XVI Congreso Nacional de Investigación Educativa CNIE-2021

Procesos matemáticos cognitivos en la práctica matemática de alumnos de bachillerato mediante el uso de un software de geometría dinámica

Guadalupe Morales Ramírez
Universidad Autónoma de Querétaro
gmorales28@alumnos.uaq.mx

Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro
vil@uaq.mx

Norma Rubio Goycochea
Pontificia Universidad Católica del Perú
nrubio@pucp.edu.pe

Área temática 06. Educación en campos disciplinares.

Línea temática: El papel de las tecnologías en los procesos educativos, en el marco de los saberes específicos de un campo de conocimiento disciplinar.

Tipo de ponencia: Reporte parcial de investigación.

Resumen

Los procesos cognitivos son desarrollados bajo la estimulación del pensamiento y son emergentes en el desarrollo del aprendizaje del individuo. En el contexto de las matemáticas los procesos matemáticos cognitivos dan cuenta de la práctica matemática desarrollada, pero más *aú*n de los significados personales referentes sobre los objetos matemáticos involucrados. El presente reporte de investigación analiza y describe algunos procesos matemáticos emergentes en la práctica matemática de un grupo de alumnos de bachillerato, cuando usan la geometría dinámica. Para lo cual se implementaron tareas que involucraron justificar el proceso de construcción los teselados o recubrimientos en el plano mediante el uso del software Geogebra. Para el análisis se utilizan herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS), el cual es un marco teórico propio de la Educación Matemática que ayuda a articular aspectos institucionales y personales del conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En análisis reveló la riqueza de las prácticas matemáticas a través de los procesos matemáticos puestos en juego por un grupo de alumnos al utilizar el GeoGebra, principalmente el proceso de visualización fue clave para que los alumnos realizaran el planteamiento de sus argumentos, los cuales fueron manifestados a través de un lenguaje informal y en términos del uso de las herramientas del software dinámico GeoGebra. Estos hallazgos dan pauta para repensar en un rediseño de tareas que movilicen otros procesos matemáticos, como el de particularización y generalización, entre otros.

Palabras clave: *procesos matemáticos cognitivos, geometría dinámica, práctica matemática, enfoque ontosemiótico.*

Introducción

La noción de procesos cognitivos es ampliamente utilizada en diferentes contextos, desde la perspectiva psicológica refiere a los conocimientos y aprendizajes transferidos a través de esquemas de pensamiento, que estimulan la adquisición de conocimientos y el razonamiento lógico, crítico y analítico, esto mediante la solución de problemas, la toma de decisiones y la interacción con el medio (Vygotsky, 1979; Resnick y Collins, 1996). Los procesos cognitivos subyacen y se desarrollan en la mente del individuo, los cuales son complejos de evidenciar por la razón de estar relacionados con el acto de pensar, razonar, inferir, deducir y memorizar toda aquella información proveniente de la interacción social y el uso de objetos o herramientas digitales. Así, en el contexto de la Educación Matemática se habla de procesos matemáticos que están ligados a procesos cognitivos presentes en la resolución de problemas matemáticos, estos procesos matemáticos son evidenciados dependiendo del tipo de problema y el ambiente generado durante su resolución (Perdomo, Camacho y Santos-Trigo, 2012). Según Godino y Batanero (1994) durante la actividad matemática que realiza un alumno, es posible analizar procesos matemáticos a través de la práctica significativa que desarrollan mediante acciones (operativas o discursivas) realizadas en las tareas matemáticas que involucran sus conocimientos y habilidades, donde ellos son capaces de comunicar, validar y generalizar la solución problema.

Por otro lado, en los planes y programas curriculares de matemáticas del bachillerato mexicano (SEP, 2017), se establece que los alumnos deben ser competentes para realizar procesos de argumentación, representación, particularización, generalización, etc., durante la resolución de problemas a través de un razonamiento lógicamente estructurado, con el fin de desarrollar capacidades cognitivas. Asimismo, dentro del marco curricular común que comparten todas las instituciones de bachillerato, se enfatiza sobre uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), lo que conlleva al desarrollo de habilidades digitales como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas. No obstante, la práctica del profesor sigue siendo parte fundamental para que los alumnos desarrollen habilidades y conocimientos sobre el uso de tecnologías digitales (Moreno, 2017), ya que en la actualidad la alfabetización tecnológica es clave para el desarrollo de conocimientos y competencias de los diferentes campos disciplinares (González, 2021). El National Council of Teachers of Mathematics (de Estado Unidos), como referente en la Educación Matemática, resalta que el uso de las tecnologías digitales es parte esencial en el aprendizaje y la enseñanza; estas influyen en la matemática que se enseña y potencia el aprendizaje de los alumnos (NCTM, 2000). En este sentido, las tecnologías digitales vienen a ser un medio por el cual los alumnos podrían ampliar y transformar sus significados matemáticos, así como representar y acceder a los objetos matemáticos.

Algunos estudios (Pea, 1987; Hoyles, Noss y Kent, 2004; Artigue, 2011; Symons y Pierce, 2019) han profundizado sobre la inmersión de las tecnologías digitales en el aula de matemáticas, lo que da muestra de la evolución que han provocado tanto en la enseñanza y como en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que cada herramienta digital genera un campo de acción, que a su vez impone ciertas condiciones o restricciones que el alumno debe identificar, comprender y aprender a gestionar. Asimismo, las condiciones o restricciones posibilitan que resurjan nuevas formas de acción (Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche, 2003).

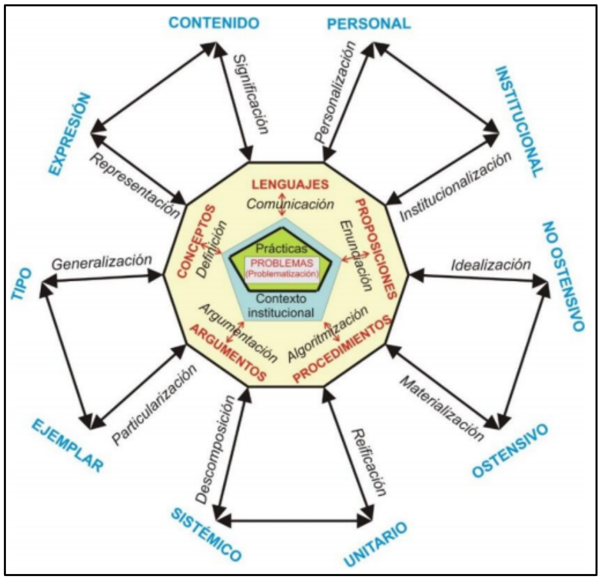
Para la enseñanza de las matemáticas existen diversas herramientas digitales que facilitan el aprendizaje, en particular el Software de Geometría Dinámica (SGD) es de las que ha tenido mayor impacto para gestionar el aprendizaje de las diferentes áreas de la matemática, y es comúnmente implementado en las clases. Dicho software funge como un medio útil para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, pues sus herramientas específicas juegan el rol de mediador semiótico para favorecer y propiciar un aprendizaje significativo (Radford, 2006). El SGD permite a los alumnos explorar, realizar conjeturas involucrándolo en un proceso de formulación, prueba y reformulación de ideas matemáticas. Por lo tanto, analizar procesos matemáticos a partir de una situación problema permite tener referencia del impacto y la influencia que tiene este tipo de tecnología digital en el desarrollo de las prácticas matemáticas.

En este sentido, es importante cuestionarse sobre: ¿Qué procesos matemáticos cognitivos recurren los alumnos de matemáticas en un ambiente de geometría dinámica? Esto nos lleva a plantear como objetivo de investigación: analizar y describir los procesos matemáticos cognitivos que son movilizados o recurrentes por alumnos de bachillerato en un ambiente de geometría dinámica, en particular cuando utilizan el software GeoGebra. Cabe mencionar que los procesos matemáticos cognitivos a los que se recurren es este trabajo, son los propuestos por la teoría del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), misma que da fundamentación al desarrollo de este estudio.

Desarrollo

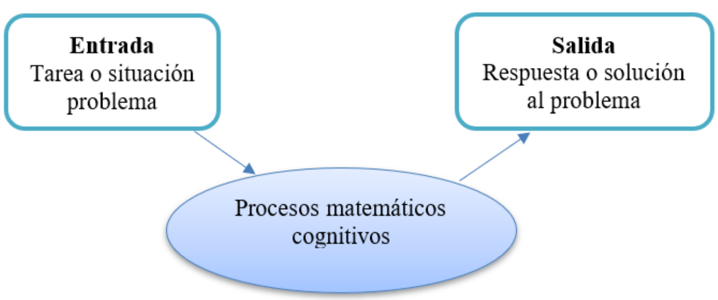
El Enfoque Ontosemiótico corresponde a herramientas teórico-metodológicas que permiten articular aspectos institucionales y personales del conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007). En este estudio se considera la noción la *configuración de objetos y procesos matemáticos* (Figura1) para analizar procesos matemáticos puestos en juego por alumnos de bachillerato cuando utilizan el software GeoGebra. Desde la perspectiva del EOS, en las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) realizadas por el individuo emergen conceptos, procedimientos, argumentos, propiedades que son comunicados a través de un lenguaje verbal, gestual, gráfico, simbólico, etc., esto es a lo que se entiende como objeto matemático.

Figura 1: Configuración de objetos y procesos matemáticos. (Godino, Batanero y Font, 2019).



La configuración de objetos y procesos puede ser epistémica o cognitiva. Esta última se asocia al sistema de prácticas que el individuo desarrolla; mientras que la epistémica corresponden al sistema de prácticas promovidos por la institución, ambas configuraciones permiten integrar objetos matemáticos. En la Figura 2 se muestra el esquema que ejemplifica un *proceso matemático,* el cual "es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta ante una demanda dada, es una secuencia de acciones desarrollada para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada), estas tareas están sometidas a reglas matemáticas" (Rubio, 2012, p. 107).

Figura 2: Esquema del proceso matemático emergente en la práctica matemática. Elaboración propia

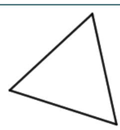
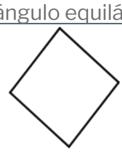
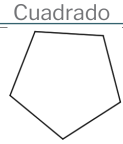


El EOS considera una lista de dieciséis procesos matemáticos (Figura 1), seis de ellos (comunicación, argumentación, algoritmización, enunciación, definición y problematización) podríamos relacionarlos con los objetos matemáticos primarios (lenguaje, argumento, procedimientos, definiciones, proposiciones y situaciones problema) que emergen y estructuran la configuración ontosemiótica (Decágono de la Figura 1). Mientras que el resto de los procesos matemáticos se agrupan en facetas duales, las cuales son institucional - personal, ostensivo-no ostensivo, unitario-sistémico, expresión-contenido, extensivo-intensivo, como una forma de *estar participando* en el desarrollo de la práctica matemática. Tanto las dualidades como los objetos matemáticos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto.

El estudio es de corte cualitativo y la muestra poblacional que participó, en este primer acercamiento al desarrollo de procesos matemáticos, fue de 20 alumnos de una escuela de bachilleres de la ciudad de Querétaro, México, quienes trabajaron la actividad en parejas dado que el número de computadoras fue limitado para realizarlo de manera individual.

Los resultados reportados en este trabajo corresponden a un primer acercamiento al análisis de algunos procesos matemáticos antes mencionados, lo que constituye a la descripción de ellos respecto a un grupo de 10 parejas de alumnos, mismos que centraron su actividad matemática en la construcción de un teselado regular, como tarea principal, utilizando herramientas del software GeoGebra, particularmente el de traslación, rotación y simetría axial. Con el fin de ejemplificar algunos de los procesos matemáticos desarrollados, respecto a la actividad de una pareja de alumnos, se muestra en la Tabla 1 la situación (entrada) y la respuesta del alumno (salida) donde a través de la faceta dual podemos identificar y asociar un proceso matemático.

Tabla 1: Procesos matemáticos en la práctica realizada por un par de alumnos. Elaboración propia

Actividad: Construcción del teselado regular				
Entrada (situación problema)	Salida (respuesta del alumno)	Faceta dual	Proceso matemático	
1. Si quisieras teselar o cubrir un plano con algún polígono regular ¿Qué polígonos regulares utilizarías? Justifica tu respuesta.	*Cuadrado, triángulo equilátero, rombo, hexágonos. Son equiláteros y encajarían perfectamente.*	Expresión-contenido Ejemplar-tipo	Significación Particularización	
2. Dibuja un teselado con algún polígono regular que hayas propuesto en la pregunta anterior.	*'Se dibuja una cuadricula"*	Expresión- contenido Ejemplar - tipo	Significación Particularización	
3. Contesta lo que se pide en la siguiente tabla.	Marca con una X cuál de estos polígonos pueden teselar un plano			
Polígono regular		¿Por qué?		
 Triángulo equilátero	X	*Sus ángulos son iguales y se acoplan perfectamente.*	Expresión-contenido	Representación y significación Visualización
 Cuadrado	X	*Sus ángulos pueden dar perfectamente 360°*	Expresión – contenido	Significación Visualización
 Pentágono		*Sus ángulos en conjunto no forman 360°*	Expresión – contenido	Significación Visualización
 Hexágono	X	*Sus ángulos miden 60° multiplicados por su número de lados nos da 360°*	Expresión-contenido Sistémico-unitario	Significación Descomposición
 Heptágono		*Sus ángulos no suman 360°*	Expresión-contenido	Significación
 Octágono		*Sus ángulos internos no suman 360°*	Expresión-contenido	Significación
 Eneágono		*Sus ángulos no tienen 360°*	Expresión-contenido	Significación

Entrada (situación problema)	Salida (respuesta del alumno)	Faceta dual	Proceso matemático
4. Mueve el punto D sobre la construcción del archivo de **teselado_triángulos**. ¿Forma un teselado? ¿Por qué?	*Sí, mantiene sus propiedades, pero aumenta de tamaño*	Personal-institucional Expresión- contenido	Institucionali-zación Significación
5. Explora la construcción de triángulos y explica cuáles movimientos crees que se necesitó para construirlo. Explica lo más que puedas.	*Rotación, para que quedasen acoplados.* *Traslación para que roten y se muevan simultáneamente.*	Respuesta inconsitente	
6.¿Cuánto mide la suma de ángulos que rodea el punto D? Justifica tu respuesta.	*360°, está formado por 6 ángulos de 60° por eso este acoplado perfectamente.*	Ejemplar – tipo Expresión – contenido	Particularización Significación
7. Utiliza las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) para construir un teselado en el GeoGebra con hexágonos regulares. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: **T6_ APELLIDO** • Recuerda que para la traslación necesitas un vector y la herramienta de traslación • Para la rotación ocupas el centro de rotación, puede ser un punto, el ángulo y la herramienta para rotar . • Para la reflexión necesitas tu eje de simetría que puede ser una recta o segmento de recta y la simetría axial .	1. *Se construye un hexágono regular* 2. *Se coloca un punto enseguida de uno de los vértices del hexágono para colocar un vector horizontal entre ambos puntos.* 3. *Posteriormente se usa la herramienta de traslación seleccionando el vector y hexágono original, este polígono se traslada cuatro veces de manera horizontal.* 4. *Se coloca un vector vertical hacia abajo, para aplicar traslación de cada hexágono construido en el paso anterior.* 5. *cada hexágono se traslada dos veces hacia abajo, sin embargo, al aplicar la prueba de arrastre el teselado se deforma.*	Ostensivo – no ostensivo	Algoritmización y Materialización
8. Si mueves algún punto del hexágono original con la herramienta ¿Sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	*Sí, porque los demás siguen manteniendo su forma.*	Expresión-contenido	Significación Representación Visualización
9. Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿Cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste en GeoGebra para la construcción del teselado.	1. *Crear un polígono regular* 2. *Reflejar la figura* 3. *Ajustarlas*	Ostensivo- no ostensivo Expresión-contenido	Materialización Significación Representación Visualización

Los procesos matemáticos mayormente identificados en este primer acercamiento corresponden al de visualización, materialización, significación y representación. En un primero momento, los alumnos recurren a la materialización para proponer figuras poligonales regulares que utilizarían en la construcción de un teselado regular, por lo que el proceso de idealización está relacionado con el de materialización al proponer de manera escrita y posteriormente mediante un dibujo los polígonos que utilizarían para la construcción de un teselado regular. Las situaciones que involucraron la explicación del proceso de construcción, los alumnos recurrieron a una relación entre el proceso de significación, representación y visualización, ya que, a partir de la aplicación de herramientas del GeoGebra, como el de traslación, simetría axial, vectores, ángulos de rotación, etc., los alumnos hicieron explicito la secuencia de pasos que realizaron en la construcción de los teselados regulares. Esto permitió que el significado fuera desarrollado en términos de la usabilidad de las herramientas del GeoGebra, recurriendo al concepto y representación de teselado regular.

Estos procesos nos permiten conocer cuáles son recurrentes entre los alumnos, sin embargo, el proceso matemático más recurrente fue el de materialización, el cual se relaciona con la dualidad ostensivo-no ostensivo, generalmente no perceptibles. No obstante, son usados en las prácticas a través de sus ostensivos asociados, por ejemplo, símbolos, gráficos, notaciones, etc. El proceso de materialización está estrechamente relacionado con el proceso de idealización puesto que se puede pasar de un objeto ostensivo a un objeto no ostensivo, y para operativizar estos objetos es necesario hacer uso de representaciones ostensivas, lo que conlleva a un proceso de materialización. En esta realidad, los alumnos destacan en gran medida el proceso de construcción donde a través del software mediatizan y materializan el pensamiento, es decir, el proceso de materialización sitúa el conocimiento matemático en el campo del artefacto (Radford, 2006). En este estudio resaltamos el proceso de materialización, el cual fue identificado cuando los alumnos propusieron, a lápiz y papel, la combinación de polígonos regulares que utilizarían en la construcción de teselados regulares, pero también cuando aplicaron las herramientas del *GeoGebra* para la construcción, por ejemplo, la traslación, la simetría axial, los vectores, los ángulos de rotación, etc. Sin embargo, aunque las herramientas del software se materializaron en la construcción, el proceso de construcción, pocos alumnos explicaron correctamente su procedimiento recurriendo a un proceso de visualización a través de un lenguaje informal y poco estructurado. Según el EOS, son prácticas visuales o prácticas no visuales, en donde se pone en juego la percepción visual y puede ser solo mental (objetos no ostensivos) o ser objetos perceptibles mediante una representación física (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012).

Conclusiones

Los resultados parciales mostrados en este estudio son relevantes en el sentido de que nos permite conocer los procesos matemáticos cognitivos a los que los alumnos tienden a movilizar cuando se involucran en un ambiente de geometría dinámica, lo que da pauta para comprender cómo razonan los alumnos y en que medida el software GeoGebra los provoca a desarrollar significados matemáticos, así como poner en juego sus conocimientos y habilidades matemáticas.

Es necesario resaltar que el uso del software GeoGebra en este estudio evidenció un proceso discursivo, donde no se muestra un lenguaje propio de la matemática, lo que conlleva a decir que sus prácticas matemáticas son desarrolladas a través de un lenguaje informal. Además, los alumnos no relacionaron ni comprendieron las propiedades matemáticas involucradas en la construcción, lo cual desembocó en argumentos anclados a elementos visuales propiamente del software. Lo que deja entre ver que la percepción visual juega un papel relevante en el desarrollo de su conocimiento matemático, y más aún cuando se involucra la construcción de objetos geométricos.

Por lo tanto, es necesario que el alumno comprenda por un lado la lógica de un software dinámico, pero también el significado que representa cuando se pone en jugo conceptos y propiedades matemáticas. Los procesos matemáticos identificados parcialmente, hasta el momento en esta investigación, ayudan a marcar una pauta para realizar un rediseño de las actividades que permita evidenciar otros procesos matemáticos del EOS, así como la necesidad de profundizar en estos para dar un panorama más amplio que permita dar cuenta de cómo se desarrollo el aprendizaje en los alumnos con este tipo de tareas y en un ambiente de geometría dinámica.

Referencias

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. (8).

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 14(3). 325-355.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. The International Journal on Mathematics Education. 39 (1-2). pp. 127-135.

Godino, J. Gonzato, M., Cajaraville, A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*. 30 (2). 109-130.

González, M. (2021). Competencias digitales del docente de bachillerato ante la enseñanza remota de emergencia. Apertura, 13(1), pp. 6-19. http://dx.doi.org/10.32870/ Ap.v13n1.1991

Hoyles, C., Noss, R., & Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3), 309.

Lagrange, B., Artigue, M., Laborde, C. & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. pp. 239–271.

Moreno, H. (2017). Encrucijada del discurso matemático escolar contemporáneo: conocimientos profesionales del profesor, tecnologías digitales y prácticas socioculturales. En Hernandez, L. & Slisko, Josip (Ed.), *Avances en la educación matemática basada en la investigación*. (Primera edición). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

National of Council Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles standards for school mathematics, NCTM. *Reston. VA*.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. *Cognitive science and mathematics education*, 89-122.

Perdomo-Díaz, J., Camacho, M. & Santos-Trigo, M. (2012). Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM (pp. 65-76). Ciudad Real: SEIEM.

Radford. L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. 103-129.

Resnick, L., & Collins, A. (1996). Cognición y aprendizaje. *Anuario de psicología*, *69*(69), 187-197.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona. España.

SEP. (2017). El modelo educativo 2016; el planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa, Ciudad de México: MAG Edición en Impresos y Digitales, S.C.

Symons, D., & Pierce, R. (2019). Active Use of Digital Technologies in Mathematical Problem Solving. In *Redesigning Higher Education Initiatives for Industry 4.0* (pp. 183-203). IGI Global.

Vygotsky, L. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Grijalbo.