



XVI
Congreso Nacional de
Investigación Educativa
CNIE-2021

Resolución de problemas de porcentajes con estudiantes de primero de secundaria. Logros y errores

Estefanía Aylín Loyola Rojas

Universidad Pedagógica Nacional

loyolaestefania98@gmail.com

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres

Universidad Pedagógica Nacional

isandoval@upn.mx

Área temática 06. Educación en campos disciplinares.

Línea temática: Análisis de los procesos de aprendizaje y del desarrollo de los conocimientos y saberes disciplinarios.

Tipo de ponencia: Reportes parciales o finales de investigación.



Resumen

El porcentaje es un contenido con amplio uso social. Esta noción multifacética, dada su vinculación con otras nociones matemáticas tanto de aritmética como de análisis de datos, genera retos para su comprensión y aplicación tanto en alumnos como en docentes. Reportamos los resultados de un estudio en el que 28 estudiantes de primero de secundaria de la Ciudad de México resuelven diferentes tipos de problemas del porcentaje (aplicación de un por ciento, determinación de un por ciento y determinación de una base) en diversos contextos (precios, transporte público, distancias, descarga de archivos, interpretación de información en imágenes) y representaciones (verbal, en tablas, imágenes y gráfica circular). Dado el contexto derivado de la pandemia por COVID-19, para la recolección de datos se usó un cuestionario vía “Google Forms” con 11 problemas con opción de respuestas abiertas y entrevistas vía WhatsApp. En este estudio encontramos que los estudiantes tienen mayores dificultades y errores al resolver problemas de “determinación de la base” y mayores logros en la “aplicación de un por ciento”, es decir, el nivel de desempeño varía según el tipo de problema a resolver.

Palabras clave: Porcentaje, secundaria, estudiantes, logros, errores.

Introducción

Las matemáticas escolares ofrecen a los estudiantes oportunidades para la adquisición de herramientas que les permiten resolver problemas, algunos de ellos, presentes en los contextos cotidianos. El porcentaje es una de las nociones matemáticas con amplio uso social, sin embargo, para muchas personas les resulta difícil de comprender (Lembke y Reys, 1994). Mendoza y Block (2010) explican que esta dificultad estriba en la interrelación con otros temas de matemáticas. En sus palabras,

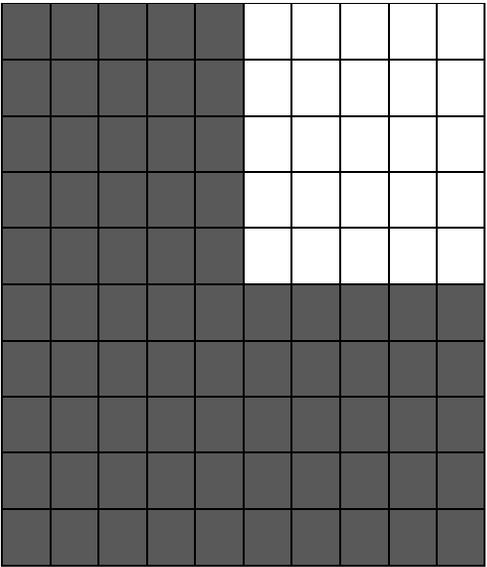
[Por] su complejidad conceptual: se trata de una noción multifacética vinculada con algunas de las nociones más complejas de la aritmética básica, las de razón, fracción y operador multiplicativo decimal, de las cuales hereda las problemáticas didácticas. Por otro lado, existe una fuente importante de dificultades relativas a la enseñanza, no solamente del porcentaje sino, sobre todo, de las nociones vinculadas a éste (p. 178).

Para entender el concepto de porcentaje y su aplicación, es necesario que “un alumno [reconozca] qué problemas permite resolver, en qué problemas resulta insuficiente, en qué problemas facilita la resolución y la hace más simple, qué dificultades permite superar” (Lia, *et al.*, 2006, p. 14); es decir, el estudiante tiene que saber diferenciar entre “el tanto por ciento (o tasa), la cantidad inicial (o cantidad base) a la que se aplica el tanto por ciento y la cantidad final que resulta (el porcentaje)” (SEP, 2017, párr. 4); ya sea en contexto de aritmética como en estadística.

En la revisión de literatura encontramos que el porcentaje ha sido abordado desde lo conceptual, el aprendizaje y las dificultades en ese proceso; y desde propuestas para propiciar en los alumnos su aprendizaje o estrategias para su enseñanza. Algunos autores consideran que el trabajo previo y comprensión de las fracciones es central para abordar los porcentajes (Navarrete, 1993; Linares y Sánchez, 1997; Reséndiz, 2010). Además sugieren la necesidad de comprender de otros conceptos como razón, equivalencia, números decimales y fracciones, procesos de cambio, proporcionalidad; y el diseño de estrategias que apunten hacia la comprensión y aplicación del porcentaje en contextos reales y sociales (Valenzuela, 1993; Flores, 2008).

Esta complejidad conceptual se ilustra en cómo se define en textos escolares de primero de secundaria. Para ello, retomamos dos libros de texto usados durante el ciclo escolar 2019-2020. Ambos coinciden en que el porcentaje es una relación proporcional entre cantidades. Trigueros *et al.* (2017, p. 69), lo definen como “la representación de una razón entre dos cantidades en las que una de ellas siempre es 100”. Por su parte, Sánchez, Hoyos y Saiz (2018, p. 156) mencionan que “el porcentaje es la parte de un total expresada en centésimos”. Es decir, puede definirse como la representación de las centésimas partes de cualquier cantidad y escribirse de diferentes maneras como se muestra en la tabla siguiente.

Tabla 1. Diferentes representaciones de un porcentaje

Porcentaje	Fracción	Decimal	Gráficas
75%	$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$	0.75	 <p>75 cuadrados de una rejilla de 100 cuadrados</p>

Por lo anteriormente descrito, el objetivo de este estudio fue analizar el proceso de resolución de problemas de porcentajes que el alumno de primero de secundaria hace, centrándose en el contexto, representación y tipos de problemas.

Marco referencial

Tipos de situaciones o problemas relacionados con el porcentaje

Hay diferenciación entre tipos de problemas para resolver problemas de porcentaje, según documentos oficiales (SEP, 1993, 2006, 2017). A continuación se describen.

La SEP (1993, p. 123) identifica 3 tipos de casos para resolver problemas de porcentaje:

La aplicación de un por ciento o cálculo de un porcentaje, por ejemplo, obtener el 10%, o el 15%, o el 25% [...] de una cantidad dada.

La determinación de un por ciento, es decir, qué porcentaje representa una cantidad de otra. Por ejemplo: ¿Qué porcentaje representa 240 de 380?

La determinación de una base cuando se conoce el porcentaje que representa una cantidad de otra; por ejemplo, si el 35% de una cantidad es 175, ¿cuál es la cantidad?

Mientras que la SEP (2006, p. 45) muestra 4 situaciones para los problemas del tanto por ciento:

- Aplicar el porcentaje a una cantidad: ¿Cuánto es el 12% (12/100) de 25?
- Determinar qué porcentaje representa una cantidad respecto a otra: ¿Qué porcentaje es 12 de 25?
- Determinar la base de un porcentaje (desglosar el IVA): Si 575 es el total a pagar, incluido el 15% de IVA, ¿cuál es la cantidad sin IVA?
- Es conveniente plantear problemas en los que el porcentaje es mayor que 100, como el siguiente:
- Un productor de piña vende cosecha al distribuidor en \$0.75 el kilogramo. En el supermercado se vende a \$4.50 el kilogramo. ¿En qué porcentaje se incrementa el precio?

Por su parte, en la reforma de 2017, la SEP retoma nuevamente los tres tipos de problemas planteados en 1993, aunque varía el título. A continuación, se retoman los nuevos nombres para los tipos de problemas aunque, usaremos los mismos ejemplos de 1993 para que sea más clara la relación entre ambos documentos oficiales.

- “El tanto por ciento (o tasa)” (SEP, 2017). Por ejemplo, “obtener el 10%, o el 15%, o el 25% [...] de una cantidad dada” (SEP, 1993, p. 123)
- “La cantidad inicial (o cantidad base) a la que se aplica el tanto por ciento” (SEP, 2017). Por ejemplo, “si el 35% de una cantidad es 175, ¿cuál es la cantidad?” (SEP, 1993, p. 123)
- “La cantidad final que resulta (el porcentaje)” (SEP, 2017). “¿Qué porcentaje representa 240 de 380?” (SEP, 1993, p. 123).

El abordaje didáctico del contenido de porcentajes, sugerido en estas tres reformas educativas, dan cuenta de pocos cambios al respecto. Desde nuestra interpretación, se han agregado conceptos, relaciones con otros temas (fracción, razón, decimal); y en todas ellas se ha sugerido el uso de la calculadora.

Representaciones semióticas y el aprendizaje conceptual en matemáticas

En el proceso de aprendizaje, es necesario brindar a los sujetos oportunidades con actividades que permitan explorar diversos tipos de problemas, poner en juego lo previamente aprendido y construir nuevos conocimientos. Para acceder a los objetos matemáticos, sólo se puede a través de alguna de sus representaciones, pues no hay un acceso directo a ellos mediante la percepción o por medio de una experiencia directa (Duval, 2004). Autores como afirman, que no podemos acceder directamente a los objetos matemáticos. En este sentido las representaciones -semióticas- funcionan como mediadores de la actividad matemática. En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, es necesario que los aprendices logren comprender que un mismo objeto puede tener diferentes representaciones, a través de registros de representación, y cada uno de estos “es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa” (Duval, 1998, p. 185). Referimos a diferentes registros de

representación como, por ejemplo, lenguaje natural, gráfico, numérico, tabular o simbólico. Con estos registros el sujeto puede manipular y procesar cada una de esas representaciones, de forma tal que los distintos modos de representarlas expresen, a su vez, las propiedades y relaciones estructurales entre los objetos.

Para Duval (2006) un registro semiótico de representación permite realizar la actividad matemática, ya que estos siempre implican la sustitución de alguna representación semiótica en otra. Asimismo, él menciona dos clases de transformaciones: la conversión y el tratamiento. Los tratamientos en los que se transforma una representación a otra dentro del mismo registro (por ejemplo, cuando se efectúan operaciones aritméticas); mientras que la conversión es cuando se transforma la representación en otro registro distinto. Pasar de un porcentaje numérico a su representación gráfica.

Con las ideas anteriores, en este estudio nos interesó responder: ¿Cuáles son los principales logros y errores de alumnos de primero de secundaria al resolver problemas de porcentajes (en diferentes contextos, registros de representación y tipos de problemas)?

Metodología

La naturaleza del objeto de estudio es investigar el proceso de resolver problemas de porcentajes que alumnos de primero de secundaria realizan, centrándonos en las representaciones, contextos y tipo de problemas que generaron mayores éxitos o dificultades. Este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo, en particular, el estudio de caso instrumental (Stake, 2005) porque se enfoca en comprender más allá de una respuesta (correcta o incorrecta); sino comprender las razones que los llevaron a obtener dichos resultados.

Contexto del estudio y sujetos participantes

Este estudio se realizó durante la situación de emergencia causada por la pandemia del brote del virus SARS-CoV-2 (2020-2021). Los participantes fue un grupo de 28 alumnos de primero de secundaria de una escuela secundaria técnica, ubicada en la Alcaldía de Tlalpan, Ciudad de México, de los cuales 20 son alumnas y 8 alumnos, con edades aproximadas entre 11 y 13 años. Los estudiantes que participaron en este estudio cumplieron con los siguientes criterios:

- Previamente abordaron el tema sobre porcentaje, de ese grado.
- Acceso a la tecnología para responder el cuestionario y la entrevista.
- Disponibilidad para ser entrevistados, en caso de ser necesario.
- Tener interés en participar de manera voluntaria.

Por otra parte, los instrumentos utilizados fueron un cuestionario y entrevistas. El primer instrumento constó de 11 preguntas abiertas para la resolución de problemas en torno a contextos, representaciones y tipos de problemas referidos en plan y programas (SEP, 1993; 2006 y 2017) como en el libro de texto gratuito usado en la secundaria (Trigueros, *et al.*, 2019), véase tabla 2.

Tabla 2. Estructura de las preguntas del instrumento sobre la resolución de problemas de porcentajes

Pregunta	Representación	Tipo de caso	Contexto
1	Verbal	La aplicación de un por ciento	Precios
2	Verbal	La aplicación de un por ciento	Transporte público
3	Figura	La determinación de la base	Transporte público
4	Gráfica circular	La determinación de un por ciento	Distancia
5	Gráfica circular	La determinación de un por ciento	Distancia
6	Gráfica circular	La aplicación de un por ciento	Peso - Cantidad
7	Verbal	La determinación de la base	Descarga de archivos
8	Tabla	La determinación de un por ciento	Peso - Cantidad
9	Verbal	La aplicación de un por ciento	Precios
10	Verbal	La determinación de la base	Transportes públicos
11	Figura	La determinación de un por ciento	Población

Posteriormente, se realizaron ocho entrevistas. A partir de la selección de aquellos con mayores logros o errores en la resolución de los problemas planteados en el cuestionario, se les invitó a la entrevista para profundizar en los procedimientos empleados y las decisiones tomadas. Estas entrevistas se hicieron vía telefónica y mensaje de texto instantáneos.

Resolución de problemas de porcentaje. Una mirada con estudiantes de primero de secundaria

Los alumnos encuestados mostraron mayor éxito para resolver problemas en la aplicación de un por ciento (tasa), seguido por la determinación de un por ciento (porcentaje) y se reduce, considerablemente, en aquellos problemas que requieren determinar una base (cantidad base). Asunto que invita a reflexionar posibles causas para la integración de estas diferentes interpretaciones de un mismo concepto. A continuación, se describe de

manera global algunos de las respuestas dadas a algunos problemas propuestos en el cuestionario; y después, se profundiza con un caso, a fin de comprender qué acciones lo llevaron a obtener sus respuestas.

La aplicación de un por ciento. Un tipo de problema con mayor comprensión

En la aplicación de un por ciento, el estudiante necesita calcular el porcentaje de una cantidad total dada. Por ejemplo, dado un porcentaje (10%, 15%, 50%, etcétera), se le brinda la cantidad total, el alumno debe considerar que el porcentaje a calcular es un número proporcional respecto a otro (el total) que se ha dividido en cien partes.

Pregunta 1. Alicia tiene un total de \$500.00, y gastó en comida el 30%. ¿Cuánto dinero gastó?

En este problema era necesario hacer una conversión del lenguaje natural al numérico para luego, hacer un tratamiento en este último registro (operaciones aritméticas). Es decir, establecer la relación entre los números y considerar al porcentaje como una cantidad que representa la proporcionalidad de una parte respecto a un total que se considera el 100%. En la tabla 3 se presenta el tipo de respuestas dadas por los participantes.

Tabla 3. Logros y errores al aplicar un por ciento, de lo verbal a lo numérico

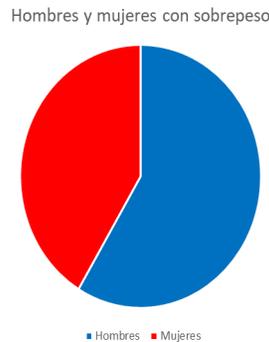
Logros		Errores	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
22	\$150	1	\$16.666
		1	\$470
		1	\$435
		1	\$6
		1	\$130
		1	\$166
TotalL: 78.57%		Total: 21.42%	

En este problema, el 78.57% de los estudiantes contestaron \$150.00, resultado de multiplicar 500 por 0.30 o bien, multiplicar 30 por 500 y el resultado dividirlo entre 100. Las respuestas incorrectas muestran diversidad de procedimientos, como son:

- **\$16.666**, dividió 500 entre 30.
- **\$166**, mismo procedimiento anterior, pero, después lo multiplicó por 10.
- **\$470**, el estudiante restó 30 a 500.
- **\$435**, introdujo erróneamente los datos en la calculadora.
- **\$6**, resultado de multiplicar 30 por 100 y después dividirlo entre 500.
- **\$130**, dividió 500 entre 2, posteriormente, 250 entre 2 y como resultado obtuvo 125, a eso le sumo 5.

En este tipo de problema, la mayoría de los estudiantes pudo resolver el problema al considerar al porcentaje como una parte de un total dado. Los errores identificados confirman lo señalado por Mendoza y Block (2010) que para la comprensión de los porcentajes se necesita relacionar otros conceptos como son la razón, la proporcionalidad, la equivalencia, y la fracción. Sin esta relación, el estudiante se limita a acomodar los datos del problema y realizar un procedimiento que lo lleva a obtener un valor numérico que puede ser erróneo.

Pregunta 6. De la siguiente gráfica circular, anota el porcentaje aproximado, de cada color, según tu criterio



En este problema el estudiante necesita interpretar los datos de la gráfica circular y estimar un porcentaje. Por un lado, identificar el título (tema abordado) y las convenciones de color, el rojo que indica la cantidad de mujeres con sobrepeso y el azul, lo correspondiente a los hombres.

Las explicaciones dadas en las respuestas de los estudiantes permiten afirmar que algunos estimaron los valores usando la información visual del color (azul – rojo) o por lo que cada color representaba, en este caso el género (hombre – mujer). Ambas consideraciones eran correctas, aunque no todos consideraron que la suma de los porcentajes determinados debía ser 100%, como se ilustra en la siguiente tabla.

Tabla 4. Logros y errores en la aplicación de un por ciento, de lo gráfico a lo numérico

Logros		Errores	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
10	60 % Hombres; 40% Mujeres		
7	60 % Azul; 40% Rojo		
2	60 y 40 (%)		
2	37.7% y mujeres 62.5% hombres		
2	45% Rojo; 55% Azul	1	55 y 70
1	65% hombres y 35% mujeres		
1	55% hombres y 45% mujeres		
1	58% hombres y 42% mujeres		
1	63% hombres y 37% mujeres		
Total: 96.42%		Total: 3.57%	

La mayoría de los estudiantes logra interpretar correctamente la gráfica circular y su significado en términos de porcentaje. Solo un estudiante propuso dos números que no correspondían al cien por ciento del total; esto es, 55 y 70. Este error se podría explicar desde la comprensión conceptual, en términos de dificultades para realizar conversiones (Duval, 2006). Es decir, establecer correspondencia entre un registro gráfico y uno numérico.

La determinación de un por ciento

En este tipo de problema es necesario calcular el porcentaje, identificar las dos valores, una de ellos representa el tanto por ciento y el otro, el total.

Pregunta 4. Para Juan, un corredor profesional, es necesario correr 15 kilómetros diarios. Marlén corre sólo 5 kilómetros diarios. Determina, ¿qué porcentaje representa la distancia que corre Marlén respecto a la de Juan?

En este problema los alumnos debían relacionar dos cantidades, y considerar el 100% lo que corre Juan y calcular la equivalencia respecto a lo que corre Marlén.

El 57.14% de los estudiantes respondieron que Marlén corre el 33.33% a comparación con Juan, este porcentaje de estudiantes realizó una regla de tres; sin embargo, el 17.86% hizo un cálculo mental buscando el valor faltante para obtener el total y dio un valor estimado (30%). Siete estudiantes dieron respuestas como:

- 30% a Marlén 70% a Juan, el estudiante no consideró que lo que corre Juan equivale al 100%;
- 0.75, resultado de multiplicar 15 (cantidad de kilómetros que corre Juan) por 5 (cantidad de kilómetros que corre Marlén) y dividirlo entre 100;
- 1/3, encontró la relación entre lo que corre Marlén respecto a lo que corre Juan, pero no calculó el porcentaje que corresponde dicha fracción.
- 40%; 10%; 70%; resultado de una errónea interpretación de la pregunta pues no es posible identificar el proceso realizado.

En este caso, las respuestas ilustran lo afirmado por Venezky (1988), respecto a que algunos estudiantes pueden realizar un plan de solución incorrecto, derivado de multiplicar o dividir las cantidades del problema; en otros casos, puede acudir a aproximaciones o cálculos mentales sin usar los datos correctamente, al parecer, es un reflejo de falta de comprensión de lo que se les pide en la pregunta.

La determinación de una base. Un mayor reto para los alumnos

Para la determinación de una base, se le proporciona al estudiante un porcentaje de una cantidad y se calcula la cantidad total que representa esta proporción. Por ejemplo, si el 54% de una cantidad es 195, ¿cuál es la cantidad?

Pregunta 7. Pedro se encontraba descargando dos trabajos en línea y observó que llevaba solamente el 27% del total. Si ha tardado 15 minutos, ¿cuánto tiempo se estima que tardará para terminar la descarga de ambos archivos?

En este problema el estudiante debía calcular el tiempo total necesario para que los dos archivos terminaran de descargarse, infiriendo que el flujo de descarga era constante. Una estrategia posible era convertir el porcentaje en un número decimal, hacer una tabla de variación o bien, la regla de tres.

Tabla 5. Logros y errores al determinar de una base

Logros		Errores	
Alumnos	Respuestas	Alumnos	Respuesta
7	55 min	4	50 min
		3	60 min
		2	30 min
		1	04.05
		1	42 min
		1	1 h 48 min
		1	120
3	55.55 min	1	180
		1	55.5%
		3	40 min, 40.55 min
Total: 46.42%		Total: 53.57%	

En este problema, el 46.42% de los estudiantes respondieron que Pedro tardaría en descargar ambos archivos en 55.55 minutos, y usaron una regla de tres. Por otra parte, un poco más de la mitad de los encuestados no logró responder correctamente. Nuestra interpretación de sus respuestas es:

- Al parecer, el resultado de hacer cálculo mental aproximado los llevó a obtener resultados como 50 min; 60 min; 30 min; 40 min, 42 min; 1 h 48 min; 120; 180;
- 55.5%, en este caso, parece confundir entre la representación del 55.5, si corresponde a minutos o porcentaje;
- 40.55 min fue el resultado de restar 55.55 menos 15;
- 4.05 min, es el resultado de restar 55.55 menos 15 entre 10.

Se interpreta que, en esta pregunta, poco más de la mitad de los estudiantes hizo cálculos mentales, no comprendieron el problema o no identificaron el procedimiento a tratar para afirmar sus respuestas. Como afirma Lia *et al.* (2006), en muchos casos, la resolución de problemas de porcentaje se limita a una utilización, generalmente algoritmizada, de reglas y mecánica, sin pasar por una comprensión real y significativa para el estudiante.

¿Qué orientó algunas estrategias erróneas en la resolución de problemas de porcentaje? Voces de alumnos de primero de secundaria

A continuación, se describe un caso que nos permitió profundizar en sus procedimientos y dan cuenta, de la comprensión del concepto de porcentaje construido. Las respuestas se organizan en cada uno los tres diferentes tipos de problemas, “la determinación de la base”, “la determinación de un por ciento” y “la aplicación de un por ciento”.

Pregunta 1.) Alicia tiene un total de \$500.00, gastó en comida el 30%. ¿Cuánto dinero gastó?

La respuesta del estudiante fue \$130. Él afirma que para obtener el 30% de 500 dividió 500 entre dos; ese resultado lo dividió de nuevo entre dos, equivalente al 25%, y entonces, desde su reflexión, le faltó sumar ese 5% faltante.

Pregunta 11.) En la imagen del país se representan las entidades con mayor índice de divorcio en 2018. ¿Qué porcentaje, aproximado, tienen las entidades de mayor proporción de divorcios? ¿Y los de menor proporción?

Entidades con mayor y menor proporción de divorcios



En este caso, él nos comentó su olvido respecto a que el país representa el 100%, por ello, para la mayor proporción él considera 30%, mientras que para la menor proporción 60%.

Pregunta 10.) 595,900 es 90% del total de los mexicanos que utilizan autobús como medio de transporte. Según este dato, ¿cuántas personas no usan autobús?

Su respuesta fue 59,590 personas. Para resolverlo él consideró 595,900 como el 90% del total, así que esta cantidad la dividió entre 10 pues este 10% es lo que faltaría completar ($90 + 10 = 100$).

Pese a que el docente del grupo participante en este estudio abordó el tema de los porcentajes “casi todo el ciclo escolar”, los resultados muestran que los estudiantes aún tienen dificultades en la resolución de problemas que involucran este concepto. Los alumnos afirman que aún no dominan el tema, los procedimientos y tampoco comprenden las distintas formas de representar el porcentaje. Para el docente, los porcentajes son un tema complicado porque vincula con otros conceptos, por ello, cuando él enseña el tema “lo relaciona con otros como son las frecuencias y las fracciones”. En palabras del profesor, los alumnos presentan mayor dificultad en la comprensión de los porcentajes cuando se trata de “convertir o sacar porcentaje, ya sea de decimal a fracción, o saber por cuánto multiplicar para saber qué tanto de porcentaje lleva”.

Reflexiones finales

Los estudiantes mostraron mayores dificultades y errores al resolver problemas de n “determinación de la base” y mayores logros en la “aplicación de un por ciento”, es decir, su desempeño varía según el tipo de problema a resolver. Encontramos que son dos las principales estrategias. La primera es el uso de la “regla de tres”. La segunda, según datos de los estudiantes con mayores logros, es su comprensión para calcular el

porcentaje al considerar una cantidad como parte de un todo (100%) mientras que, en la determinación de la base, el procedimiento cambia.

Los errores identificados en las respuestas de los alumnos nos llevan a suponer, que estos estudiantes no han logrado una comprensión profunda de la noción de porcentaje e identificar los distintos tipos de problemas y las implicaciones en términos de los procedimientos a utilizarse; tampoco logran identificar distintas formas de representar el porcentaje.

Referencias

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Lia, A., Grimaldi, V., Machiunas, M. (2006). *La Proporcionalidad*. Argentina: DGCyE.
- Mendoza, T. y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-I), 177-190.
- Sánchez, E., Hoyos, V. y Saiz, M. (2018). *Matemáticas 1 Identidades secundaria*. México: Patria.
- SEP. (1993). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2017a). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2017b). *Matemáticas. Secundaria 1o*. Página web. <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate1.html?fbclid=IwAR10qZnQLOJfvDagUaFjrn4rZ61TsRjMbHQvntHWVGG52H3SzgeXdjOmWCM> Visitada el 22 de junio 2020.
- Stake, R. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Trigueros M., Lozano, M., Sandoval, I., Cortés, M., Jinich, E. y Schulmaister, M. (2019). *Matemáticas 1. Fortaleza Académica*. México: Santillana.