez1977@gmail.com

Cinthya Fabiola Torres Barrios
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", San Marcos, Zacatecas
cynfa23@gmail.com

Daniel Alberto Mejía Herrera
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", San Marcos, Zacatecas
damh_61@hotmail.com

Área temática 06. Educación en campos disciplinares.
Línea temática: Formación inicial y permanente de profesores en los distintos campos del saber disciplinar.
Tipo de ponencia: Reporte parcial de investigación.

Resumen

Esta ponencia describe los resultados obtenidos en la aplicación de dos tareas geométricas a dos profesores en servicio y tres futuros profesores; el contexto de resolución de las tareas fue mediante sesiones colectivas. La actividad se deriva de una propuesta de formación a docentes de escuelas multigrado en la enseñanza de la geometría, específicamente sobre contenidos asociados al triángulo. Dicha propuesta está construida bajo la perspectiva teórica del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG). En esta teoría, la activación de las tres génesis figural, instrumental y discursiva son fundamentales para favorecer el razonamiento geométrico (Houdement y Kuzniak, 2006). En el análisis de las tareas geométricas de este estudio, se toma como centro la génesis discursiva, en particular el componente prueba. Los hallazgos muestran los tipos de prueba que los profesores utilizaron para justificar los resultados de las tareas geométricas y la manera en que la tipología inicial evoluciona a partir de la discusión en colectivo al validar los resultados del primer problema. Lo anterior, con la finalidad de reconocer la importancia que el componente prueba y demás elementos que conforman el ETG, tienen en el diseño de situaciones didácticas en los grupos multigrado.

Palabras clave: *ETG, prueba, formación de profesores, geometría.*

Introducción

En la formación de profesores para la enseñanza de la geometría, el diseño de dispositivos que permitan desarrollar los conocimientos didácticos y disciplinares de los docentes, contribuye a la adquisición de herramientas para la gestión didáctica. El presente estudio forma parte de una propuesta de formación para profesores en servicio y en formación inicial, que laboran en escuelas multigrado, específicamente en la enseñanza del triángulo.

La hipótesis central en la perspectiva teórica del Espacio de Trabajo Geométrico, señala que mediante la activación de las distintas génesis (figural, instrumental y discursiva) se favorece el aprendizaje de la geometría, pues el razonamiento geométrico comprende la activación de los componentes que lo conforman (visualización, construcción, prueba, espacio real y local, artefactos y referencial) (Houdement y Kuzniak, 2006). Introducir estos elementos al aula, reside en el reconocimiento de la importancia que tienen.

En lo que concierne al aula multigrado, dicha activación puede considerarse como uno de los elementos que permite diseñar situaciones didácticas para que los niños de distintos grados escolares logren el aprendizaje del contenido geométrico y mediante la revisión del componente referencial es posible solicitar diversos tipos de pruebas en congruencia con el nivel cognitivo de cada uno de los estudiantes. En relación a la prueba, componente central de análisis en este estudio, a medida que el profesor comprenda todas las posibilidades que brinda para la gestión didáctica favoreciendo el razonamiento geométrico, será la utilización del mismo en el aula multigrado. En este sentido, se precisa que esta comprensión se derive del trabajo en su Espacio de Trabajo personal, es decir, cuando el profesor resuelve tareas geométricas y despliega los conocimientos matemáticos que posee.

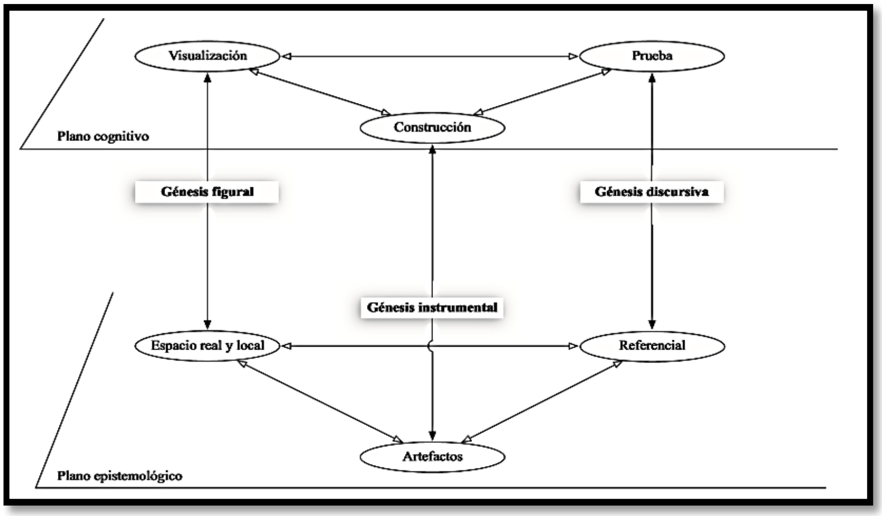
Con base en las ideas anteriores, es importante identificar, ¿cuáles son los tipos de prueba que emplea el profesor en su papel de geómetra al resolver tareas geométricas?, y, ¿de qué manera evolucionan las tipologías iniciales después de la validación de resultados?

Desarrollo

La perspectiva del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), considera la naturaleza del trabajo matemático cuando el geómetra (sujeto que puede ser un estudiante o profesor) se enfrenta a la resolución de una tarea en geometría. Parte del aprendizaje geométrico, lo conforman dos planos que no están jerarquizados, pues se articulan de manera dinámica. El plano de naturaleza epistemológica tiene una relación estrecha con los contenidos geométricos y el plano de naturaleza cognitiva concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas geométricas (Kuzniak, 2011).

Como parte de cada plano, se integran componentes que caracterizan la actividad geométrica (figura 1). El plano epistemológico se constituye con los componentes: espacio real y local; artefactos; y un sistema teórico de referencia. Estos tres componentes se articulan con los del plano cognitivo: visualización, construcción y prueba a través de las génesis del espacio de trabajo (figural, instrumental y discursiva).

Figura 1. Espacio de Trabajo Geométrico. Fuente: Kuzniak (2011)



En la génesis discursiva el razonamiento está ligado a un proceso de prueba, en esta génesis se argumenta el proceso realizado y explicita un discurso que da sentido a las propiedades geométricas involucradas en la tarea matemática. Esta génesis es importante porque, como lo afirma Duval (1995 citado en Henríquez, 2014), la actividad cognitiva de la geometría precisa de una articulación entre visualización y razonamiento discursivo. El componente prueba descansa en las aportaciones sobre la tipología de pruebas de Balacheff (1987, 2000).

De acuerdo con Balacheff (1987), en el razonamiento geométrico debe considerarse la interacción social del individuo porque el contexto posibilita la discusión y los argumentos de los sujetos. En este sentido, cobra importancia para el profesor, tanto en su formación como en el diseño de sus clases organizar la validación, ya que para argumentar y convencer es necesario desplegar un discurso explicativo que puede ser escrito o apoyarse en la elaboración de diagramas (Miller, 2007; citado en Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016),

Uno de los medios principales para transformar una situación de decisión a una situación de validación tiene que ver con someterla a debate para garantizar o desconocer su validez, a partir de la confrontación de los argumentos de los estudiantes se desarrolla un proceso de prueba y de acuerdo a Balacheff (citado en Pizarro, 2018), puede haber dos tipos de validaciones: la explicación (discurso subjetivo con base en los conocimientos y racionalidad de quien explica, principalmente centrado en un lenguaje natural); y la prueba (explicaciones aceptadas en un momento determinado que pueden ser pragmáticas o intelectuales. La diferencia entre unas y otras tiene que ver con la naturaleza de la justificación, las pruebas pragmáticas están ligadas a la acción y la experiencia mientras que las intelectuales se articulan en torno de argumentos y cadenas de argumentos para producir un lenguaje simbólico. Enseguida se describen cada tipo de prueba de acuerdo a Henríquez (2014).

Pruebas pragmáticas

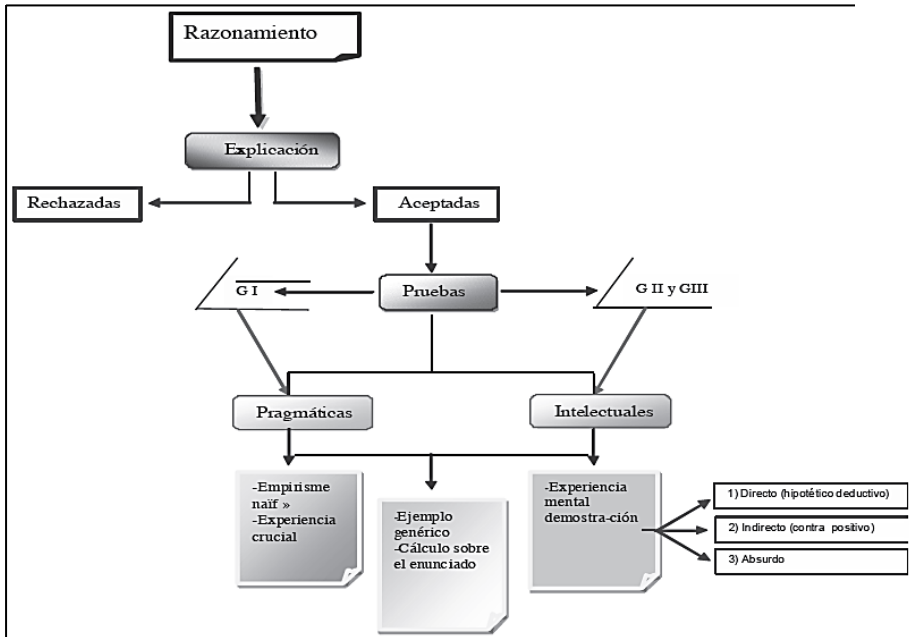
- Empirisme naïf: cuando la persona valida después de verificar casos particulares.
- Experimento crucial: toma en cuenta la problemática de la generalidad y la resuelve mediante un caso en particular.
- Ejemplo genérico: cuando se justifica la afirmación considerando un ejemplo concreto como representante de los que pertenecen a dicha afirmación.

Pruebas intelectuales

- Experiencia mental: cuando el razonamiento se independiza de la representación particular.
- Cálculo sobre el enunciado: se identifica esta prueba entre la experiencia mental y la demostración, no es una prueba con las características de una demostración pero tampoco con las de una experiencia mental. No tiene ejemplos ni dibujos, y utiliza el razonamiento con propiedades explícitas aunque no todas ciertas.
- Demostración: cuando la validación se apoya en conocimientos institucionales, conjunto de definiciones, teoremas, etc., y se funda en una lógica formal.

Henríquez (2014) señala que entre el ejemplo genérico y la experiencia mental, opera el pasaje entre las pruebas pragmáticas y las intelectuales. En cuanto a la articulación y transición entre pruebas pragmáticas (figura 2), observamos que las pruebas pragmáticas empirisme näif (empirismo ingenuo) y experiencia crucial, se integran básicamente en el paradigma GI, porque la validación de las afirmaciones corresponde a casos en particular o bien una problemática general se valida con un caso específico. Cuando hablamos de pruebas de tipo intelectual (experiencia mental y demostración), las justificaciones se liberan de situaciones particulares y se apoyan en los conocimientos institucionales, para ello se requiere una compleja construcción cognitiva y lingüística porque este tipo de prueba otorga la validez socialmente aceptada y fundada en una lógica formal, para transitar de un tipo de prueba a otra, Balacheff (citado en Montoya 2014).

Figura 2. Tipología de pruebas y paradigmas geométricos. Fuente: Montoya (2014, pág. 234)



Por esta razón resulta importante que al resolver un problema se tomen en cuenta los criterios aceptados como prueba en una comunidad escolar (Henríquez, 2014), en el caso de esta actividad realizada con los profesores, se acepta el criterio que se describe posteriormente.

Metodología

Esta investigación es de corte cualitativo, la actividad aplicada tenía la finalidad de favorecer el razonamiento geométrico del profesor haciendo énfasis en los tipos de prueba que pueden aparecer al dar respuesta a los problemas y forma parte de una situación didáctica de referencia utilizada en la propuesta de formación, en el marco de la experimentación de una Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). El criterio a deducir es que la suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es siempre mayor que la longitud del tercer lado y como complemento para que pueda construirse un triángulo, cualquier lado es mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos y menor que su suma.

Los instrumentos utilizados para recuperar información fueron registros de observación y productos de los profesores al resolver la tarea geométrica. Las categorías de análisis derivan del criterio de la tarea y la tipología de prueba de Balacheff (1987, 2000) expuesta en párrafos anteriores. La actividad se organizó en tres momentos, en el primero se les pidió resolver y justificar las respuestas del problema (figura 3).

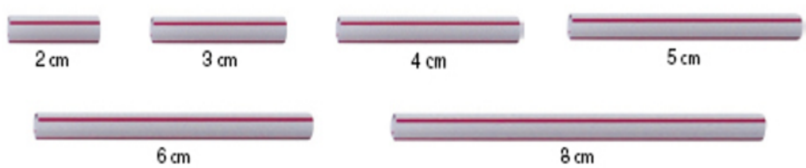
Figura 3. Primer problema. Fuente: (Documento N° 3 Diseño Curricular, 2001)

Pablo tiene la posibilidad de construir una piscina triangular en el patio de su casa. Tiene disponible una de las esquinas del mismo. Para aprovechar el espacio calcula que puede hacerla con estas medidas 2m, 3m y 7m, pero también piensa que sería buena idea hacerla con estas otras medidas 3m, 4m y 9m. Hagamos el dibujo con los dos juegos de medidas disponibles y justifiquemos por escrito cuáles serían más adecuadas".

El segundo momento, consistió en una validación de resultados de manera grupal, los profesores argumentaron sus procedimientos mediados por cuestionamientos realizados por la investigadora; posterior al momento de discusión, en el tercer momento, resolvieron la segunda tarea mediante un problema que implicaba identificar combinaciones posibles y no posibles de construcción de triángulos (figura 4). Con ello se pretendía que concluyeran con la enunciación del criterio en que se centraban las tareas, a partir de la validación grupal.

Figura 4. Segundo problema. Fuente: (SEP, 2006)

Si se tienen estos popotes con estas medidas, ¿con cuáles combinaciones será posible trazar un triángulo?

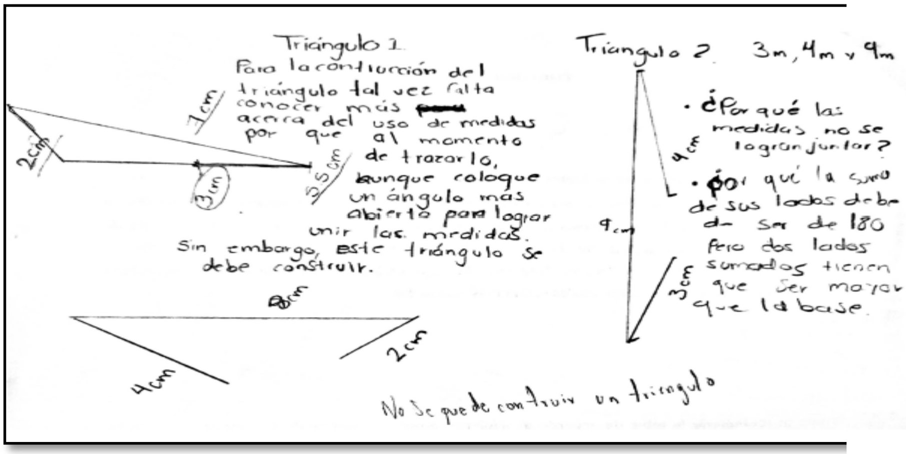


Para diferenciar los productos y diálogos de los participantes se denomina a la investigadora como I, a los profesores en servicio como PS1 y PS2, y los futuros profesores FP1, FP 2 y FP3.

Resultados

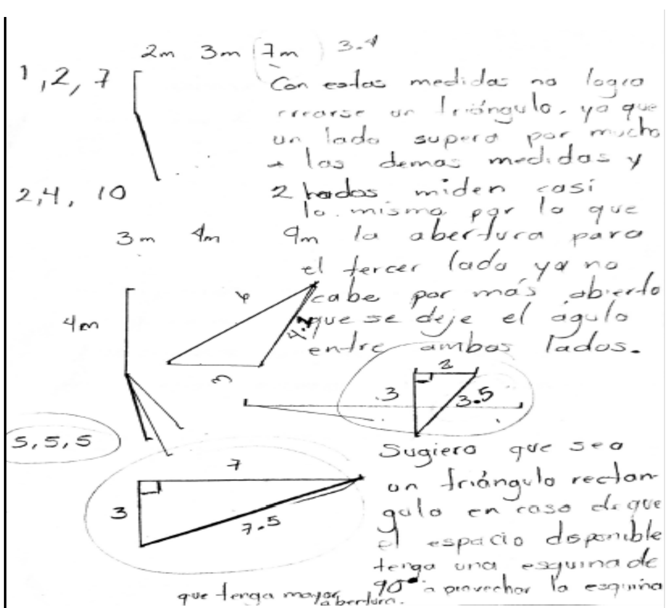
Con base en las ideas antes expuestas, se caracterizan las pruebas de algunos profesores al resolver ambos problemas, así como el tránsito entre los diferentes tipos. En los resultados del problema 1, apreciamos la justificación de FP3 (figura 5).

Figura 5. Justificación de FP3 del problema La piscina de Pablo



FP3 utiliza los artefactos (la regla) y evoca una propiedad conocida (la suma de los ángulos internos de un triángulo) que asocia erróneamente con los lados de los triángulos, de esta manera combina esta propiedad con la que concierne a la relación entre la medida de los lados de un triángulo al escribir: *por qué la suma de sus lados debe ser de 180 pero dos lados sumados tiene que ser mayor que la base.* Esta prueba es de *tipo experiencia crucial* por la experimentación con los artefactos materiales. Mediante la experimentación, busca la validación mediante la construcción por medio de artefactos e instrumentos, considerando relacionarlas con los teoremas y propiedades como elementos de validación. Las justificaciones se orientan hacia una proposición que se quiere justificar y están centrados en el valor lógico de la proposición y no en su contenido, puesto que un razonamiento ligado al lenguaje no debe ser meramente perceptivo sino validado o refutado por la experiencia, o en este caso, por medio de la construcción. En la figura 6 se observa la manera en que PS1 utiliza la medición como recurso para verificar la construcción del triángulo.

Figura 6. Justificación de PS1 del problema La piscina de Pablo



Con el uso de la regla hace de la medición una experimentación basada en el ensayo y error, una vez que ha comprobado la imposibilidad de la construcción con las medidas dadas decide proponer otras que permitan dar una respuesta al problema. La justificación se basa en la medición de los lados o ángulos, lo que permite afirmar que es una prueba pragmática del tipo *empirismo ingenuo* propia del paradigma GI, al verificar la afirmación a partir de la medición que realiza en los triángulos y además la lectura de los datos y el objeto geométrico siempre se desarrollan con el dibujo, es decir, la visualización juega un importante rol. En un sentido diferente se encuentra el caso de FP2 quien menciona parcialmente la condición para la construcción de triángulos dados sus tres lados, ella sostiene:

Justificación de FP2. La piscina de Pablo

- Ninguno de los dos juegos de medidas permite la construcción de la piscina, ya que al utilizar como lado base la medida mayor, las medidas de los otros dos lados en suma deben ser mayor a esta medida para que el triángulo pueda formarse, y en esta situación no sucede así, ya que en el caso de las primeras medidas, tomando como lado base el de 7m, y sumando los otros dos lados 2m más 3m, suman 5m y este es menor al lado mayor y en el caso de las segundas medidas al ser la medida mayor el de 9m , la suma de los lados 4m y 3m es menor.

Lo relevante es que FP2 no utilizó instrumentos, aunque movilizó el componente construcción a través de artefactos simbólicos (la condición de construcción) con lenguaje formal. La justificación de FP2 es una prueba de tipo *cálculo sobre el enunciado*, puesto que su afirmación es totalmente independiente de la experiencia (que en este caso sería la construcción). Las pruebas de este tipo no incluyen ejemplos ni dibujos y utilizan el razonamiento con propiedades explícitas, no obstante que no todas sean ciertas, como en este caso que se enuncia la condición al mencionar que un lado debe ser mayor a la suma de los otros dos, es importante mencionar que para la existencia de los triángulos, hay que señalar que la medida de ese lado, debe también ser menor a la diferencia que exista entre los otros dos.

Las pruebas analizadas hasta aquí, son producto del trabajo individual de los profesores, un segundo momento consistió en una discusión grupal. Uno de los hallazgos más relevantes se puede observar en el siguiente fragmento, en el que FP2 expone sus argumentos.

I: ¿Se pudo construir la piscina?

PS1: No

I: ¿Por qué?, ¿ninguna se pudo?, ¿alguien quiere compartir su respuesta?

FP2: ¡Yo!...Ninguno de los dos juegos de medidas permite la construcción de la piscina, ya que al utilizar como base la medida mayor, las medidas de los otros dos lados en suma deben de ser mayor a esta medida para que el triángulo pueda formarse, y en esta situación no sucede así, ya que en el caso de las primeras medidas tomando como base el de 7m, y sumando los otros dos lados 2m más 3m, suman 5m y este es menor al lado mayor y en el caso de las segundas medidas al ser la medida mayor el de 9m , la suma de los lados 4m y 3m es menor.

En el discurso de FP2 aparece la condición para la construcción de triángulos dados sus tres lados, por un lado puede suponerse que a partir de la situación propuesta lo haya descubierto, o bien, que la explicitación de este saber tiene relación con aquello que ha adquirido durante su formación. Luego de esa respuesta, se aprecia en el siguiente fragmento, la reflexión de PS1.

PS1: Yo le puse que con estas medidas no se logran construir los triángulos, y es que, en uno de ellos una de las medidas es muy superior, sobresale mucho de las otras medidas, y las otras medidas son casi iguales, entre esas medidas es muy poca la diferencia, entonces prácticamente están casi del mismo tamaño, por lo que la otra medida abre mucho, pero los otros dos lados son pequeños, pues no se puede porque ese ángulo quedaría muy abierto. (Mientras lee su justificación, con las manos simula los ángulos que se formarían). Entonces sería algo parecido a lo que dice la maestra (FP2).

Puede advertirse que aunque PS1 no enuncia completamente la condición de construcción, hace énfasis en las medidas de los lados y se apoya en otro contenido matemático (los ángulos). Pero sobre todo, recurre a lo expuesto por FP2 para ampliar su justificación. En el siguiente fragmento, se aprecia la finalidad de complementar la condición antes expuesta.

I: Entonces, si no se pudo construir con esas medidas, ¿cuál es la mejor opción que le darían a Pablo para hacer la construcción?

PS1: Como dice, hagamos el dibujo con los dos juegos de medidas disponibles y justifiquemos por escrito cuáles serían las más adecuadas, entonces yo puse que ninguna es adecuada por lo que sugiero que sea un triángulo rectángulo porque dice que lo quiere en el patio trasero pero no dice de qué forma está el patio o qué medidas tiene, en caso de que el espacio disponible tenga una esquina de 90°, puede aprovechar la esquina que tenga mayor abertura.

PS2: A mi ninguno me salió, el primero uno de sus lados es 2m y 3m, pero 3 no es la mitad de 7, por eso no se puede, y como dijiste que íbamos a darle una mejor opción, propuse otras medidas. Que fueron 6, 4 y 7.

PS1: Yo también usé otras medidas, porque no pude con esas que se mencionaban.

I: ¿Qué consideraron para anotar esas medidas que proponen?

PS1: Que fuera una piscina triangular.

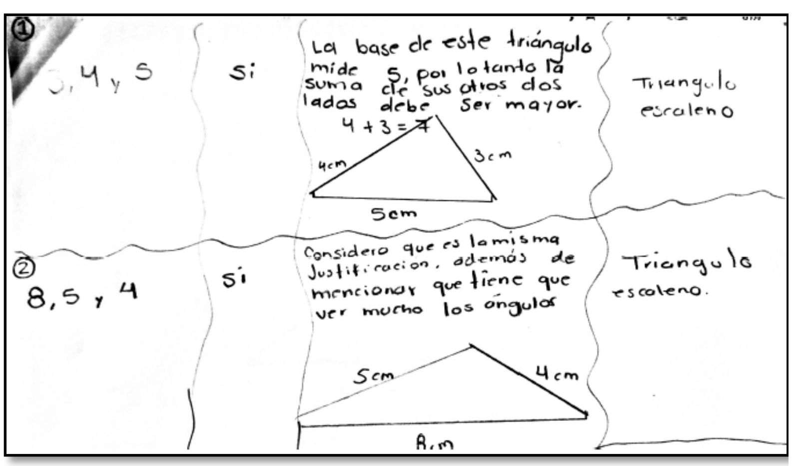
Ante la imposibilidad de la construcción, los argumentos de los profesores aluden a los tipos de triángulos, suponen que cada tipo de triángulo se construye de forma distinta, pero sus explicaciones siguen utilizando un lenguaje natural con pequeños esbozos de lo que vieron anteriormente sobre la clasificación de los triángulos de acuerdo a sus lados y ángulos. El recorte de registro siguiente describe la continuación de la discusión grupal.

> I: ¿Tendrá algo qué ver la longitud de los lados?, ¿cómo influyen?, ¿qué tendríamos qué hacer con esas medidas para que Pablo pudiera construir la piscina triangular?
>
> PS2: Podemos aumentar las medidas de los lados, por ejemplo en este que es 2, 3 y 7, podemos disminuir el 7 para que sea como de 2.3 para que se pueda.
>
> PS1: O disminuirlas
>
> I: ¿Y qué hubiera pasado si yo no les hubiera dado las medidas específicas y solamente les hubiera pedido que construyeran la piscina?, ¿qué deben considerar para que sea posible construir la piscina triangular?
>
> PS1: Las medidas porque no siempre podremos construir un triángulo.
>
> FP3: Modificaría las medidas del más grande, cambié 2, 3 y 3.5

Puede considerarse que, hasta el momento, la justificación de FP2, es lo más cercano a una prueba tipo demostración ya que la validación de la construcción está esencialmente vinculada al referente, más que a los artefactos o al espacio local y real, además que su participación orienta a que las reflexiones de los profesores se centren principalmente en las medidas y la relación entre ellas. A partir de ello, se propone la resolución del segundo problema (las combinaciones de medidas), para que, con los argumentos expuestos hasta el momento puedan percatarse de la relación entre las magnitudes de los lados propuestos y la posibilidad de que puedan formar un triángulo.

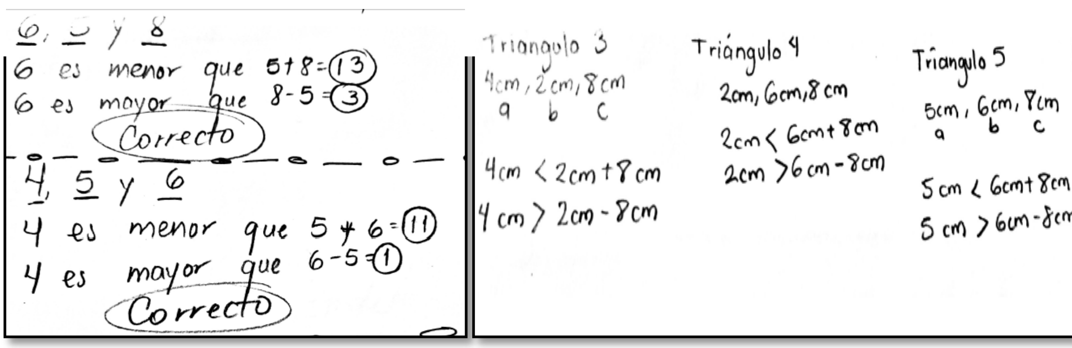
En el segundo problema la mayoría de los profesores emplean los razonamientos consensuados en la anterior discusión grupal para la verificación de las combinaciones de medidas de lados que hacen posible la construcción del triángulo. Solamente en una de las justificaciones (figura 7), permanecen la construcción del triángulo y la condición de construcción como fuente de validación.

Figura 7. Justificación de FP3 del problema Los popotes



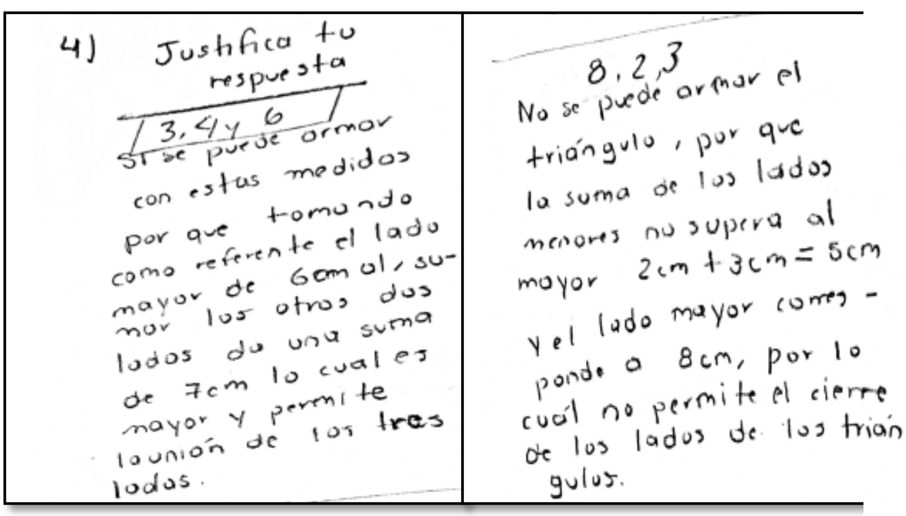
FP3 hace referencia al criterio sobre la medida de los lados, pero traza el triángulo empleando los instrumentos como medio de verificación. Esta prueba es del tipo *ejemplo genérico* porque justifica la afirmación estableciendo un ejemplo concreto como representante de todos los objetos que pertenecen a dicha afirmación. Este tipo de prueba contribuye a la evolución entre pruebas pragmáticas e intelectuales. Las razones de validez se centran en la transformación de un objeto (en este caso lo construye) para que sea un representante característico de determinada clase. En los siguientes casos se utiliza el razonamiento construido en la discusión grupal como fundamento de la prueba (figuras 8 y 9), la aceptación de la relación entre las longitudes de los lados como criterio que posibilita la construcción del triángulo.

Figura 8. Justificación de PS2 y FP1 del problema Los popotes



En la figura 9 podemos apreciar una justificación del mismo tipo que la antes descrita, con la diferencia que en ésta se describe el proceso seguido.

Figura 9. Justificación de FP2 del problema Los popotes



Las justificaciones (figuras 8 y 9) pueden considerarse de tipo *experiencia mental*, la cual se inscribe en la tipología de pruebas intelectuales, el razonamiento de los profesores se desliga de un representante en particular (los tipos de triángulo o el área del terreno) para expresarse a partir de las acciones interiorizadas. Favorecer la aparición de este tipo de pruebas (intelectuales) en el proceso de formación de los profesores constituye la base para que posteriormente realicen demostraciones matemáticas durante el momento de validación de la situación didáctica de referencia comprendida en la propuesta de formación.

Conclusiones

Destaca en la solución del primer problema (La piscina de Pablo), el uso de instrumentos geométricos, su papel en las construcciones geométricas y el dibujo en la organización de los argumentos, la construcción como medio de prueba se pone al centro. Se puede concluir que los tipos de prueba utilizados en el caso de los futuros profesores enuncian propiedades para sus justificaciones mientras que los profesores en servicio y proponen entre las soluciones la medición como recurso para la construcción de triángulos, probablemente porque en su formación es este el tipo de justificaciones que se utilizaban para validar o derivado de la experiencia que han tenido en el aula con estos temas. En este sentido señala Balacheff (1987, citado en Montoya, 2014) que, “la concepción de rigor matemático es un implícito que depende de la institución escolar, y su apropiación por parte de los alumnos requiere de una construcción cognitiva especial, no espontánea, y que debería ser enseñada” (pág. 233).

Se observa un tránsito entre las diferentes pruebas presentadas en los dos problemas por parte de algunos profesores, principalmente de PS1 que evoluciona de ejemplo genérico a experiencia mental, y de FP3 que transita de prueba experiencia crucial a ejemplo genérico, ambas apoyándose en las reflexiones expuestas en la discusión grupal. El momento de validación, permite favorecer el razonamiento geométrico y ampliar el conocimiento matemático que los profesores poseen.

Los resultados también posibilitan observar que las justificaciones evolucionan del primero al segundo problema al clasificarse la mayoría en la tipología de pruebas intelectuales (experiencia mental). En dicha evolución es más factible observar el tránsito entre los paradigmas GI y GII. En GI es válida la deducción a partir de la experimentación basada en el dibujo, mientras que en GII dicha experimentación puede apoyarse en el dibujo o las figuras pero la validación debe centrarse en los axiomas.

Ahora bien, en lo que a estas tareas geométricas concierne, el momento de validación resultó fundamental para observar la evolución de los argumentos de los profesores y constituye un avance significativo para enunciar el criterio geométrico en el momento de la institucionalización, de la situación de referencia a la que pertenecen y que forma parte del dispositivo de formación. Los resultados expuestos en este estudio, sin duda contribuyen al reconocimiento de la importancia del componente prueba, así como demás elementos asociados al ETG, para favorecer el razonamiento geométrico en la enseñanza del triángulo, lo cual se reflejará en el diseño de las situaciones didácticas que los profesores pongan en marcha en el aula, principalmente al desarrollar los diversos tipos de pruebas en sus grupos multigrado.

Referencias

Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En M. Artigue , R. Douady , L. Moreno , & P. Gómez , Ingeniería didáctica en educación matemática/ Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (págs. 7-23). Bogotá: Iberoamérica .

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. Obtenido de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01619264

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Documento Nº 3 Diseño Curricular. (2001). *Orientaciones Didácticas para la enseñanza de la Geometría en la E.G.B.* Provincia de Buenos Aires: Gabinete Pedagógico Curricular. Matemática.

Henríquez , C. (2014). *El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario.* Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives. Obtenido de <halshs00858709>

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A., Montoya, E., & Vivier, L. (2016). Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. *El espacio de trabajo matemático y sus génesis*, (págs. 235-249). Costa Rica.

Montoya, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias, 3*(32), 227-247. doi:http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.

Pizarro, A. (2018). *El trabajo geomérico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos.* Valparaíso, Chile: Université Sorbonne Paris Cité.

SEP. (2006). *Matemáticas I. 1er. Grado, vol. 1 y 2. Telesecundaria.* México: Secretaría de Educación Pública.